Capítulo 5

Geometría

Los primeros ingredientes básicos en nuestra presentación de la geometría serán los *puntos* y los *vectores*. A partir de ellos definiremos objetos como rectas, planos, curvas y superficies. El otro concepto fundamental será el *producto escalar*, que nos permitirá calcular distancias y ángulos. Trabajaremos con todas estas nociones asumiendo el marco de un *sistema de coordenadas*. En este contexto, puntos y vectores aparecerán ante nosotros a través de sus coordenadas (ternas ordenadas de números) y el producto escalar como una operación algebraica sobre las coordenadas.

La sección 5.1 es netamente introductoria. Discutimos allí las relaciones entre vectores y entre puntos y vectores. Mostraremos también que la elección de un sistema de coordenadas en el espacio hace que estos objetos aparezcan representados como ternas de números, que es el tipo de objetos que en realidad manipularemos. Es decir, trabajaremos con todas las posibles ternas (x, y, z), donde x, y y z son números reales, que forman el conjunto $\mathbb{R}^3$. La $\mathbb{R}$ hace referencia a los números reales. El 3 como superíndice, a que se trata de listas ordenadas formadas por tres números reales.

En la sección 5.3 mostramos cómo las rectas y los planos de $\mathbb{R}^3$ se pueden representar con distintos tipos de ecuaciones. La sección 5.4 discute el cálculo de intersecciones entre rectas y planos a partir de estas ecuaciones.

En la sección 5.5 aparecen, en relación a la importante noción de *producto escalar*, dos ingredientes básicos de la geometría: las *distancias* y los *ángulos*. La sección 5.6 utiliza el producto escalar para explorar algo más en profundidad la geometría de las rectas y los planos en $\mathbb{R}^3$. En particular, se introduce allí la noción de *proyección* sobre un plano y una recta.

La sección 5.7 cierra este capítulo, con una extensión a superficies cualesquiera de algunas de las ideas que aparecieron antes para representar planos en $\mathbb{R}^3$ y resolver distintos problemas geométricos que los involucran.

5.1. Puntos, vectores y coordenadas

En el espacio hay puntos, que designaremos con letras como P, Q, R, etcétera. Dos puntos, puestos en orden, por ejemplo el P y el Q, definen un vector $\vec{PQ}$, que describe el desplazamiento para ir desde el primero de ellos al segundo.

Figura 5.117

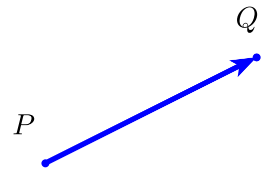


Figura 5.118

El mismo desplazamiento bien podría hacernos viajar entre otra pareja de puntos, por ejemplo la R y S. Pero no hay solo dos, sino infinitas posibilidades para representar un mismo vector.

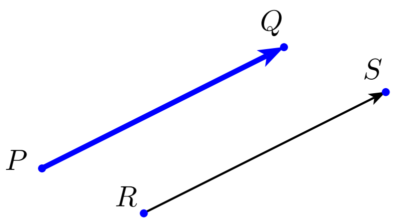


Figura 5.119

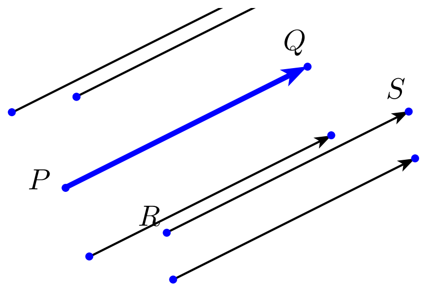


Figura 5.120

En realidad, un vector no está en ninguna parte del espacio. Es como decir "caminá tres cuadras hacia el norte y dos hacia el este". No existe en el mapa el lugar "tres cuadras hacia el norte y dos hacia el este ", pero para pensarlo o representarlo inmediatamente colocamos el paseo en algún sitio que nos guste evocar.

En la frase anterior aparece implícitamente una nueva idea: para ubicarnos y orientarnos permanentemente definimos sistemas de referencia. Por ejemplo, dos direcciones preferidas: norte-sur, o sur-norte, ¿por qué no?, y este-oeste. Otro esquema de referencia centrado en cada uno de nosotros está implícito en el habla corriente: algo puede estar por delante o por detrás, a nuestra izquierda o derecha, un poco más arriba o más abajo.

Los sistemas de coordenadas siempre tienen un origen: el kilómetro cero para nuestras carreteras, el cruce del Ecuador con el meridiano de Greenwich para las coordenadas de latitud y longitud que ubican cualquier punto sobre la superficies de la Tierra, etcétera. En la próxima figura mostramos los puntos P y Q y el vector $\vec{PQ}$ en un sistema de coordenadas en el plano.

En este sistema de coordenadas, el punto P

se representa como $(2,2)$, el punto Q como $(6,4)$ y el vector $\vec{PQ}$ como $(4,2)$. Las ideas para trabajar en el espacio son muy similares, aunque aparecen algunas dificultades adicionales a la hora de representar en una figura plana objetos que pertenece a un espacio tridimensional.

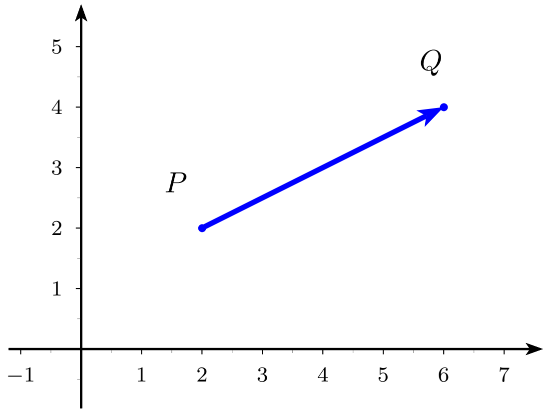


Figura 5.121

Consideraremos entonces tres ejes coordenados perpendiculares. El primero, el eje x, el segundo, el eje y, el tercero, el eje z. Es convencional reservar el eje z para la dirección vertical y dibujar los ejes x e y de modo tal que vistos desde arriba el giro más corto que lleva la semirrecta positiva del eje x a la semirrecta positiva del eje y aparezca en sentido antihorario. Llamaremos O, al origen de nuestro sistema de coordenadas, donde se encuentran los tres ejes. Por esta razón, frecuentemente nos referirmos a los tres ejes como el eje Ox, el eje Oy y el eje Oz. La elección de una unidad de longitud completa el marco de referencia.

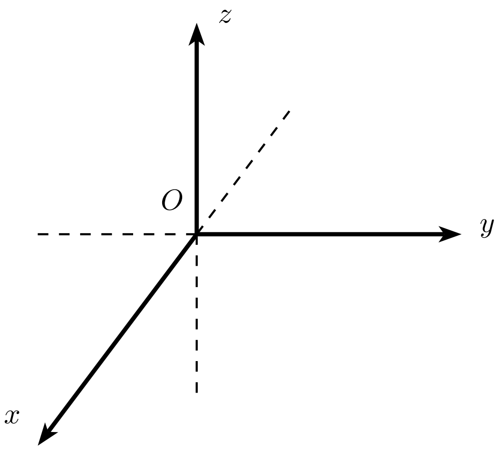


Figura 5.122

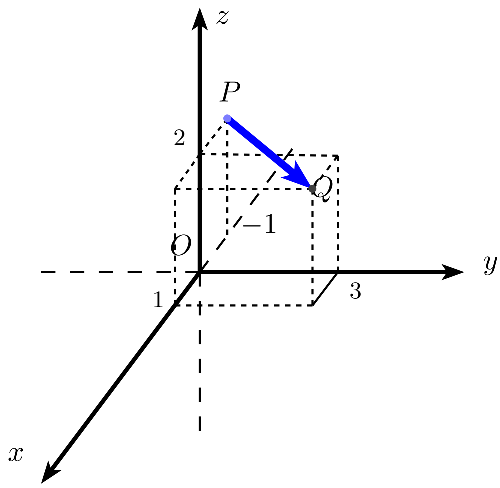


Figura 5.123

En este marco, un punto quedará identificado por sus tres coordenadas. Por ejemplo, el punto P que aparece en la figura tiene coordenadas $(-1,0,2)$. Habitualmente lo indicaremos como $P = (-1,0,2)$, lisa y llanamente identificando el punto con sus coordenadas.

El punto P y el punto $Q = (1,3,2)$ definen un vector $\vec{PQ}$.

El origen O es un punto privilegiado que permite representar de manera canónica a cualquier vector como un desplazamiento que comienza en O. Cada vector queda entonces caracterizado por tres componentes, una sobre cada eje, que coinciden con las coordenadas del punto en que termina el recorrido. Para el vector $\vec{PQ}$ estas componentes son $(2,3,0)$. Las componentes

$$2 = 1 - (-1), \quad 3 = 3 - 0, \quad 0 = 2 - 2,$$

del vector $\vec{PQ}$ son las diferencias entre las coordenadas de Q y de P.

Resulta así que dos objetos esenciales para nuestra teoría, relacionados pero diferentes, puntos y vectores, quedan representados por ternas de números. Es importante entonces, cuando se opera con ellas, estar atento a los significados.

5.2. Operaciones con vectores y con puntos y vectores

Dos vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ pueden sumarse entre sí. Esto produce un nuevo vector $\vec{U}+\vec{V}$, cuyas coordenadas son la suma de las coordenadas de ambos vectores. Por ejemplo

$$(1,1,3)+(-1,2,0)=(0,3,3).$$

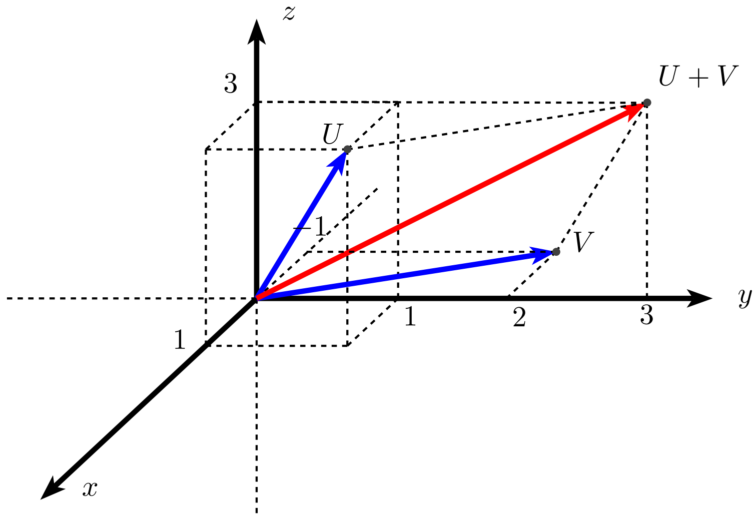


Figura 5.124

$$\vec{O}=(0,0,0)$$

es neutro para la suma de vectores –la misma propiedad que tiene el cero para la suma de números–, en el sentido de que para cualquier vector $\vec{U}$ se satisfacen las igualdades

$$\vec{O}+\vec{U}=\vec{U}+\vec{O}=\vec{U}.$$

Si pensamos los vectores como desplazamientos, el vector nulo es el desplazamiento que consiste en quedarse en el lugar.

Un vector $\vec{U}$ pueden multiplicarse por un número λ. Esto produce un nuevo vector $\lambda\vec{U}$ con todas sus coordenadas multiplicadas por el número λ. Por ejemplo

$$2(1,2,2)=(2,4,4).$$

En este caso el número λ que multiplica al vector es $\lambda=2$.

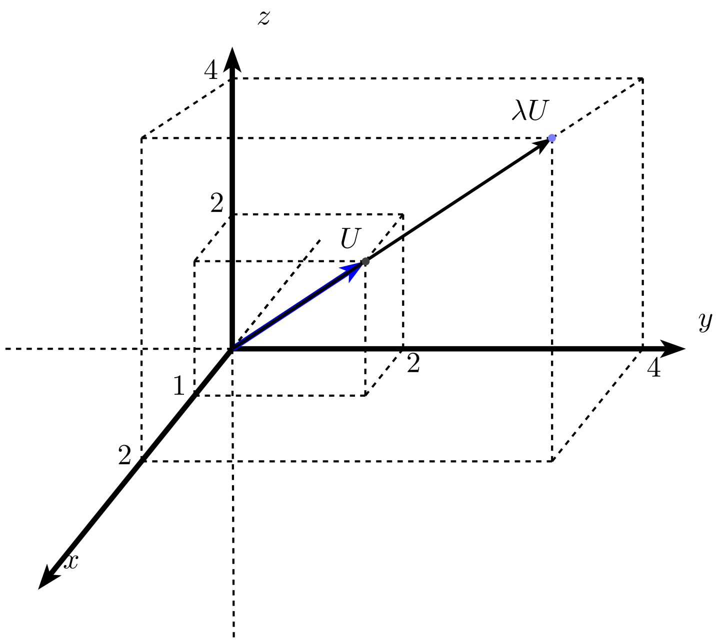


Figura 5.125

Al ubicar en nuestro sistema de coordenadas los vectores $\vec{U}$ y $\lambda\vec{U}$, la proporcionalidad entre sus componentes implica que comparten la misma dirección y que sus representaciones quedan ubicadas en una misma línea por el origen O. Por esta razón, diremos que son vectores *colineales*. Dos vectores colineales no nulos indican en el espacio la misma dirección. Dos vectores no colineales indican direcciones diferentes. El vector nulo $\vec{O}$ es colineal con cualquier otro vector del espacio, porque para cualquier vector $\vec{U}$ se satisface

$$\vec{O} = 0\vec{U}.$$

Las dos operaciones de sumar vectores y multiplicarlos por un números son la base de toda el álgebra de los vectores. Antes de pasar a ver cómo se relacionan con los puntos, hagamos algunos comentarios.

Cuando el número es negativo, al multiplicar se invierte el sentido del vector. Lo vemos en el ejemplo

$$-\frac{1}{2}(1,4,2) = \left(-\frac{1}{2}, -2, -1\right)$$

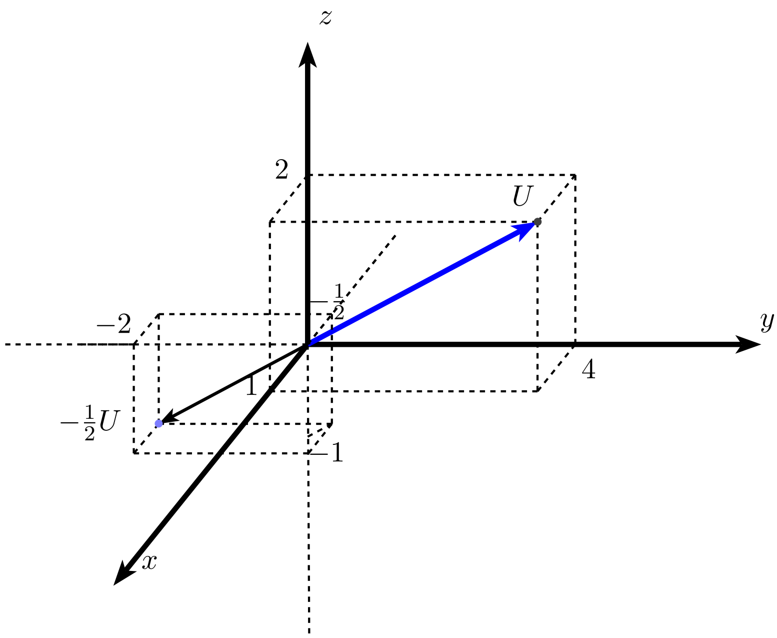


Figura 5.126

Multiplicar un vector $\vec{V}$ por -1 produce su opuesto, un vector $-\vec{V}$ cuya suma con $\vec{V}$ es el vector nulo $\vec{O}$:

$$(2,-2,1)+(-1)(2,-2,1)=(2,-2,1)+(-2,2,-1)=(0,0,0).$$

La resta $\vec{U}-\vec{V}$ es lo mismo que sumar al vector $\vec{U}$ el opuesto $-\vec{V}$ de $\vec{V}$. Visto en coordenadas, simplemente consiste en restar las coordenadas. Si

$$\vec{U}=(2,3,5), \quad \vec{V}=(1,-1,0),$$

la resta $\vec{U}-\vec{V}$ es

$$\vec{U}-\vec{V}=(2,3,5)-(1,-1,0)=(2-1,3-(-1),5-0)=(1,4,5).$$

La suma de vectores y el producto por números tienen propiedades importantes que derivan de las propiedades de los números y que usaremos libremente. Las listamos a continuación, incluyendo la existencia de un vector nulo $\vec{O}$ que ya habíamos discutido antes. En lo que sigue, $\vec{U}$, $\vec{V}$ y $\vec{W}$ representarán vectores cualesquiera. Análogamente, η y λ representaran números cualesquiera.

- El vector nulo $\vec{O}=(0,0,0)$ es neutro para la suma de vectores, en el sentido de que siempre se satisface
$$\vec{U}+\vec{O}=\vec{O}+\vec{U}=\vec{U}.$$
- Todo vector $\vec{U}$ tiene un opuesto $-\vec{U}$ tal que
$$\vec{U}+(-\vec{U})=\vec{O}.$$

  Ya hemos visto que $-\vec{U}=(-1)\vec{U}$.

- No importa el orden en que se sumen los vectores ni como se asocien los sumandos. Es decir,

$$\vec{U}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{U}, \quad \vec{U}+(\vec{V}+\vec{W})=(\vec{U}+\vec{V})+\vec{W}.$$

- El producto de un número por un vector es distributivo, tanto respecto la suma de números como respecto a la suma de vectores:

$$\lambda(\vec{U}+\vec{V})=\lambda U+\lambda\vec{V}, \qquad (\eta+\lambda)\vec{V}=\eta\vec{V}+\lambda\vec{V}.$$

- Aunque es bastante obvio, observemos también que el número 1 que es neutro para el producto entre números, tambien lo es para el producto por vectores:

$$1\vec{V}=\vec{V}$$

Dados un punto P y un vector $\vec{V}$ cualesquiera la suma

$$Q=P+\vec{V}$$

es un nuevo punto, que es el resultado de desplazarse según $\vec{V}$ a partir de P. original. Las coordenadas del nuevo punto son la suma de las coordenadas del punto de partida, más las del vector. Por ejemplo, si

$$P=(-1,0,2), \qquad \vec{V}=(2,-2,1),$$

entonces

$$Q=(-1,0,2)+(2,-2,1)=(1,-2,3).$$

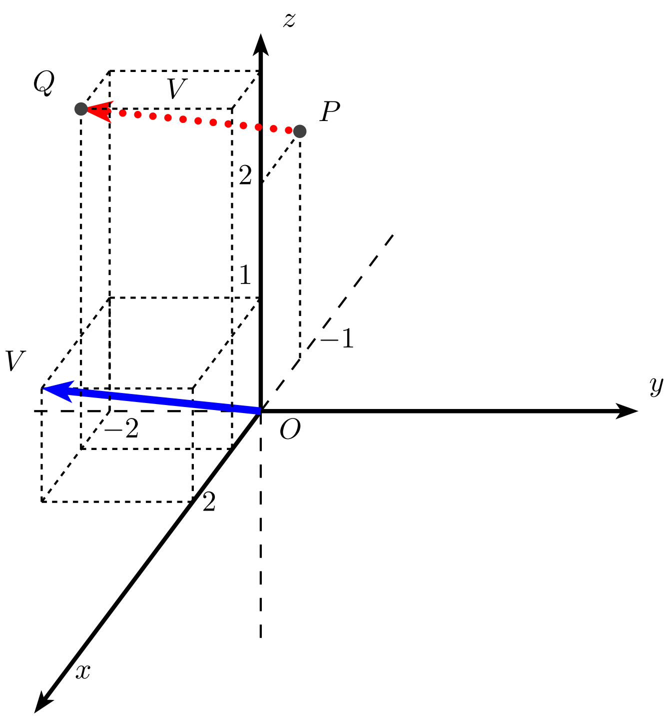


Figura 5.127

La suma de puntos y vectores tiene las siguientes propiedades.

- Dados dos puntos P y Q cualesquiera hay un único vector $\vec{V}$ tal que
$$Q = P + \vec{V}.$$
Indicaremos a este vector $\vec{V}$ como la resta
$$\vec{V} = Q - P$$
de P respecto a Q. Las coordenadas de $\vec{V}$ son las diferencias entre las coordenadas de Q y de P. Por ejemplo, si
$$P = (-1, 0, 2), \qquad Q = (-3, 1, 7),$$
entonces
$$\vec{V} = (-3, 1, 7) - (-1, 0, 2) = (-3 - (-1), 1 - 0, 7 - 2) = (-2, 1, 5).$$
Obviamente,
$$P + \vec{V} = (-1, 0, 2) + (-2, 1, 5) = (-3, 1, 7) = Q.$$
- Si a cualquier punto P le sumamos el vector nulo $\vec{O}$, el resultado es el mismo punto P.
- La suma de un punto P con dos vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ puede hacerse en cualquier orden. Es lo mismo sumar primero a P uno de los vectores y luego el otro, que sumar ambos vectores primero y luego sumar a P el resultado. Es decir,
$$(P + \vec{V}) + \vec{W} = P + (\vec{V} + \vec{W}).$$

Aunque los puntos también se representan como ternas de números, la operación de suma de puntos no tiene sentido geométrico y no la realizaremos.

Tal como anunciábamos al comienzo de esta sección, los ingredientes básicos de nuestra presentación de la geometría del espacio son:

- los puntos y vectores, vistos en un sistema de coordenadas en el que aparecen como ternas de números;
- las operaciones de suma de vectores, producto de un número por un vector, y suma de un punto y un vector, vistas a través del sistema de coordenadas como operaciones con ternas de números.

A partir de ellos iremos construyendo rectas, planos y otras superficies, y estudiando sus propiedades. Ese será el objeto de las restantes secciones de este capítulo.

5.3. Ecuaciones de rectas y planos

Las rectas y planos son conjuntos del espacio con una estructura muy particular y ordenada. En nuestra presentación de la geometría a través de un sistema de coordenadas, las rectas y los planos se pueden describir por ecuaciones lineales.

Discutiremos dos tipos de ecuaciones:

1. Ecuaciones paramétricas. Las ecuaciones paramétricas nos permitirán generar todos los puntos de una recta o plano. Pueden asimilarse a una forma de recorrer estos objetos. También a la idea de describir un conjunto por extensión, nombrando a todos sus elementos, con la salvedad de que en este caso la "lista" de elementos es infinita.

2. Ecuaciones reducidas. Las ecuaciones reducidas dan condiciones para decidir si un punto pertenece o no pertenece a una recta o plano. Corresponden a la descripción de un conjunto por comprensión, a partir de una propiedad que distingue a los elementos del conjunto. En nuestro caso, la propiedad común a todos los puntos de la recta o plano será que sus coordenadas satisfacen las ecuaciones reducidas.

5.3.1. Ecuaciones paramétricas y reducidas de rectas en el espacio

Construiremos las rectas tomando como base un punto P cualquiera y una dirección en el espacio, definida por un vector $\vec{V}$ distinto del vector nulo $\vec{O}$. Sumando al punto P todos los posibles vectores λV que se obtienen multiplicando a $\vec{V}$ por todos los posibles números reales λ, obtendremos todos los puntos de la recta. Veremos como funciona esto en un ejemplo.

Ejemplo 84 Tomemos

$$P = (-1, 0, 2), \quad \vec{V} = (2, -2, 1).$$

Sumando $\vec{V}$ al punto P obtenemos

$$P + \vec{V} = (1, -2, 3).$$

También podemos sumar a P vectores que se obtienen de $\vec{V}$ multiplicándolo por distintos números. Por ejemplo

$$\begin{array}{l} P + 2\vec{V} = (-1, 0, 2) + 2(2, -2, 1) = (-1, 0, 2) + (4, -4, 2) = (3, -4, 4); \\ P + \frac{1}{2}\vec{V} = (-1, 0, 2) + \frac{1}{2}(2, -2, 1) = (-1, 0, 2) + \left(1, -1, \frac{1}{2}\right). \\ P + (-1)\vec{V} = (-1, 0, 2) - (2, -2, 1) = (-3, 2, 1). \end{array} \tag{5.1}$$

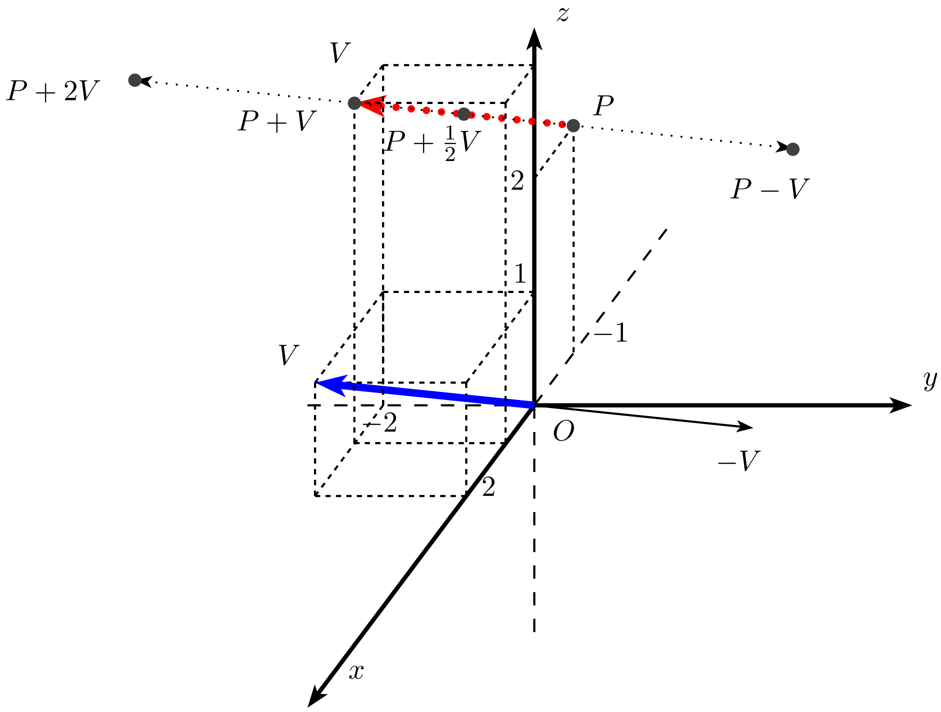


Figura 5.128

En la figura 5.128, se muestran estos puntos en el espacio. Observar que aparecen alineados. Además el último punto, que se obtuvo multiplicando $\vec{V}$ por un número negativo, aparece hacia el otro lado de P que el resto.

Variando el valor del número que multiplica a $\vec{V}$ se van generando todos los posibles puntos de la recta. La forma genérica de un punto de la recta es entonces

$$Q = P + \lambda V = (-1, 0, 2) + \lambda(2, -2, 1) = (-1, 0, 2) + (2\lambda, -2\lambda, \lambda) = (-1 + 2\lambda, -2\lambda, 2 + \lambda). \quad (5.2)$$

Desarrollando los cálculos en el miembro de la derecha de (5.2) encontramos

$$Q = P + \lambda V = (-1, 0, 2) + (2\lambda, -2\lambda, \lambda) = (-1 + 2\lambda, -2\lambda, 2 + \lambda). \quad (5.3)$$

Si llamamos (x, y, z) al punto genérico Q sobre la recta, podemos reescribir la expresión (5.3) en términos de las coordenadas como

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda, \\ y = -2\lambda, \\ z = 2 + \lambda. \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Este conjunto de ecuaciones recibe el nombre de *ecuaciones paramétricas* de la recta. Variando el valor del parámetro λ podemos generar las coordenadas de cualquier punto de la recta. Por ejemplo, cuando $\lambda = 0$, obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1, \\ y = 0, \\ z = 2, \end{array} \right.$$

que son las coordenadas de $P = (-1, 0, 2)$, el punto base de la recta. Tomando $\lambda = 2$, $\lambda = 1/2$ y $\lambda = -1$ las ecuaciones generan (5.4) los puntos de la recta que ya habíamos encontrado en (5.1).

El próximo ejercicio permite explorar las posibilidades de variar el parámetro λ.

Ejercicio 5.3.1

1. Hallar los puntos de la recta que corresponden a tomar $\lambda = 3$ y $\lambda = -3$.
2. Hallar el valor de λ que corresponde al punto de la recta $Q = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.
3. Hallar el valor de λ que corresponde al punto R de la recta que tiene coordenada $x = 0$. Interpretar geométricamente esta condición.
4. Hallar el punto medio del segmento PQ determinado por los puntos de las dos preguntas anteriores, y el valor de λ que le corresponde.
5. Determinar si los puntos $(19, -20, 12)$ y (10,1,0) están en r. Para el que pertenezca a la recta, determinar el valor de λ que le corresponde. ♣

Las ecuaciones paramétricas de una recta representan una manera de generar todos sus puntos, a partir de un punto base P, siguiendo un vector en la dirección de la recta. Obviamente, esa no es la única manera de recorrer la recta. Lo vemos en el próximo ejemplo.

Ejemplo 85 El punto $P' = (1, -2, 3)$ pertenece a la recta r del ejemplo 84, ya que se obtiene haciendo $\lambda = 1$ en (5.4). El vector $V' = (1, -1, 1/2)$ es colineal con V. A partir de P' y V' podemos obtener nuevas ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -2 - \lambda, \\ z = 3 + \lambda/2 \end{cases} \tag{5.5}$$

para r. Nuestra intuición geométrica nos dice que las ecuaciones (5.4) y (5.5) describen el mismo conjunto. Se puede confirmar directamente que esto es así, algo que se propone al lector en el próximo ejercicio.

Ejercicio 5.3.2 Mostrar que cualquier punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que pueda obtenerse escogiendo adecuadamente un valor de λ en (5.4), también puede obtenerse a partir de (5.5), y viceversa.

En el ejercicio anterior reapareció la importante noción de *colinealidad* entre vectores que habíamos destacado en la sección introductoria 5.1. Decimos que dos vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ son colineales si uno de ellos se obtiene del otro multiplicando por una constante. Es decir, si existe un número λ tal que $\vec{U} = \lambda\vec{V}$ o $\vec{V} = \lambda\vec{U}$.

Ejemplo 86 Los vectores

$$(-\pi, 2\pi, \pi/2), \quad (14\sqrt{2}, -28\sqrt{2}, -7\sqrt{2}),$$

son colineales, pero

$$(-1, -1, 1), \quad (1, -1, -1),$$

no lo son.

Ejercicio 5.3.3 Demostrar la afirmación anterior. ♣

Ejercicio 5.3.4 Para cada una de las parejas de vectores $\vec{V}$ y $\vec{W}$ que aparecen a continuación, decidir si son o no son colineales. Cuando sea posible hallar constantes η y λ tales que $V = \eta W$ ó $W = \lambda V$.

1. $\vec{V} = (-\sqrt{2}\pi, \sqrt{2}\pi, -5\pi/\sqrt{2})$, $\vec{W} = (2e, -2e, 5e)$;
2. $\vec{V} = (1, 2, 3)$, $\vec{W} = (3, 2, 1)$;
3. $\vec{V} = (0, 0, 0)$, $\vec{W} = (-1, -5, 1)$.

Observación 42 Parametrizaciones. Movimiento rectilíneo y trayectoria
Comenzamos por recordar el hecho de que una recta r es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Cada uno de los puntos de r es de la forma $P + \lambda V$ para algún valor real de λ, y al variar λ vamos recorriendo todos los puntos de la recta. Esta manera de describir la recta es lo que llamaremos una *parametrización* de la recta. El parámetro es λ, y la parametrización establece una correspondencia uno a uno entre los números reales y la recta. Podemos enfatizar aún más este punto de vista escribiendo cada punto Q de la recta en la forma

$$Q(\lambda) = P + \lambda\vec{V}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $\vec{V} \neq \vec{O}$ esta expresión define una función

$$\begin{array}{rcccl} Q & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3, \\ & & \lambda & \mapsto & P + \lambda\vec{V}, \end{array}$$

inyectiva, cuya imagen es la recta r.

Quizás la analogía más clara para esta descripción de la recta es la del movimiento con una velocidad uniforme $\vec{V}$ no nula. Si pensamos que el parámetro λ representa el tiempo t, entonces la fórmula $P + \lambda\vec{V}$ nos dice cuál es la posición en el instante $t = \lambda$ de un punto móvil que se desplaza con una velocidad constante $\vec{V}$ y que en el instante $t = 0$ ocupaba (u ocupará, no tenemos por qué pensar que $\lambda > 0$ ni que el tiempo cero está en el pasado) la posición P del espacio. La recta está entonces formada por todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ por los que el "punto móvil" pasa cuando λ varía entre $-\infty$ y $+\infty$.

Tal como vimos, una misma recta puede admitir varias parametrizaciones, de la misma forma que una trayectoria dada puede ser recorrida de infinidad de maneras diferentes. En nuestra analogía cinemática, cambiar el punto P que usamos en la parametrización a un nuevo P' equivale a modificar el punto de partida; cambiar el vector $\vec{V}$ a un vector colineal $\vec{V}' = \lambda\vec{V}$, con $\lambda \neq 0$, implica recorrer la recta con una velocidad diferente. Incluso el sentido del recorrido puede cambiar, cosa que ocurre cuando la constante de proporcionalidad entre los vectores $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ es negativa.

Como cada parametrización origina una terna de ecuaciones paramétricas al ser escrita coordenada a coordenada, dada una recta hay una infinidad de posibles ecuaciones paramétricas. ♠

Dados un punto $Q = (x, y, z)$ y una recta r, es natural preguntarse si el punto pertenece a la recta. Para saberlo a partir de las ecuaciones paramétricas hay que determinar si algún valor de λ permite obtener las coordenadas del punto Q. Veremos a continuación que este procedimiento puede hacerse de forma sistemática, y conduce a obtener otra representación para la recta, en forma de un juego de ecuaciones que son satisfechas por las coordenadas (x, y, z) si y solo si el punto Q está en la recta.

Ejemplo 87 Determinemos qué condición debe satisfacer $Q = (x, y, z)$ para pertenecer a la recta r de ecuaciones paramétricas (5.4). Notemos que una vez fijados (x, y, z) el problema se reduce a determinar si existe algún valor de λ que permita satisfacer a la vez las tres igualdades

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda, \\ y = -2\lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{array}\right. \tag{5.6}$$

Es muy sencillo despejar λ de cada una de ellas. Obtenemos, respectivamente

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{x+1}{2}, \\ \lambda = -\dfrac{y}{2}, \\ \lambda = z-2, \end{array}\right. \tag{5.7}$$

Hay un valor de λ que satisfaga a la vez las tres ecuaciones en (5.7) si y solo si se satisfacen las igualdades

$$\frac{x+1}{2} = -\frac{y}{2} = z-2. \tag{5.8}$$

Las ecuaciones (5.8) sobre las coordenadas (x, y, z) del punto Q son una condición necesaria y suficiente para la pertenencia de Q a la recta. Son equivalentes al par de ecuaciones

$$\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{2} = -\dfrac{y}{2}, \\ \dfrac{x+1}{2} = z-2, \end{array}$$

que todavía pueden ordenarse un poco más, como

$$\left\{\begin{array}{r} x+y = -1, \\ -x+2z = 5. \end{array}\right. \tag{5.9}$$

En otras palabras la recta r es el conjunto

$$r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+1 = 0,\ -x+2z-5 = 0\}.$$

Ejercicio 5.3.5 Usar las ecuaciones (5.9) para estudiar la pertenencia a la recta r de los puntos $(10, 1, 0)$ y $(19, -20-12)$.

Como resumen de este ejemplo, podemos decir que las ecuaciones (5.4) nos dicen cómo recorrer r. En tanto que (5.9) caracterizan al conjunto r formado por los puntos visitados en nuestro recorrido. ♣

Llamaremos a estas nuevas ecuaciones para r *ecuaciones reducidas* o *implícitas* de la recta.

Esto es completamente general. Cualquier recta en $\mathbb{R}^3$ puede describirse como el conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen un sistema formado por dos ecuaciones lineales independientes. Este hecho aparecerá claramente en los próximos ejemplos y ejercicios, en los que mostraremos cómo pasar de ecuaciones paramétricas a reducidas y viceversa. En la sección 5.3.2, observación 45 en la página 212, veremos además que cada una de las dos ecuaciones que aparecen en la representación de una recta por ecuaciones reducidas es la ecuación de un plano en el espacio, por lo que las ecuaciones reducidas caracterizan a la recta como la intersección de dos planos .

Ya vimos que cada recta admite infinitas ecuaciones paramétricas. También admite infinitas ecuaciones reducidas. A continuación proponemos al lector hallar otras para la recta r de los ejemplos 84 y 87.

Ejercicio 5.3.6 Hallar otros pares de ecuaciones reducidas para la recta r.

Observación 43 Las ecuaciones (5.8) implican que sobre una recta los incrementos de las variables x, y y z siempre guardan la misma relación de proporcionalidad. Para verlo, escribamos la forma general de una recta que pasa por un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene un vector director $\vec{U} = (u, v, w)$. Un punto genérico $Q = (x, y, z)$ sobre la recta es

$$Q = P + \lambda V.$$

Esta misma relación, escrita en coordenadas, genera las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + u\lambda, \\ y = y_0 + v\lambda, \\ z = z_0 + w\lambda. \end{cases} \tag{5.10}$$

Si ponemos énfasis en la variación de las variables sobre la recta, podemos reescribir (5.10) como

$$\begin{cases} x - x_0 = u\lambda, \\ y - y_0 = v\lambda, \\ z - z_0 = w\lambda. \end{cases}$$

Llamando Δx al incremento $x - x_0$ para la variable x, Δy al incremento en y y Δz al incremento en z, podemos escribir

$$\begin{cases} \Delta x = u\lambda, \\ \Delta y = v\lambda, \\ \Delta z = w\lambda. \end{cases} \tag{5.11}$$

Si u, v y w son distintos de cero, encontramos entonces que

$$\frac{\Delta x}{u} = \frac{\Delta y}{v} = \frac{\Delta z}{w}.$$

Es decir, los incrementos de las variables siempre están en la misma relación con las componentes u, v y w del vector $\vec{V}$ que define la dirección de la recta. Otra manera de escribir esta relación, que se desprende directamente de (5.11), es

$$Q - P = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \lambda \vec{V}.$$

Expresa lo mismo de manera un tanto más geométrica: el incremento en las coordenadas es siempre un vector colineal con $\vec{V}$.

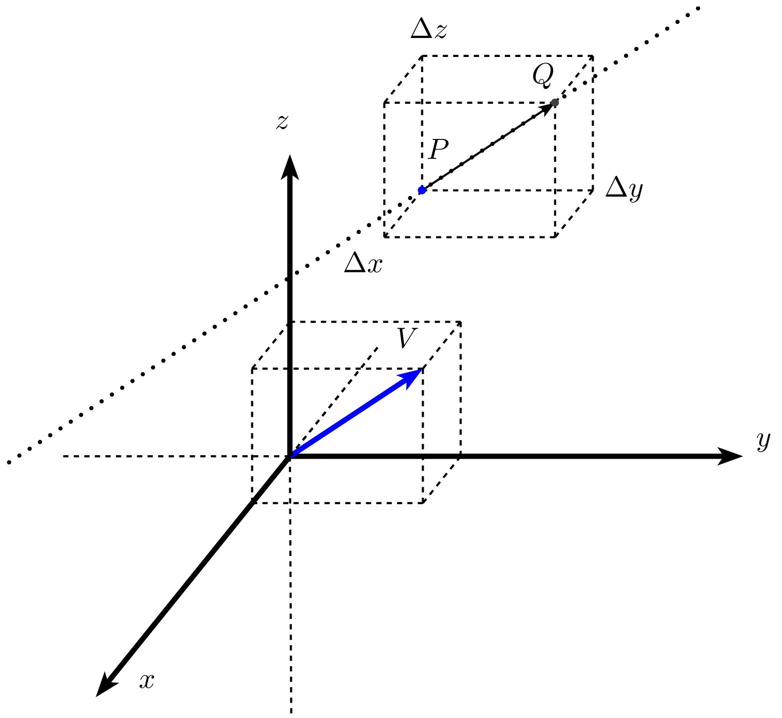


Figura 5.129

Ejercicio 5.3.7 ¿Cuáles de estas conclusiones se mantienen cuando una o dos de las coordenadas del vector $\vec{V}$ se anulan? ¿Cuáles deben reformularse? ♠

Observación 44 Para saber si un cierto punto $Q = (x, y, z)$ pertenece a la recta r de los ejemplos los ejemplos 84 y 87 debemos determinar si existe un valor de λ que permita obtenerlo a partir de las ecuaciones. El sistema de ecuaciones (5.4) debe ser visto entonces como un sistema con incógnita λ que tiene a los parámetros x, y y z como datos. El punto Q pertenece a r si y solo si el sistema es compatible. Las ecuaciones reducidas de la recta aparecen entonces como una condición de compatibilidad de este sistema.

A continuación vamos a ver como el intento de resolver el sistema usando eliminación da lugar a las ecuaciones reducidas. Esta técnica no es especialmente importante en este momento, pero nos será útil para encontrar las ecuaciones reducidas de los planos.

El sistema de ecuaciones que estamos considerando es

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda, \\ y = -2\lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases}$$

Usamos la primera ecuación para eliminar λ de las otras dos. Como primer paso, a la segunda le sumamos la primera. A continuación, multiplicamos a la tercera por dos y restamos del resultado la primera ecuación. Obtenemos

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda, \\ x + y = -1, \\ 2z - x = 5. \end{cases}$$

En las ecuaciones segunda y tercera ya no aparece λ. Son ecuaciones que deben satisfacerse para asegurar la compatibilidad del sistema. De este modo, reencontramos las ecuaciones reducidas (5.9) para la recta r. ♠

Así com pueden obtenerse ecuaciones reducidas a partir de las paramétricas, es posible recorrer el camino inverso.

Ejemplo 88 Mostraremos que el par de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=3, \\ x+z=-1, \end{array}\right. \tag{5.12}$$

son las ecuaciones reducidas de una recta r de la que vamos a determinar un juego de ecuaciones paramétricas.

Comencemos por observar que cualquiera de las coordenadas, x, y o z, puede escogerse como variable independiente en el sistema lineal (5.12), y emplearse para expresar en función de ella los valores de las otras dos variables para cualquier punto (x, y, z) que satisfaga las ecuaciones. Por ejemplo, si decidimos tomar x como variable independiente tenemos

$$\left\{\begin{array}{l} y=-3+x, \\ z=-1-x. \end{array}\right. \tag{5.13}$$

Naturalmente, $x = x$, por lo que la expresión paramétrica de las soluciones del sistema es, llamando ahora λ al parámetro x que hemos escogido como variable independiente,

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda, \\ y=-3+\lambda, \\ z=-1-\lambda. \end{array}\right.$$

Reconocemos aquí a la recta que pasa por $P = (0, -3, -1)$ y tiene como vector director a $V = (1, 1, -1)$. ♣

Ejercicio 5.3.8 Hallar otras dos juegos de ecuaciones paramétricas para la recta, tomando a y y a z como variable. Verificar que los tres vectores directores que aparecen en las tres diferentes ecuaciones son colineales. ♣

Ejercicio 5.3.9 Hallar ecuaciones paramétricas y ecuaciones reducidas de las siguientes rectas:

1. la que pasa por el punto $P = (1, 2, 5)$, con vector director $V = (2, 1, 3)$;

2. la que pasa por los puntos $A = (4, 3, 0)$ y $B = (1, 0, 1)$.

Ejercicio 5.3.10

1. Averiguar si los puntos $(3, 1, -1)$, $(5, 2, 1)$ y $(5, 0, 0)$ pertenecen a la recta con ecuaciones paramétricas
$$\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda, \\ y=2-\lambda, \\ z=-2+\lambda. \end{array}\right.$$

2. Repetir para los puntos $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$, y la recta que tiene ecuaciones reducidas
$$\left\{\begin{array}{r} x+y-z+1=0, \\ 2x-y+z+2=0. \end{array}\right.$$

3. Averiguar si los puntos $(1,0,2)$, $(-1,1,1)$ y $(3,-1,1)$ están alineados. Si lo están, encontrar ecuaciones paramétricas y reducidas de la recta que determinan.

4. Repetir para $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$ y $(1,2,3)$.

Ejercicio 5.3.11 Hallar ecuaciones reducidas de las rectas r y s con ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda, \\ y=-3+\lambda, \\ z=-1, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=2, \\ y=-3+\lambda, \\ z=-2. \end{array}\right.$$

¿Qué particularidad destacable tienen estas rectas?

Ejercicio 5.3.12 Hallar ecuaciones paramétricas de las rectas r y s con ecuaciones reducidas

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=3, \\ 2x-y-z=0. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y=2, \\ x-y=4. \end{array}\right.$$

¿Qué particularidad destacable tienen estas rectas?

5.3.2. Ecuaciones paramétricas y reducidas de planos

En la sección anterior construimos rectas desplazándonos a partir de un punto P siguiendo la dirección de un único vector no nulo $\vec{V}$. En estas sección usaremos un procedimiento similar para construir planos. Los planos admiten recorridos en dos direcciones independientes, de modo que necesitaremos dos vectores no colineales $\vec{U}$ y $\vec{V}$ para construirlos.

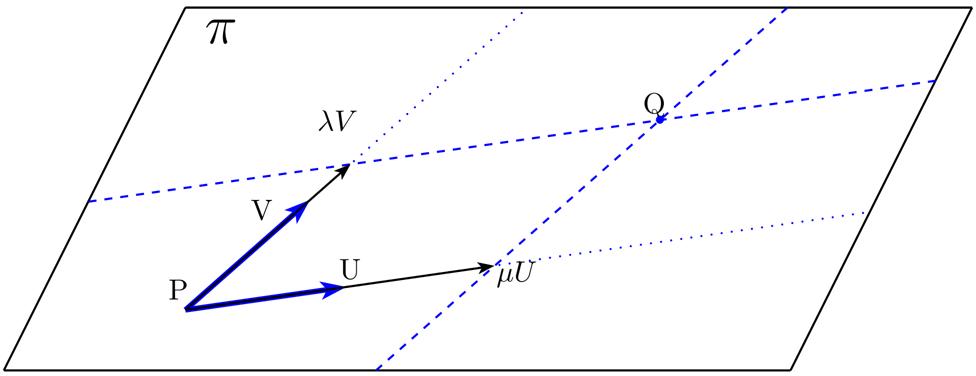


Figura 5.130

La forma general de un punto Q que pasa por el punto P y tiene vectores directores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ es

$$Q = P + \mu\vec{U} + \nu\vec{V}.$$

El plano está formado por todos los puntos que pueden construirse a partir de esta expresión, con todos los posibles valores de los números μ y ν. Las ecuaciones paramétricas se construyen de manera muy similar a las de las rectas, pero tienen dos parámetros, uno asociada a cada uno de los dos vectores directores.

Ejemplo 89 El plano α que pasa por el punto

$$P = (0, -1, 1)$$

y tiene a

$$\vec{U} = (1, -2, -1), \quad \vec{V} = (-1, 3, 1),$$

como vectores directores tiene ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \mu - \nu, \\ y = -1 - 2\mu + 3\nu, \\ z = 1 - \mu + \nu. \end{array} \right. \tag{5.14}$$

Consideremos, por ejemplo, el punto $Q = (1, -2, 0)$ y tratemos de determinar si pertenece a α. Esto es equivalente a que Q pueda escribirse en la forma (5.14) para algún valor de λ y μ, y nos lleva a considerar el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & \mu - \nu, \\ -2 & = & -1 - 2\mu + 3\nu, \\ 0 & = & 1 - \mu + \nu. \end{array} \right.$$

con incógnitas μ y ν. Si podemos encontrar valores de μ y ν que lo satisfagan, entonces con esos valores de los parámetros podremos construir el punto Q a partir de las ecuaciones paramétricas.

Ahora no podemos usar el procedimiento que empleamos con la ecuación de la recta, de despejar la incógnita de todas las ecuaciones, porque hay dos incógnitas. Comenzamos entonces por escribir el sistema en una forma un poco más adecuada para su resolución, como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu - \nu & = & 1, \\ 2\mu - 3\nu & = & 1, \\ \mu - \nu & = & 1. \end{array} \right.$$

Usamos la primera ecuación para eliminar μ de las otras dos: la multiplicamos por 2 y restamos de las segunda; la restamos de la tercera. El nuevo sistema que obtenemos, equivalente al original, es

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \mu - \nu & = & 1, \\ -\nu & = & -1, \\ 0 & = & 0. \end{array} \right.$$

La tercera ecuación se satisface independientemente de μ y ν. La segunda implica $\nu = 1$. Con ese resultado vamos a la primera y despejamos $\mu = 2$. Esto implica que Q está en el plano α. Más aún

$$Q = P + 2\vec{U} + \vec{V}.$$

Cuando nos planteamos la misma pregunta para $R = (3, -1, -1)$ encontramos que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3 & = & \mu - \nu, \\ -1 & = & -1 - 2\mu + 3\nu, \\ -1 & = & 1 - \mu + \nu. \end{array} \right.$$

es incompatible. Por lo tanto R no pertenece a α.

Ejercicio 5.3.13 Completar los cálculos para el punto R. ♣

También para los planos la condición de pertenencia de un punto Q de coordenadas (x, y, z) puede expresarse en términos de un conjunto de ecuaciones sobre las coordenadas de Q, que aseguran la compatibilidad del sistema de ecuaciones con incógnitas μ y ν constituido por las ecuaciones paramétricas. En el caso de un plano todo se reduce a una única ecuación lineal, tal como mostramos en nuestro próximo ejemplo

Ejemplo 90 Un punto $Q = (x, y, z)$ pertenece al plano α del ejemplo 89 si y sólo si el sistema (5.14) es compatible. Analicemos la condición de compatibilidad recurriendo a la eliminación gaussiana. Para ello escribimos el sistema en la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu - \nu & = & x, \\ -2\mu + 3\nu & = & y + 1, \\ -\mu + \nu & = & z - 1. \end{array} \right.$$

Observemos que el miembro de la derecha son las coordenadas del vector $Q - P$, el vector diferencia entre un punto genérico Q y el punto P que hemos tomado como punto base del plano. Al sumar dos veces la primera ecuación a la segunda, y la primera a la tercera, el sistema queda escalerizado, en la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda - \mu & = & x, \\ \mu & = & y + 1, \\ 0 & = & x + z - 1. \end{array} \right.$$

Encontramos entonces que

$$x + z = 1 \tag{5.15}$$

es la condición de compatibilidad del sistema de ecuaciones que define al plano α. Por lo tanto, el plano α es el conjunto

$$\pi = \left\{ (x, y, z) \ \in \ \mathbb{R}^3; \ x + z = 1 \right\}.$$

La ecuación (5.15) es lo que llamamos ecuación implícita o ecuación reducida del plano α de ecuaciones paramétricas (5.14). ♣

En general, una única ecuación lineal

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{5.16}$$

en $\mathbb{R}^3$, que sea no trivial en el sentido de que los tres coeficientes a, b y c no se anulen simultáneamente, define un plano. A partir de una ecuación como (5.16) pueden obtenerse ecuaciones paramétricas.

Ejemplo 91 Consideremos la ecuación

$$2x + 3y - z + 4 = 0.$$

Despejando, por ejemplo, la variable z, obtenemos

$$z = 2x + 3y + 4,$$

lo que es equivalente al juego de ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda, \\ y = \mu, \\ z = 4 + 2\lambda + 3\mu. \end{array} \right.$$

Esta es la representación paramétrica de un plano que pasa por el punto $(0, 0, 4)$, que se obtiene haciendo $\lambda = \mu = 0$ en las ecuaciones que acabamos de encontrar, y tiene a los vectores

$$U = (1, 0, 2), \quad V = (0, 1, 3),$$

como vectores directores. ♣

Ejemplo 92 Una ecuación como

$$x = 0$$

define un plano que pasa por el origen, y tiene $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ como un par de vectores directores. También $y = 0$ y $z = 0$ representan planos en $\mathbb{R}^3$. ♣

Observación 45 Como una ecuación lineal define un plano, cada una de las dos ecuaciones en una pareja de ecuaciones reducidas de una recta representa un plano. Los puntos que satisfacen las dos ecuaciones son los que están en la intersección de los planos que ellas definen. Por lo tanto, especificar una recta por medio de sus ecuaciones reducidas es equivalente a representarla como la intersección de dos planos. Esta observación da sentido geométrico al hecho de que haya infinitas posibilidades para escoger las ecuaciones reducidas: dada una recta, hay infinitas parejas de planos cuya intersección es la recta dada.

Observación 46 Un plano también queda determinado por tres puntos P, Q y R que no estén alineados. Esta segunda manera de determinar un plano se reduce en realidad a la de un punto y dos vectores no colineales, porque podemos basarnos, por ejemplo, en el punto P y los dos vectores

$$\vec{U} = Q - P, \quad \vec{V} = R - P,$$

que no son colineales si P, Q y R no están alineados. ♠

Ejercicio 5.3.14 Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de los siguientes planos:

1. el que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y tiene a $(2, -1, 1)$ y $(1, 0, -1)$ como vectores directores;
2. el que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$ y $(1, 1, -2)$;
3. el que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y contiene a la recta de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z + 2 = 0, \\ x - y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 5.3.15 Para las dos cuaternas de puntos que aparecen a continuación, averiguar si existe algún plano que las contenga:

1. $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 0, 3)$, $(1, -1, 0)$;
2. $(0, -2, -1)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 10, 1)$, $(0, 0, 0)$.

En caso afirmativo, hallar una ecuación reducida de ese plano.

Ejercicio 5.3.16

1. Hallar ecuaciones reducidas para el plano α de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu, \\ y = 2 + \lambda + \mu, \\ z = -1 - \lambda - 2\mu. \end{cases} \tag{5.17}$$

2. Hallar nuevas ecuaciones paramétricas a partir de las ecuaciones reducidas encontradas en la parte anterior. A partir de cada conjunto de ecuaciones paramétricas identificar un punto en el plano y un par (U_i, V_i), $i = 1, 2$, de vectores directores.
3. Identificar vectores directores (U_3, V_3) a partir de las ecuaciones paramétricas (5.53).
4. Mostrar que cada uno de los vectores U_i y V_i, para $i = 1, 2, 3$, hallado en las partes anteriores puede escribirse de manera única como combinación lineal de cada una de las parejas (U_j, V_j), $j = 1, 2, 3$. Interpretar el resultado.

5.4. Intersecciones de rectas y planos

Las ecuaciones paramétricas y reducidas de rectas y planos permiten calcular las intersecciones entre rectas, entre planos, o entre rectas y planos. Mostramos a continuación algunos ejemplos y dejamos otros planteados en forma de ejercicios.

Ejemplo 93 Consideremos las rectas r y r' de ecuaciones reducidas

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 1, \\ 2x-y+z &=& 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} -x+2y+2z &=& -1, \\ -x-y+z &=& -1, \end{array}\right. \tag{5.18}$$

respectivamente. Nuestro objetivo es buscar la intersección $r\cap r'$ de ambas rectas, que está formada por los puntos que pertenecen a ambas. Como las ecuaciones reducidas de una recta cualquiera expresan condiciones equivalentes a que un punto (x,y,z) pertenezca a ella, tenemos que un punto (x,y,z) está en $r\cap r'$ si y sólo si satisface a la vez todas las ecuaciones que aparecen en (5.18). Por lo tanto sus coordenadas deben satisfacer el sistema

$$\left\{\begin{array}{rr} -x+2y+2z = & -1, \\ -x-y+z = & -1, \\ x+y-z = & 1, \\ 2x-y+z = & 0. \end{array}\right.$$

Ejercicio 5.4.1 Mostrar que el sistema tiene como única solución $x=1/3$, $y=1/6$, $z=-1/2$.

Luego de resolver el ejercicio, concluimos que la intersección $r\cap r'$ consiste del único punto $(1/3,1/6,-1/2)$ ♣

Ejemplo 94 En este ejemplo trataremos la misma intersección del ejemplo anterior, pero ahora expresando una de las rectas en forma paramétrica. Para esto escribamos la recta r' en forma paramétrica, haciendo $y=-\mu$. Obtenemos así las siguientes representaciones para r y r', respectivamente:

$$\left\{\begin{array}{rr} x+y-z = & 1, \\ 2x-y+z = & 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=1+4\mu, \\ y=-\mu, \\ z=3\mu. \end{array}\right.$$

Las coordenadas (x,y,z) de cualquier punto en $r\cap r'$ deben satisfacer las ecuaciones reducidas de r, y admitir una representación paramétrica proveniente de las ecuaciones de r'. Por lo tanto, el valor del parámetro μ para un punto de r' que además esté en r debe satisfacer las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ll} (1+4\mu)+(-\mu)-3\mu & =1, \\ 2(1+4\mu)-(-\mu)+3\mu & =0. \end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema encontramos $\mu=-1/6$. Sustituyendo este valor en las ecuaciones de r' obtenemos las coordenadas del punto de corte

$$x=1/3, \quad y=1/6, \quad z=-1/2,$$

que son justamente las que hallamos en el ejemplo anterior. ¡Menos mal! ♣

Ejemplo 95 Consideremos los planos π y π' de ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda-\mu, \\ y=-1-2\lambda+3\mu, \\ z=1-\lambda+\mu, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda+\mu, \\ y=1+\lambda+2\mu, \\ z=2\lambda-\mu, \end{array}\right.$$

Observar que π es el plano de los ejemplos 89 y 90. Hallemos $\pi \cap \pi'$.

Una posibilidad es buscar ecuaciones reducidas de los dos planos, y caracterizar la intersección como el conjunto de puntos que satisface ambas ecuaciones reducidas simultáneamente. Comenzaremos por proceder de esta manera.

En el ejemplo 90 habíamos encontrado que

$$x + z = 1$$

es una ecuación reducida de π. Encontrar la del plano π' es el objetivo del siguiente ejercicio, que el lector puede obviar en primera instancia, si confía en que el resultado es correcto.

Ejercicio 5.4.2 Verificar que $5x - 3y - z = -8$ es una ecuación reducida de π'.

Ahora estudiamos el sistema

$$\begin{cases} x + z = 1, \\ 5x - 3y - z = -8. \end{cases}$$

Lo escalerizamos de una manera no muy estándar pero eficiente, sumando a la segunda ecuación la primera para eliminar la tercera variable z. Obtenemos

$$\begin{cases} x + z = 1, \\ 6x - 3y = -7, \end{cases}$$

donde la x puede tomarse como variable libre. Se trata pues de un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad. Si llamamos λ a la variable libre, es decir, haciendo $x = \lambda$, resulta que la intersección $\pi \cap \pi'$ admite la descripción paramétrica

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = \frac{7}{3} + 2\lambda, \\ z = 1 - \lambda, \end{cases}$$

que nos permite identificarla como la recta que pasa por $(0, 7/3, 1)$, y tiene la dirección fijada por el vector $(1, 2, -1)$

No es necesario buscar las ecuaciones reducidas de los planos para calcular la intersección, ya que puede hallarse directamente a partir de las ecuaciones paramétricas. Un punto (x, y, z) está en la intersección si existen λ y ν tales que

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = -1 - 2\lambda + 3\mu, \\ z = 1 - \lambda + \mu, \end{cases}$$

y existen λ y μ tales que

$$\begin{cases} x = -1 + \alpha + \beta, \\ y = 1 + \alpha + 2\beta, \\ z = 2\alpha - \beta. \end{cases}$$

Pero hay que tener en cuenta un detalle: la primera pareja de valores λ y μ no tiene por qué coincidir con la segunda. Sólo estamos exigiendo que el punto (x, y, z) admita ambas representaciones paramétricas, no que los valores de los parámetros λ y μ para las dos representaciones de (x, y, z) coincidan. Como se trata de variables diferentes, usemos valores diferentes para designarlas. Los puntos (x, y, z) que están en la intersección son aquellos para los que existan valores λ, μ, α y β de los parámetros para los que se satisfaga

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda-\mu & =x= & -1+\alpha+\beta \\ -1-2\lambda+3\mu & =y= & 1+\alpha+2\beta \\ 1-\lambda+\mu & =z= & 2\alpha-\beta \end{array}\right.$$

Naturalmente, si encontramos valores λ, μ, α y β tales que se satisfagan simultáneamente las igualdades

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda-\mu & = & -1+\alpha+\beta, \\ -1-2\lambda+3\mu & = & 1+\alpha+2\beta, \\ 1-\lambda+\mu & = & 2\alpha-\beta, \end{array}\right. \tag{5.19}$$

habremos encontrado un punto de la intersección. Las coordenadas (x, y, z) del punto se calcular sustituyendo los valores de λ y ν en las ecuaciones paramétricas de π, o α y β en las de π'. Por lo tanto, para hallar la intersección todo lo que hay que hacer es resolver el sistema (5.19) para calcular los valores de los parámetros que corresponden a los puntos en la intersección, y luego recuperar los puntos de la intersección a partir de cualquiera de las ecuaciones paramétricas de los planos.

Reordenamos el sistema y obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda-\mu-\alpha-\beta & = & -1 \\ -2\lambda+3\mu-\alpha-2\beta & = & 2 \\ -\lambda+\mu-2\alpha+\beta & = & -1 \end{array}\right.$$

Escalerizando vemos que $\alpha = 2/3$, por tanto α queda determinada y β es variable libre. Volviendo a las ecuaciones paramétricas del plano π' encontramos que la intersección tiene ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1/3+\beta, \\ y=5/3+2\beta, \\ z=4/3-\beta, \end{array}\right.$$

en las que reconocemos a la recta que pasa por $(-1/3, 4/3, 4/3)$, y tiene la dirección del vector $(1, 2, -1)$. Se trata de una nueva representación paramétrica de la intersección $\pi \cap \pi'$.

Ejercicio 5.4.3

1. Completar los cálculos de la resolución del sistema (5.19).
2. Poner los parámetros λ y μ en función de β, y hallar una nueva parametrización de la intersección a partir de las ecuaciones paramétricas para el plano π.
3. Interpretar geométricamente el hecho de que el valor de la variable α haya quedado determinado.

♣

En los ejercicios que proponemos a continuación recurriremos a la figura de referirnos a planos y rectas a través de sus ecuaciones. Creemos que el abuso de lenguaje está justificado por la mayor brevedad de los enunciados. Ver la nota **??** al pie de la página **??**. Más adelante en el texto el lector volverá a encontrar este uso.

Ejercicio 5.4.4 Hallar la intersección de los siguientes planos:

$$2x - 3y + 4z = -2, \qquad \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu, \\ y = -1 - \lambda + 2\mu, \\ z = -2 - 2\lambda - \mu. \end{cases}$$

Ejercicio 5.4.5 Hallar la intersección del plano y la recta

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu, \\ y = -1 - \lambda + 2\mu, \\ z = -2 - 2\lambda - \mu. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha, \\ y = 1 - 2\alpha, \\ z = -1 - \alpha. \end{cases}$$

Ejercicio 5.4.6 Se consideran los planos

$$2x + y + z - 2 = 0, \quad \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 2\mu, \\ y = -3 + \lambda - \mu, \\ z = \lambda + \mu, \end{cases}$$

y las rectas

$$\begin{cases} x + y - 3z = -6, \\ x + 2y - 4z = -8, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = 4 + \lambda, \\ z = 1 - 3\lambda. \end{cases}$$

Hallar la intersección de cada una de las dos rectas con cada uno de los dos planos.

Ejercicio 5.4.7 PERSPECTIVA Podemos representar una escena tridimensional sobre un plano por medio de la siguiente construcción: el observador se supone ubicado en el punto

$$O = (0, -1, 0),$$

y cada punto

$$P = (x, y, z),$$

con $y > 0$, se proyecta en un punto que es la intersección de la recta OP con el plano $y = 0$. Este nuevo punto tendrá coordenadas $(X, 0, Z)$, donde X y Z dependen de las coordenadas (x, y, z) de P. Llamamos

$$\pi(P) = (X, Z),$$

y la correspondencia $P \mapsto \pi(P)$ define entonces una manera de representar el espacio en perspectiva.

1. Hallar las coordenadas (X, Z) de $\pi(P)$ en función de las coordenadas (x, y, z) de P.

2. ¿Cuál es la imagen por π de las rectas del semiespacio $y > 0$ que son paralelas al plano $y = 0$? En general, ¿cuál es el efecto de π actuando sobre cualquier plano paralelo a $y = 0$?

3. PUNTOS DE FUGA. Consideremos una recta r que no sea paralela al plano $y = 0$. Una vez fijada una de estas rectas hagamos tender al infinito[1] un punto P manteniéndolo sobre r y en el semiespacio $y > 0$. Mostrar que cuando P tiende al infinito $\pi(P)$ tiende a un punto del plano que sólo depende de la dirección de r. Llamaremos a este punto el **punto de fuga** correspondiente a esa dirección.

[1]Esto es lo mismo que decir que hacer tender a infinito el valor de la coordenada y, manteniéndonos sobre la recta.

4. LÍNEA DEL HORIZONTE. Hallar el conjunto formado por los puntos de fuga de las líneas horizontales.

Ejercicio 5.4.8 Para cada una de las ternas de planos π_1, π_2 y π_3 que se proponen a continuación, hallar la intersección $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ de los tres planos. En caso de que la intersección sea vacía , estudiar las intersecciones dos a dos. Interpretar geométricamente los resultados.

1. $y + z = 0$, $2x - y - 2z = 5$, $3x + 3y + 2z = 7$.
2. $x + 2y - z = 2$, $2x + y - 3z = 0$, $-2x - 4y + 2z = 3$.
3. $x - 2y + z = 5$, $x + z = 3$, $x + 4y + z = 0$.

Ejercicio 5.4.9 Dadas las rectas r y s de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda, \\ y = -3\lambda, \\ z = 2 - \lambda, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 1 - \lambda, \\ z = -1 - \lambda, \end{cases}$$

y el vector

$$W = (2, -3, 5)$$

hallar la recta t que es paralela a W y corta a r y a s.

1. Dar para t ecuaciones paramétricas y reducidas.
2. Hallar la intersección de t con r y de t con s.

Ejercicio 5.4.10 Para las rectas r y s del ejercicio 5.4.9 y el punto

$$P = (-1, -9/2, -3/2),$$

hallar la recta t que pasa por P y corta a r y a s.

1. Dar para t ecuaciones paramétricas y reducidas.
2. Hallar la intersección de t con r y de t con s.

Ejercicio 5.4.11 Dados la recta r de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 1 - \lambda, \\ z = 5 + 2\lambda, \end{cases}$$

el plano π de ecuación

$$3x + 4y + z = 164$$

y el punto

$$P = (-4, 7, -2),$$

hallar la recta s que pasa por P, es paralela a π y corta a r.

1. Dar para s ecuaciones paramétricas y reducidas.
2. Hallar la intersección de s con r.
3. Hallar los puntos de intersección de s con los planos O_{xy}, O_{xz} y O_{yz}.

Ejercicio 5.4.12 Hallar ecuaciones paramétricas de una recta que no corte a ninguno de los planos de ecuaciones

$$x + y + z = 1, \quad x - y = 3$$

y que pasa por el punto $(10, 11, 12)$

Ejercicio 5.4.13 Hallar ecuaciones reducidas de los planos que satisfacen las condiciones especificadas en cada caso:

1. contiene al punto $(1, 1, 1)$ y es paralelo a las rectas

$$\begin{cases} x = 4 - 5\lambda, \\ y = 5 + 4\lambda, \\ z = -2 + \lambda, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ z = 5. \end{cases}$$

2. Contiene a la intersección de los planos $5x - 2y - z = 3$ y $x + 3y - 2z = -5$, y es paralelo al vector $(7, 9, 17)$.

5.5. El producto escalar: longitudes, ángulos y perpendicularidad

Hemos introducido ecuaciones de rectas y planos a través de la representación de puntos y vectores en un sistema de coordenadas ortogonal en el espacio. En esta sección aparecerán en escena dos conceptos básicas de la geometría: las distancias y los ángulos. En nuestra presentación tendrá un lugar destacado la noción de *producto escalar* de dos vectores, un número asociado a cada pareja de vectores que puede calcularse con mucha facilidad a partir de sus expresiones en coordenadas. Veremos también cómo el producto escalar permite calcular longitudes de vectores, distancias entre puntos y ángulos entre vectores. En particular, nos permitirá reconocer relaciones de perpendicularidad.

A los efectos de hacer evidente la geometría de la situación haremos primero una discusión de todos estos conceptos en el plano $\mathbb{R}^2$. En la sección 5.5.2 discutiremos la extensión al espacio de dimensión tres $\mathbb{R}^3$. Aunque no exploraremos la geometría de espacios de más de tres dimensiones, vale la pena mencionar que todo es muy fácilmente generalizable a un espacio de dimensión cuatro, cinco o más.

5.5.1. Longitudes, ángulos, producto escalar: discusión preliminar en el plano

Cuando dibujamos el vector $\vec{U} = (u_1, u_2)$ en el plano coordenado, los números u_1 y u_2 identifican las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados. El vector queda representado por un segmento que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden u_1 y u_2, tal como se muestra en la figura 5.131

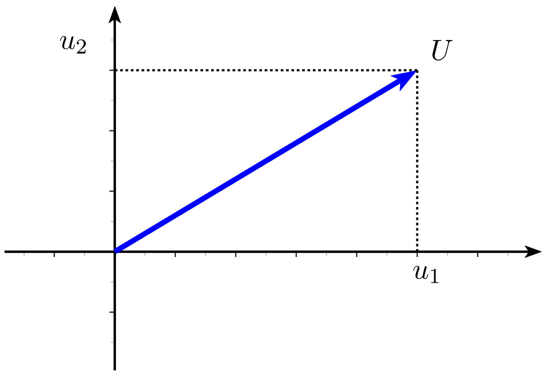


Figura 5.131

Indicaremos con la notación $|\vec{U}|$ la longitud del vector $\vec{U}$, a la que llamaremos también el *módulo* de $\vec{U}$.

Aplicando el viejo y querido Teorema de Pitágoras, concluimos que

$$|\vec{U}|^2 = u_1^2 + u_2^2. \tag{5.20}$$

Por lo tanto, el módulo $|\vec{U}|$ de un vector se puede calcular a partir de sus coordenadas como

$$|\vec{U}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}. \tag{5.21}$$

Ejercicio 5.5.1 Cuando u_1 o u_2 son menores o iguales que 0 la interpretación de estos números como longitudes de los catetos de un triángulo dejan de tener sentido, pero la fórmula (5.20) para la longitud de $\vec{U}$ sigue siendo válida. ¿Por qué?

Ejemplo 96 El vector $(5, 12)$ tiene un módulo igual a

$$|(5, 12)| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Ejercicio 5.5.2

1. Calcular el módulo de $(10, 24)$ y de $(-15, -36)$.

2. Encontrar otro vector de coordenadas enteras y módulo entero, que no sea un múltiplo entero de $(5, 12)$. ♣

A partir de la longitud de vectores en $\mathbb{R}^2$ podemos calcular la distancia entre dos puntos p y Q cualesquiera del espacio como la longitud del vector diferencia $Q - P$. Si

$$P = (x_P, y_P), \quad Q = (x_Q, y_Q),$$

tendremos entonces

$$d\,(P, Q) = |Q - P| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}, \tag{5.22}$$

donde $d(P, Q)$ representa la distancia de P a Q.

Ejemplo 97 En la figura representamos el cuadrado de lado 1 que tiene vértices

$$A = (1, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (2, 1) \quad D = (1, 1).$$

La diagonal AC tiene longitud igual a la distancia que separa los puntos A y C,

$$d(A, C) = |(2, 1) - (1, 0)| = |(1, 1)| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

El cálculo de la longitud de la otra diagonal es similar.

$$d(B, D) = |(2, 0) - (1, 1)| = |(1, -1)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Naturalmente, las dos diagonales del cuadrado tienen la misma longitud, el célebre número irracional $\sqrt{2}$. ♣

Ejemplo 98 Dado un punto $C = (a, b)$ en el plano y un número $r > 0$, la circunferencia $\mathcal{C}$ que tiene centro C y radio r es el conjunto formado por los puntos (x, y) del plano que están a distancia r de C. Es decir, los puntos para los que se satisface

$$d\,((x, y), (a, b)) = |(x - a, y - b)\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r.$$

Como habíamos escogido $r > 0$ y las distancias nunca pueden ser negativas, la ecuación es equivalente a

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \tag{5.23}$$

que se obtiene elevando al cuadrado ambos miembros de la última igualdad. Concluimos así que la ecuación (5.23) caracteriza a todos los puntos que están sobre la circunferencia de centro (a, b) y radio r.

Ejercicio 5.5.3 Si en la ecuación (**??**) se toma $r = 0$ en vez de $r > 0$, ¿qué puntos la satisfacen? ♣

Ejercicio 5.5.4 Dados los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (1, 0)$, ubicar en el plano un punto C de modo que el triángulo ABC sea equilátero.

Ejercicio 5.5.5 Hemos definido la distancia entre P e Q como la longitud del vector $Q - P$. La distancia entre Q y P es entonces la longitud de $Q - P$. ¿Qué relación guardan entre sí estas dos distancias? Demostrar esta relación a partir de la fórmula (5.22) para la distancia entre dos puntos P e Q.

Nuestro próximo objetivo es introducir el producto escalar entre dos vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$. Comenzamos por dar la definición y a continuación discutimos el por qué de la definición y su sentido geométrico.

Definición 8 *Dados dos vectores*

$$\vec{U} = (u_1, u_2), \quad \vec{V} = (v_1, v_2),$$

en $\mathbb{R}^2$*, definimos su producto escalar* $\vec{U} \cdot \vec{V}$ *por la expresión*

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2. \tag{5.24}$$

Para mostrar el sentido geométrico de esta definición consideraremos en el plano (x, y) los puntos

$$P = O + \vec{U}, \quad Q = O + \vec{V},$$

donde $O = (0, 0)$ es el origen de coordenadas del plano. En la figura 5.132 representamos los puntos P y Q, los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ y al vector diferencia

$$Q - P = (O + \vec{V}) - (O + \vec{U}) = \vec{V} - \vec{U} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2).$$

. El triángulo OPQ tiene lados longitudes

$$a = d(P, O) = |\vec{U}|, \quad b = d(Q, O) = |\vec{V}|, \quad c = |\vec{V} - \vec{U}|.$$

Desarrollaremos los cálculos en la expresión (5.22) de $|\vec{V} - \vec{U}|$. Para evitar la raíz cuadrada trabajaremos con su cuadrado:

$$|\vec{V} - \vec{U}|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2. \tag{5.25}$$

Simplemente desarrollando los cuadrados y ordenando convenientemente los términos, podemos transformar (5.25) en

$$|\vec{V} - \vec{U}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2(u_1 v_1 + u_2 v_2). \tag{5.26}$$

Los dos primeros sumandos suman el cuadrado del módulo de $\vec{U}$, el tercero y el cuarto el cuadrado del módulo de $\vec{V}$. En el último sumando del miembro de la derecha aparece el producto escalar $\vec{U} \cdot \vec{V}$ Por lo tanto

$$|\vec{V} - \vec{U}|^2 = |\vec{U}|^2 + |\vec{V}|^2 - 2\vec{U} \cdot \vec{V}. \tag{5.27}$$

En este punto, vamos a recordar el Teorema del Coseno. Una generalización del Teorema de Pitágoras que establece la igualdad

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$$

para el el triángulo OPQ, donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$. Escribiendo lo mismo, pero con la notación de módulos de vectores, el Teorema del Coseno viene a decirnos que

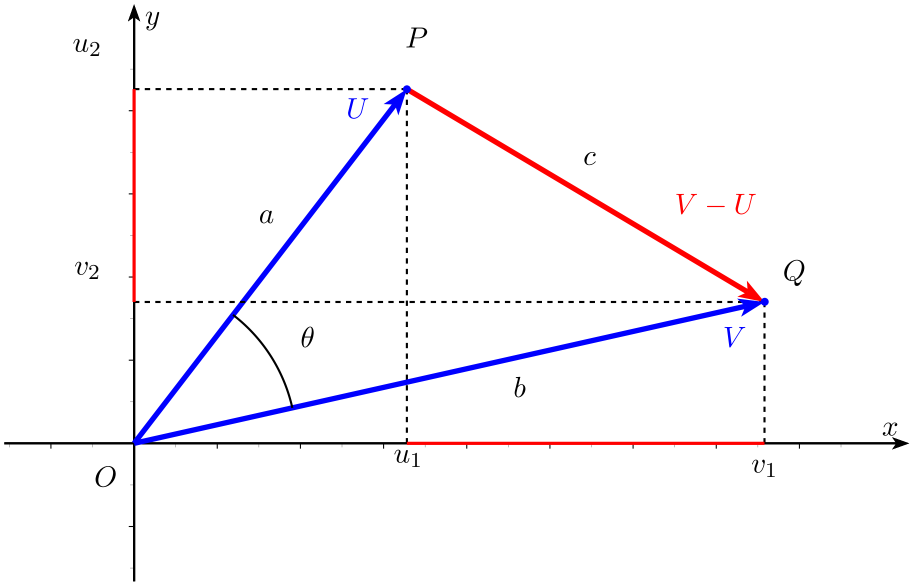


Figura 5.132

$$|\vec{V}-\vec{U}|^2 = |\vec{U}|^2 + |\vec{V}|^2 - 2|\vec{U}||\vec{V}|\cos\theta. \tag{5.28}$$

De la comparación de (5.27) con (5.28) surge que

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = |\vec{U}||\vec{V}|\cos\theta. \tag{5.29}$$

La sencilla expresión algebraica (5.24) resulta tener un significado geométrico muy importante.

Ejemplo 99 El factor $\cos\theta$ puede tomar valores entre -1 y 1. Es igual a 1 cuando el coseno del ángulo θ vale cero. Esta situación corresponde a dos vectores colineales que tienen el mismo sentido. Ver la figura 5.133

Mientra $0 < \theta < \pi/2$ el coseno es positivo. Eso corresponde a situaciones como las que se esquematiza en la figura 5.134 en las que la proyección de $\vec{V}$ sobre $\vec{U}$ tiene el mismo sentido que $\vec{U}$ (un comentario análogo puede hacerse respecto a la proyección de $\vec{U}$ sobre $\vec{V}$). Es notable el caso en que los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ son ortogonales, como se muestra en la figura 5.135: entonces $\theta = \pi/2$ y $\vec{U}\cdot\vec{V} = 0$, de modo que el producto escalar caracteriza la ortogonalidad entre vectores.

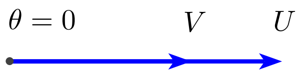


Figura 5.133

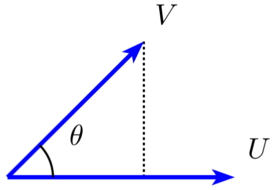


Figura 5.134

Cuando $\pi/2 < \theta < \pi$ el coseno del ángulo es negativo. La relación que hay entre los vectores es la que aparece en la figura 5.136

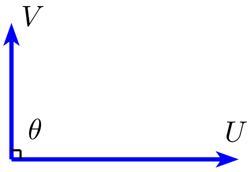


Figura 5.135

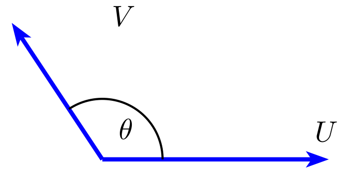


Figura 5.136

Por último, el caso $\theta = \pi$ es el de dos vectores colineales con sentido opuesto: un vector es múltiplo del otro con una constante negativa.

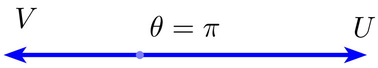


Figura 5.137

Observación 47 Cuan $\vec{U}$ y $\vec{V}$ son ortogonales el producto escalar es nulo, los vectores son ortogonales, el triángulo OPQ es rectángulo, el Teorema del Coseno se reduce al Teorema de Pitágoras y tenemos la igualdad

$$|V - U|^2 = |U|^2 + |V|^2$$

que puede verse como una expresión del Teorema de Pitágoras en términos del módulo de vectores.

Ejercicio 5.5.6 Mostrar que cuando U y V son ortogonales, también se cumple

$$|U + U|^2 = |U|^2 + |V|^2. \tag{5.30}$$

La expresión (5.30) para la suma de dos vectores ortogonales también puede verse como una versión del Teorema de Pitágoras. Identificar cuál es el triángulo sobre el que hay que razonar en este caso. ♠ ♣

Observación 48 El módulo de un vector $\vec{U}$ puede expreserse a partir del producto escalar como

$$|\vec{U}| = \sqrt{\vec{U} \cdot \vec{U}}.$$

Vemos entonces que nociones geométricas básicas como la longitud de los vectores y la distancia entre puntos pueden calcularse a partir del producto escalar. En realidad, toda la geometría del plano y euclidiano puede derivarse del producto escalar y su sencilla fórmula. ♠

Ejemplo 100 Consideremos en el plano los vectores $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

Su producto escalar es

$$(1, 0) \cdot (1, 1) = 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1.$$

Sus módulos son

$$|(1, 0)| = \sqrt{1} = 1, \quad |(1, 1)| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

De acuerdo con la fórmula (5.29) el ángulo θ entre estos dos vectores debe satisfacer

$$1 = 1 \times \sqrt{2} \cos\theta,$$

por lo tanto,

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El ángulo θ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ que satisface esta igualdad es $\theta = \pi/4$. Este valor refleja el hecho de que los vectores $(1, 0)$ y $(1, 1)$ son, respectivamente, un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, ver la figura 5.138. ♣

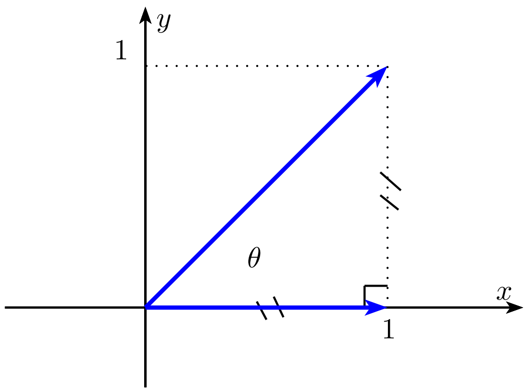


Figura 5.138

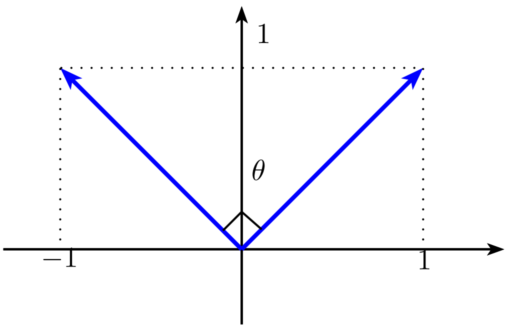
Ejemplo 101 El producto escalar entre los vectores $(1, 1)$ y $(-1, 1)$ es

$$1 \times (-1) + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0.$$

El valor del coseno del ángulo θ entre estos vectores tiene que ser nulo, por lo que

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

y los dos vectores resultan ser perpendiculares. ♣



Los ejemplos 99 y 101 muestran que la perpendicularidad puede caracterizarse por el producto escalar. Si el producto escalar $\vec{U} \cdot \vec{V}$ de dos vectores nulos $\vec{U}$ y $\vec{V}$ es nulo, entonces el valor que corresponde al ángulo entre los dos vectores es $\theta = \pi/2$ y son vectores perpendiculares. Cuando alguno de ellos es nulo, el producto escalar es necesariamente cero. En este caso no podemos definir un ángulo, pero no hay inconveniente en declarar al vector nulo como un vector *perpendicular* u *ortogonal* a todos los vectores del espacio. El vector nulo adquiere así la curiosa característica de ser a la vez ortogonal y colineal con cualquier otro vector, pero esto no debe causarnos ninguna dificultad: el cero en el campo numérico y el vector nulo en el conjunto de los vectores son entes muy particulares.

En la próximo sección, veremos cómo el producto escalar se generaliza del conjunto $\mathbb{R}^2$ de los vectores en el plano al conjunto $\mathbb{R}^3$ de los vectores en el espacio. Aunque la geometría del espacio tridimensional pueda parecernos mucho más compleja, la sencilla fórmula (8) que define el producto escalar puede generalizarse casi sin esfuerzo a vectores con tres componentes, simplemente agregando un sumando más.

5.5.2. El producto escalar en $\mathbb{R}^3$ y su geometría

Nuestra primera definición simplemente generaliza la definición para vectores de $\mathbb{R}^2$.

Definición 9 *Dados dos vectores*

$$\vec{U} = (u_1, u_2, u_3) \quad \vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$$

en $\mathbb{R}^3$*, definimos su producto escalar* $\vec{U} \cdot \vec{V}$ *por la expresión*

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \tag{5.31}$$

Ejemplo 102 El producto escalar entre

$$\vec{U} = (5, 9, 2), \quad \vec{V} = (1, -1, 2),$$

es

$$5 \times 1 + 9 \times (-1) + 2 \times 2 = 5 - 9 + 4 = 0.$$

Como veremos a más adelante, en el ejemplo 106, los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ son ortogonales. ♣

El producto escalar de un vector $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)$ por sí mismo es

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \tag{5.32}$$

Este número es mayor o igual que cero, y solo es cero cuando $\vec{U}$ es el vector nulo $(0, 0, 0)$. Aplicando dos veces el Teorema de Pitágoras a dos triángulos diferentes ubicados en dos planos diferentes, no es demasiado complejo ver que $\vec{U} \cdot \vec{U}$ es el cuadrado de la longitud del vector $\vec{U}$. Ver la figura 5.139, que muestra el vector $\vec{U}$ como la diagonal OP de un paralelepípedo de lados u_1, u_2 y u_3 en el espacio.

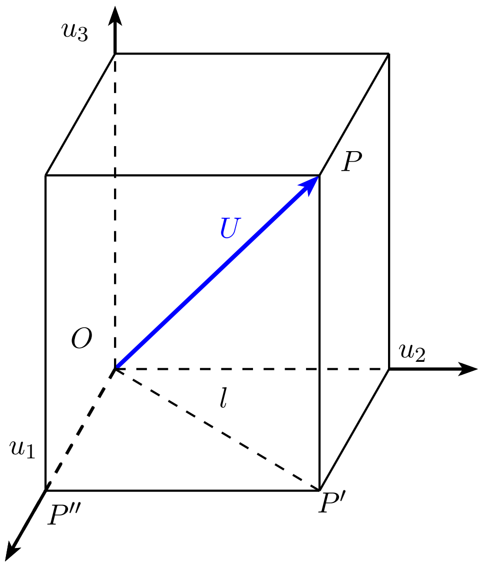


Figura 5.139

Una primera aplicación del Teorema de Pitágoras al triángulo $O'P''P'$ implica que la diagonal OP' de la base tiene una longitud l que satisface

$$l^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

Una segunda aplicación al triángulo $OP'P$ implica

$$|OP|^2 = l^2 + u_3^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Indicaremos con $|\vec{U}|$ la longitud del vector $\vec{U}$, de modo que podemos escribir

$$|\vec{U}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{\vec{U} \cdot \vec{U}}. \tag{5.33}$$

Ejemplo 103 Consideremos el vector

$$\vec{U} = (4, -1, 8).$$

El producto $\vec{U} \cdot \vec{U}$ es

$$|\vec{U}|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 8^2 = 16 + 1 + 64 = 81,$$

de modo que

$$|\vec{U}| = 9.$$

Ejercicio 5.5.7 Hallar todos los vectores colineales con $\vec{U}$ que tienen módulo 1 ♣

Igual que para el caso del producto escalar en el plano, es válida la igualdad

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}||\vec{V}| \cos \theta. \tag{5.34}$$

La razón es que el mismo análisis geométrico basado en el Teorema del Coseno que hicimos para el caso plano, puede hacer en un plano que contenga las direcciones de $\vec{U}$ y $\vec{V}$.

Si $\vec{U}$ y $\vec{V}$ son vectores no nulos, podemos calcular el ángulo entre ellos como el único valor de θ que hace que

$$\cos \theta = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{|\vec{U}||\vec{V}|}. \tag{5.35}$$

Si $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$ diremos que los vectores son *ortogonales*. Observemos que en el caso de vectores no nulos el ángulo entre ellos $\pi/2$, y esta noción de ortogonalidad coincide con la habitual de perpendicularidad.

Ejemplo 104 Consideremos $X = (\sqrt{3}, 1, 0)$ y determinemos los valores que la expresión 5.35 arroja para el ángulo con los tres vectores coordenados

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Comencemos por observar que

$$|X| = \sqrt{3 + 1 + 0} = 2.$$

Los vectores e_i, $i = 1, 2, 3$, tienen módulo 1, por lo que el producto de los módulos es igual a 2 en todos los casos. Los productos escalares dan

$$X \cdot e_1 = \sqrt{3}, \quad X \cdot e_2 = 1, \quad X \cdot e_3 = 0.$$

Los ángulos θ_i entre X y e_i deben satisfacer entonces

$$\cos \theta_1 = \sqrt{3}/2, \quad \cos \theta_2 = 1/2, \quad \cos \theta_3 = 0,$$

de lo que deducimos

$$\theta_1 = \pi/6, \quad \theta_2 = \pi/3, \quad \theta_3 = \pi/2.$$

Estos valores confirman que la definición de ángulo que hemos dado es razonable. ♣

Ejemplo 105 Los vectores

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1),$$

son vectores de módulo uno. Son, respectivamente, vectores directores de los ejes coordenados Ox, Oy y Oz, que apuntan en el sentido positivo de los ejes. Es fácil verificar que

$$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = 0.$$

Esta propiedad muestra que la noción de ortogonalidad asociada con el producto escalar es consistente con nuestra visión geométrica de las ternas de números de $\mathbb{R}^3$ como las coordenadas de vectores, referidas a un sistema de ejes perpendiculares. ♣

Ejemplo 106 Los vectores $(5, 0, 2)$ y $(1, -1, 2)$, del ejemplo 102, página 225, son ortogonales. ♣

Ejercicio 5.5.8 Hallar el valor del ángulo entre las siguientes parejas de vectores en el espacio:

1. $(1,1,0)$ y $(1,0,0)$;
2. $(1,0,0)$ y $(-1,2,3)$;
3. $(1,1,-2)$ y $(1,1,1)$.

Ejercicio 5.5.9 Mostrar que para cualquier vector $\vec{U}=(u_1,u_2,u_3)$ el vector $\vec{V}=(u_2,-u_1,0)$ es perpendicular a $\vec{U}$. Interpretar geométricamente este nuevo vector.

Ejercicio 5.5.10 Calcular el ángulo que forma un vector no nulo X consigo mismo y con $-X$.

Ejercicio 5.5.11 Hallar todos los vectores que son ortogonales a $\vec{U}=(1,2,-1)$.

Ejercicio 5.5.12

1. Mostrar que los vectores
$$\vec{V}=(2,-1,0), \quad \vec{W}=(1,0,1),$$
son vectores no colineales y ortogonales al vector $\vec{U}$ del ejercicio 5.5.11.
2. Mostrar que punto $Q=(x,y,z)$ pertenece al plano de ecuaciones
$$\left\{\begin{array}{rl} x= & 2+2\mu+\nu,\\ y= & 3-\mu,\\ z= & -1+nu, \end{array}\right.$$
si y solo si el vector $(x-2,y-3,z+1)$ es ortogonal a $\vec{U}$.
3. Interpretar geométricamente los resultados de las partes anteriores.

Ejercicio 5.5.13 Hallar todos los vectores que son ortogonales a $\vec{U}=(1,2,-1)$ y a $\vec{V}=(2,1,0)$

Ejercicio 5.5.14 Hallar la normal común a las rectas de ecuaciones reducidas
$$\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda,\\ y=1+\lambda,\\ z=-5, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda,\\ y=3+2\lambda,\\ z=2-\lambda, \end{array}\right.$$
Calcular la distancia entre las dos rectas. Sugerencia: en el ejercicio5.4.9 se construyó una recta que tenía una dirección dada y cortaba dos rectas conocidas.

La siguiente proposición recoge y sistematiza algunas propiedades básicas del producto escalar que se desprenden directamente de su definición, y que usaremos libremente en lo sucesivo.

Proposición 17 *Sean $\vec{U}$, $\vec{V}$ y W vectores de $\mathbb{R}^3$, y α un número real cualquiera. Entonces el producto escalar satisface las propiedades*

- No negatividad y no degeneración: $\vec{U}\cdot\vec{U}\geq 0$ *y* $\vec{U}\cdot\vec{U}=0$ *si y sólo si* $\vec{U}$ *es el vector nulo;*
- Linealidad respecto a la primera variable:
  - $(\vec{U}+\vec{V})\cdot W=\vec{U}\cdot W+\vec{V}\cdot W$;

    - $(\alpha\vec{U})\cdot\vec{V} = \alpha(\vec{U}\cdot\vec{V})$;

- SIMETRÍA: $\vec{U}\cdot\vec{V} = \vec{V}\cdot\vec{U}$.

Ejercicio 5.5.15

1. Demostrar la proposición 17 .
2. Demostrar también que el producto escalar $\vec{U}\cdot\vec{V}$ también depende linealmente del vector $\vec{V}$.
3. Mostrar que el producto escalar del vector nulo O con cualquier otro vector del espacio es igual a 0 y que es el único vector del espacio que tiene esta propiedad.

Ejercicio 5.5.16

1. Consideremos los vectores $u = (2,-1,-1)/3$, $v = (1,-2,1)$. Hallar $|u|$, $|v|$ y el ángulo entre u e v.
2. Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Hallar $|v|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es igual a $\pi/4$, $|u| = 3$ y que $u - v$ es perpendicular a u.
3. Hallar $|v|$ y $|u+v|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es $\pi/4$, que $|u| = 3$ y que el ángulo entre $u+v$ y u es igual a $\pi/6$.
4. ¿Es cierto que si v es un vector no nulo entonces la igualdad $u\cdot v = w\cdot v$ implica $u = w$? ¿Qué puede decirse de $u - w$?

Ejercicio 5.5.17

1. Hallar el ángulo que forman dos diagonales en el cubo.
2. Se consideran cuatro puntos coplanares A, B, C y D. Hallar la condición necesaria y suficiente sobre las longitudes de los lados del cuadrilátero $ABCD$ para que las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ sean perpendiculares.
3. Sea $ABCD$ un tetraedro.
    a) Probar que $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$
    b) Si además $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{CB}$, probar que $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$.

5.5.3. Ejercicios adicionales

Ejercicio 5.5.18 PRODUCTOS NOTABLES.
Sean X e Y vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Demostrar que se satisfacen las igualdades

1. $|X+Y|^2 = |X|^2 + |Y|^2 + 2X\cdot Y$;
2. $(X+Y)\cdot(X-Y) = |X|^2 - |Y|^2$.

Ejercicio 5.5.19 REGLA DEL PARALELOGRAMO
Sean X e Y dos vectores cualesquiera. Probar que

$$\frac{1}{2}\left(|X+Y|^2 + |X-Y|^2\right) = |X|^2 + |Y|^2.$$

Interpretar geométricamente este resultado.

Ejercicio 5.5.20

1. Sean X e Y dos vectores cualesquiera. Probar que $X \cdot Y$ está determinado conociendo $|X|$, $|Y|$ y $|X+Y|$. Mostrar que también queda determinado conociendo $|X|$, $|Y|$ y $|X-Y|$.

2. Si $|X| = 3$, $|Y| = 4$ y $|X+Y| = 5$, hallar $X \cdot Y$ y el ángulo entre los vectores X e Y. Repetir para $|X| = 3$, $|Y| = 4$ y $|X-Y| = 5$.

3. Para el caso en que $|X| = |Y| = |X-Y| = 1$, hallar $X \cdot Y$ y el ángulo entre los vectores X e Y.

Proposición 18 *Sean $\vec{U}$ y $\vec{V}$ vectores en $\mathbb{R}^3$, y α un número real cualquiera. Entonces el módulo $|\cdot|$ satisface las propiedades*

1. NO NEGATIVIDAD Y NO DEGENERACIÓN: $|\vec{U}| \geq 0$ *y* $|\vec{U}| = 0$ *si y sólo si* $\vec{U}$ *es el vector nulo del espacio.*

2. HOMOGENEIDAD: $\alpha X = |\alpha||X|$.

3. DESIGUALDAD TRIANGULAR: $|X+Y| \leq |X| + |Y|$.

Ejercicio 5.5.21 Demostrar la proposición anterior. Si se desea demostrar la propiedad triangular usando las propiedades del producto escalar, puede ser útil considerar $|X+Y|^2$ y que la igualdad (5.34) implica

$$|\vec{U} \cdot \vec{V}| \leq |\vec{U}||\vec{V}|.$$

5.6. Perpendicularidad y ecuaciones de planos

Por cada punto de un plano α pasa una única recta perpendicular a α. Todas las perpendiculares a α son paralelas entre sí. De este modo, cada plano define una dirección ortogonal a él en el espacio, que puede caracterizarse por cualquier vector $\vec{N}$ no nulo en esa dirección. Diremos que el vector $\vec{N}$ es un vector normal al plano α. A su vez, fijamos un punto cualquiera P_0 en α, un segundo punto pertenecerá a α si y solo si el vector $P - P_0$ es ortogonal a $\vec{N}$. En esta sección veremos que la ecuación reducida de un plano puede interpretarse como la expresión por medio del producto escalar de está condición de ortogonalidad entre vectores. Esta interpretación nos permitirá calcular con facilidad la proyección sobre un plano dado de cualquier punto del espacio.

5.6.1. El producto escalar y la ecuación del plano

Vamos a comenzar por analizar las ideas principales de esta sección en un ejemplo.

Ejemplo 107 En el ejemplo 91, página 211 de la sección 5.3 consideramos el plano α de ecuación reducida

$$2x + 3y - z + 4 = 0. \tag{5.36}$$

Es fácil ver que $P_0 = (2, -1, 5)$ es un punto de α. En efecto, sustituyendo sus coordenadas en (5.36) encontramos

$$2 \times 2 + 3 \times (-1) - 1 \times 5 + 4 = 0. \tag{5.37}$$

Cuando restamos de la ecuación (5.36) que caracteriza a cualquier punto del plano la ecuación (5.37) que corresponde a un punto en particular, obtenemos

$$2(x - 2) + 3(y + 1)) - (z - 5) + 4 = 0. \tag{5.38}$$

Observemos que

$$(x - 2, y + 1, z - 5)$$

es el vector $\vec{P_0P}$ desde el punto $P_0 = (2, -1, 5)$ a un punto genérico $P = (x, y, z)$ en el plano. Podemos interpretar entonces el miembro de la izquierda como el producto escalar de $\vec{P_0P}$ con el vector $(2, 3, -1)$ y escribir (5.38) en la forma

$$(2, 3, -1) \cdot (x - 2, y + 1, z - 5) = 0.$$

El vector $(2, 3, -1)$ es ortogonal a cualquier vector paralelo al plano. Diremos entonces que

$$\vec{N} = (2, 3, -1)$$

es un *vector normal* al plano.

Ejercicio 5.6.1 Encontrar otro vector normal al plano α. Encontrar todos los vectores normales al plano α que tienen módulo 1.

Cuando en el ejemplo 91 estudiamos el plano α encontramos que admite las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = \mu, \\ z = 4 + 2\lambda + 3\mu, \end{cases} \tag{5.39}$$

lo que implica que los vectores

$$\vec{U} = (1, 0, 2), \qquad \vec{V} = (0, 1, 3),$$

son vectores directores del plano. Un cálculo directo muestra que ambos son ortogonales a $\vec{N}$:

$$(2, 3, -1) \cdot (1, 0, 2) = 0, \qquad (2, 3, -1) \cdot (0, 1, 3) = 0.$$

Observación 49 La condición de ortogonalidad entre los vectores directores y los vectores normales a un plano provee una buena estrategia de verificación cuando se pasa de ecuaciones paramétricas o reducidas y viceversa: los vectores directores de la forma paramétrica deben ser ortogonales al vector normal que se lee en los coeficientes de la ecuación reducida. Si además el punto base de la ecuación paramétrica verifica la ecuación reducida, entonces la ecuación reducida y las ecuaciones paramétricas representan al mismo plano.

Ejercicio 5.6.2 Las ecuaciones paraméticas (5.39) tiene al punto $P_1 = (0, 0, 4)$ como punto base del plano α. Verificar que el vector diferencia

$$P_1 - P_0 = (0, 0, 4) - (2, -1, 5)$$

es ortogonal al vector normal al plano. Escribir $P_1 - P_0$ como combinación lineal de los vectores directores $\vec{U}$ y $\vec{V}$. ¿Qué relación guardan los coeficientes de la combinación lineal con los valores μ y ν de los parámetros que permiten obtener de las ecuaciones (5.39) las coordenadas de P_0? ♠ ♣

El razonamiento que presentamos en el ejemplo 107 es completamente general. Toda ecuación de la forma

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{5.40}$$

con alguno de los coeficientes a, b o c no nulo, representa un plano α en $\mathbb{R}^3$ y cualquier plano en $\mathbb{R}^3$ puede representarse por medio de una ecuación de este tipo. Las coordenadas de cualquier punto particular $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ en α satisfacen

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \tag{5.41}$$

Restando (5.41) de (5.40) encontramos que cualquier punto

$$P = (x, y, z)$$

en α debe satisfacer

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Encontramos así que el vector

$$\vec{N} = (a, b, c)$$

de los coeficientes de la ecuación, es ortogonal a cualquier vector que se obtenga como la diferencia de dos puntos en el plano α. En particular, este vector es ortogonal a cualquier pareja de vectores directores del plano. Es corriente llamar N al vector (a, b, c), y decir que es un *vector normal* al plano α. Todavía podemos escribir en forma más concisa la ecuación del plano, como

$$N \cdot (P - P_0) = 0, \tag{5.42}$$

donde $P(x, y, z)$ es un punto genérico del plano y $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto particular que hemos escogido como base. ♣

Ejemplo 108 El plano α de los ejemplos 89 y 90, en las páginas 210 y 211 respectivamente, tiene como ecuación reducida

$$x + z = 1.$$

Por tanto un vector normal a α es

$$\vec{N} = (1, 0, 1).$$

El punto

$$P_0 = (1, 0, 0)$$

pertenece al plano. La ecuación del plano puede escribirse entonces como

$$(1, 0, 1) \cdot (x - 1, y, z) = 0.$$

Dos vectores directores de α plano son

$$U = (1, -2, -1), \quad V = (-1, 3, 1).$$

Verifiquemos que se cumple que N es ortogonal a U y a V. Para eso calculamos

$$\begin{aligned} U \cdot N &= (1, -2, -1) \cdot (1, 0, 1) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0, \\ V \cdot N &= (-1, 3, 1) \cdot (1, 0, 1) = -1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Encontramos que, efectivamente, se cumplen las condiciones de ortogonalidad entre $\vec{N}$ y $\vec{U}$ y entre $\vec{N}$ y $\vec{V}$. ♣

Ejercicio 5.6.3 La ecuación reducida de un plano no es única. Dada una ecuación del plano, al multiplicarla por cualquier constante no nula se convierte en otra ecuación qué representa el mismo plano. ¿Cómo afecta esta operación al vector normal formado por los coeficientes de la ecuación?

Ejercicio 5.6.4 Volver a los ejercicios 5.3.14, 5.3.15 y 5.3.16, en la página 212. Para cada uno de los planos que se construyeron en esos ejercicios encontrar un vector normal y una pareja de vectores directores. Verificar que el vector normal es perpendicular a los vectores directores.

Haber identificado un vector normal al plano permite caracterizar la perpendicularidad entre rectas y planos: una recta y un plano son *perpendiculares* si cualquier vector normal al plano y cualquier vector director de la recta son colineales.

Ejercicio 5.6.5 Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de la recta r que es perpendicular al plano de ecuación

$$x - 2y + z = 0$$

y pasa por el punto $(3, -2, 5)$. Determinar la intersección de r con el plano.

Ejercicio 5.6.6 Hallar la ecuación del plano α que pasa por el punto $P = (-1, 5, 6)$ y es perpendicular a la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \lambda, \\ z = 4 + 3\lambda, \end{cases}$$

Determinar ecuaciones paramétricas y reducidas de la recta s que es la perpendicular a r por P.

5.6.2. Proyección de un punto sobre un plano

Dado un conjunto C de puntos y un punto Q que no pertenece a él, es en muchos casos natural preguntarse cuál o cuáles de los puntos de C es el más cercano a Q. Cuando C es un plano hay un único punto más cercano, que es la proyección de Q sobre el plano. En esta sección vamos a estudiar cómo construir esta proyección y cómo calcular la distancia de Q al plano.

Ejemplo 109 Vamos a buscar el punto Q' del plano α de ecuación

$$2x + 3y - z + 4 = 0$$

más próximo al punto $Q = (-3, -7, 5)$, que no pertenece a α.

La idea que usaremos para encontrar Q' es trazar la recta perpendicular a α por Q y cortarla con el plano. Como punto base para esta recta usaremos el propio Q. La dirección está dada por el vector normal al plano,

$$\vec{N} = (2, 3, -1),$$

que tomaremos como vector director de la recta. Un juego de ecuaciones paramétricas es entonces

$$\begin{cases} x = -3 + 2\lambda, \\ y = -7 + 3\lambda, \\ z = 5 - \lambda. \end{cases}$$

El punto Q' debe satisfacer la ecuación del plano, de modo que

$$2(-3 + 2\lambda) + 3(-7 + 3\lambda) - (5 - \lambda) + 4 = 0.$$

Haciendo los cálculos y ordenando la expresión encontramos la ecuación

$$-28 + 14\lambda = 0, \tag{5.43}$$

de donde despejamos $\lambda = 2$ para construir

$$Q' = (-3, -7, 5) + 2(2, 3, -1) = (1, -1, 3).$$

Observación 50 Como siempre, podemos verificar que Q' efectivamente pertenezca al plano sustituyendo sus coordenadas en la ecuación

$$2 \times 1 + 3 \times (-1) - 3 + 4 = 0.$$

Además, si Q' es la proyección de Q sobre el plano, el vector

$$Q - Q' = (-3, -7, 5) - (1, -1, 3) = (-4, -6, 2)$$

debe ser colineal con el vector normal al plano. Como

$$(-4, -6, 2) = (-2) \times (2, 3, -1)$$

también esta condición de colinealidad se satisface.

En realidad, estas dos condiciones son suficientes para asegurar que Q' es la proyección de Q sobre α, de modo que podemos estar seguros de que nuestro resultado es correcto. Es conveniente hacer estas dos verificaciones siempre que haya que calcular una proyección de un punto sobre un plano. ♠

El punto Q' es el punto del plano más próximo a Q, de modo que la distancia de $d(Q,\alpha)$ entre el punto Q y el plano α es

$$d(Q,\alpha) = d(Q,Q') = |Q - Q'| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

Ejercicio 5.6.7 Tomar un punto P cualquiera del plano α diferente a Q' y verificar que su distancia a Q es mayor que la distancia de Q' a Q. Verificar que

$$|Q - P|^2 = |Q - Q'|^2 + |Q' - P|^2.$$

¿Por qué se satisface esa igualdad? ♣

Todo el cálculo que en el ejemplo 109 presentamos para un caso particular, puede hacerse de manera general, escribiendo la ecuación del plano en la forma vectorial

$$N \cdot (P - P_0)$$

y usando una expresión vectorial

$$P = Q + \lambda N \tag{5.44}$$

para la perpendicular por Q al plano. Cuando la expresión (5.44) se sustituye en la ecuación del plano obtenemos

$$(Q + \lambda N - P_0) \cdot N = 0,$$

que puede escribirse en la forma

$$0 = (Q - P_0 + \lambda N) \cdot N = (Q - P_0) \cdot N + \lambda N \cdot N = (Q - P_0) \cdot N + \lambda |N|^2.$$

Esta ecuación permite despejar λ como

$$\lambda = -\frac{(Q - P_0) \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|^2}$$

y escribir

$$Q' = Q - \frac{(Q - P_0) \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|^2} \vec{N}. \tag{5.45}$$

Ejemplo 110 Usaremos la fórmula (5.45) para calcular la proyección O' del origen

$$O = (0,0,0)$$

sobre el plano de ecuación

$$x + y + z = 1.$$

Un punto P_0 del plano es $P_0 = (1,0,0)$. Entonces

$$O - P_0 = (-1,0,0).$$

Un vector normal es

$$\vec{N} = (1,1,1).$$

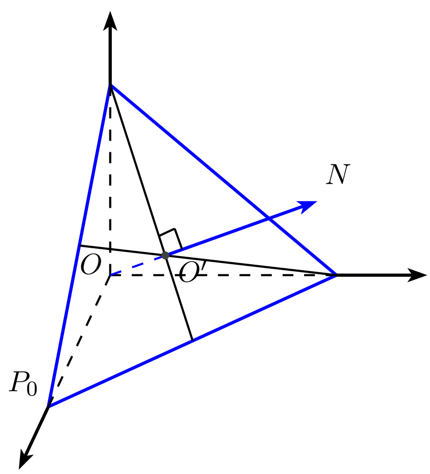


Figura 5.140

Por lo tanto $|\vec{N}|^2 = 3$. Calculamos

$$(O - P_0) \cdot N = -1,$$

de modo que

$$O' = O + \frac{1}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

La figura 5.140 muestra esta proyección.

Ejercicio 5.6.8 Proyectar sobre el mismo plano el punto $(2, 1, 1)$ ♣

Ejercicio 5.6.9 El plano α de ecuación

$$2x + 3y - z + 4 = 0$$

con el que trabajamos en el ejemplo 109 contiene al punto $P_0 = (0, 0, 4)$. Determinar un vector $\vec{N}$ normal al plano. Para el punto $Q = (-3, -7, 5)$, calcular

$$Q - P_0, \quad (Q - P_0) \cdot \vec{N}, \quad |\vec{N}|,$$

y usar la fórmula (5.45) para determinar su proyección Q' sobre α.

En la fórmula (5.45) aparece el vector $\vec{N}$ y también aparece $|\vec{N}|$ en el denominador. Es importante observar que

$$\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

es siempre un vector de módulo 1.

Ejemplo 111 Si $N = (2, 3, -1)$ entonces

$$N \cdot N = 2 \times 2 + 3 \times 3 + (-1) \times (-1) = 14.$$

Por lo tanto

$$\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

es un vector de módulo 1, tal como puede verificarse por medio de un cálculo directo.

Llamaremos *versor* a un vector de módulo 1. Indicaremos con $\vec{n}$ a un versor normal a un plano.
Consideremos entonces un plano α con un versor normal $\vec{n}$. Cuando escribimos la fórmula (5.45) para $\vec{n}$ toma la forma

$$Q' = Q - ((Q - P_0) \cdot \vec{n})\, \vec{n}. \tag{5.46}$$

La distancia del punto al plano es entonces

$$d(Q, \alpha) = |Q' - Q| = |((Q - P_0) \cdot \vec{n})\, \vec{n}| == |(Q - P_0) \cdot \vec{n}| \tag{5.47}$$

La figura5.141 muestra el sentido geométrico de esta fórmula:

$$(Q - P_0) \cdot \vec{n} = |Q - P_0| \cos\theta.$$

El signo será positivo o negativo según que el versor normal $\vec{n}$ apunte hacia el semiespacio al que pertenece P o hacia el otro.

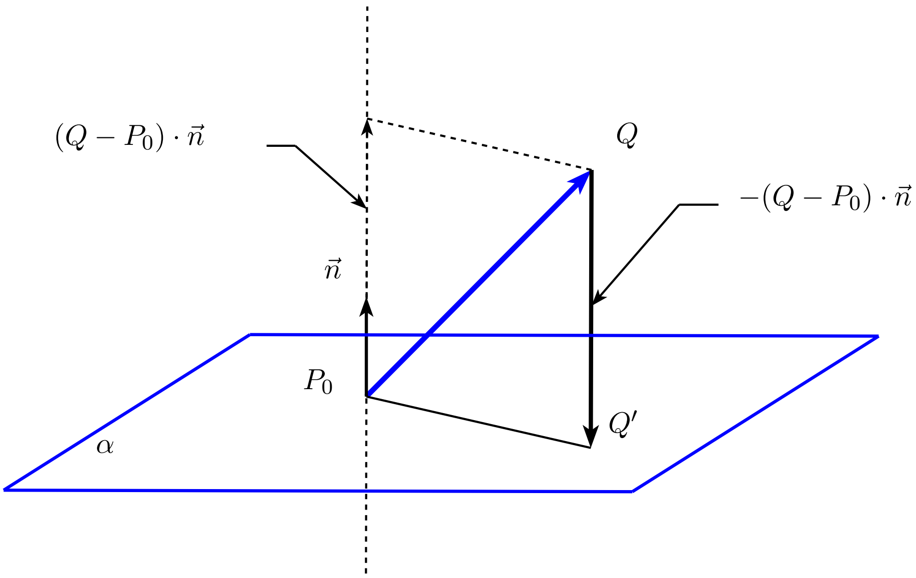


Figura 5.141

Además, la fórmula (5.47) es muy fácil de aplicar a partir de una ecuación reducida

$$ax + by + cz + d = 0$$

para un plano α. Esta ecuación es una forma de escribir

$$(P - P_0) \cdot \vec{N} = 0$$

para algún vector normal $\vec{N}$ y punto base P_0 en el plano. El vector normal es

$$\vec{N} = (a, b, c),$$

de modo que

$$|\vec{N}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

es una ecuación para el plano con un vector normal

$$\vec{n} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

de módulo 1. Aplicando (5.47) a esta nueva ecuación, encontramos que si $Q = (x, y, z)$ es un punto cualquiera entonces

$$d(Q, \alpha) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{5.48}$$

Ejemplo 112 Hemos visto en el ejemplo 110 que el origen O se proyecta sobre el punto

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

del plano α de ecuación

$$x + y + z = 1.$$

De acuerdo con este resultado, la distancia del origen al plano es

$$d(O,\alpha) = \left|\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aplicando la fórmula (5.48) al punto y la ecuación del plano encontramos

$$d(O,\alpha) = \frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

en completo acuerdo con el cálculo anterior. ♣

Ejercicio 5.6.10 Hallar la distancia del punto $(1,2,7)$ al plano de ecuación reducida

$$2x + 3y + 6z = 1.$$

Ejercicio 5.6.11 Hallar la distancia del punto $(9,0,7)$ al plano de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 - 4\nu, \\ y = 1 - \mu + \nu, \\ z = 1 + \mu + \nu, \end{cases}$$

El producto escalar es una herramienta potente para realizar diversas construcciones geométricas. Nuestro próximo ejemplo ilustra otra posibilidad.

Ejemplo 113 Consideraremos el plano α el plano de ecuación

$$x + y + z = 1$$

y la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 + 3\lambda, \\ y = 3 + 2\lambda, \\ z = 1 + \lambda. \end{cases}$$

Nuestro objetivo es caracterizar la proyección de la recta r sobre el plano α.

Un punto genérico de la recta es

$$P = (3 + 3\lambda, 3 + 2\lambda, 1 + \lambda).$$

El producto escalar nos ha permitido construir un procedimiento general para proyectar cualquier punto del espacio sobre el plano α, que podemos aplicar al punto P. Para aplicarlo necesitamos un punto Q cualquiera en α. Elegimos

$$Q = (1,0,0).$$

Un vector normal $\vec{N}$, que puede extraerse de la ecuación del plano, como

$$\vec{N} = (1,1,1).$$

Obviamente

$$|\vec{N}|^2 = \vec{N}\cdot\vec{N} = 3.$$

Para proyectar P calculamos la diferencia

$$P - Q = (2 + 3\lambda, 3 + 2\lambda, 1 + \lambda)$$

y el producto escalar

$$(P - Q) \cdot \vec{N} = 6 + 6\lambda.$$

La proyección de P sobre α es

$$P' = (3 + 3\lambda, 3 + 2\lambda, 1 + \lambda) - \frac{6 + 6\lambda}{3}(1, 1, 1).$$

Haciendo los cálculos resulta

$$P' = (1 + \lambda, 1, -1 - \lambda),$$

que también puede escribirse en la forma

$$P' = (1, 1, -1) + \lambda(1, 0, -1),$$

que hace evidente que la proyección de r es la recta que pasa por $(1, 1, -1)$ y tiene a $(1, 0, -1)$ como vector director.

Independientemente de cómo se haya construido la proyección, es conveniente comprobar que todos los puntos de la recta satisfacen la ecuación del plano. En nuestro caso sustituimos las coordenadas (x, y, z) de P' en el miembro de la izquierda de la ecuación del plano:

$$(1 + \lambda) + 1 + (-1 - \lambda) = 1,$$

que resulta ser igual al miembro de la derecha. De modo que la recta está incluida en el plano.

Podemos calcular también la diferencia

$$P - P' = (3 + 3\lambda, 3 + 2\lambda, 1 + \lambda) - (1 + \lambda, 1, -1 - \lambda) = 2(1 + \lambda)(1, 1, 1). \tag{5.49}$$

Vemos que esta diferencia es siempre colineal con la normal al plano, lo que es consistente con la idea de que P' es la proyección de P sobre el plano. De hecho, una vez que sabemos que cada punto P' está en el plano α y que la diferencia $P - P'$ es normal al plano podemos estar completamente seguros de que hemos calculado bien, porque estas dos condiciones son equivalente a que P' sea la proyección de P sobre α.

Todavía es posible hacer una observación adicional. La fórmula (5.49) revela que los puntos P y P' coinciden cuando $\lambda = -1$. Para este valor de λ tenemos

$$P = P' = (0, 1, 0),$$

que es la intersección de la recta r con α. Para otros valores, la diferencia $P - P'$ es proporcional a

$$\lambda + 1 = \lambda - (-1)$$

que es el incremento del parámetro λ a partir del valor en el que estamos en la intersección con el plano.

Hay otros procedimientos para hacer esta construcción, los dos ejercicios siguientes ilustran dos posibilidades.

Ejercicio 5.6.12 Mostrar que el plano β de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 + 3\mu + \nu, \\ y = 3 + 2\mu + \nu, \\ z = 1 + \mu + \nu, \end{cases}$$

es el plano que contiene a r y es perpendicular a α. Usar este plano para construir la proyección de r sobre α.

Ejercicio 5.6.13 Calcular la intersección P de r con α. Identificar otro punto Q de r y calcular su proyección sobre Q' sobre α. Determinar la proyección de r sobre α como la recta que pasa por P y Q'.

♣

5.6.3. Ecuaciones paramétricas y vectores normales

Las ecuaciones reducidas de los planos aparecieron por primera vez en la sección 5.3, como una condición que nos permitía resolver el sistema de ecuaciones paramétricas para construir a partir de ellas cada punto (x, y, z) en el plano. En esta sección, hemos reinterpretado las ecuaciones paramétricas en términos del vector normal. Mostraremos ahora cómo calcular directamente un vector normal a partir de un par de vectores directores. La manera de hacerlo será trabajar de manera muy sistemática con las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + \mu u_1 + \nu v_1, \\ y = y_0 + \mu u_2 + \nu v_2, \\ z = z_0 + \mu u_3 + \nu v_3, \end{cases} \tag{5.50}$$

de un plano genérico α que contiene al punto

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

y tiene un par de vectores directores

$$\vec{U} = (u_1, u_2, u_3), \quad \vec{V} = (u_1, u_2, u_3).$$

Asumiremos que los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ no son colineales, que es una condición geométrica necesaria para poder construir un plano a partir de ellos. Un punto $P = (x, y, z)$ pertenece al plano α si y solo si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mu u_1 + \nu v_1 = x - x_0, \\ \mu u_2 + \nu v_2 = y - y_0, \\ \mu u_3 + \nu v_3 = z - z_0, \end{cases}$$

admite una solución (μ, ν).

Si el sistema tiene solución, la variable ν tiene que satisfacer la ecuación

$$\nu(u_2 v_1 - u_1 v_2) = u_2(x - x_0) - u_1(y - y_0),$$

que resulta de multiplicar la primera ecuación por u_2, la segunda por $-u_1$ y sumar. Esta ecuación es más simple que cualquiera de las tres ecuaciones originales, porque solo interviene en ella la incógnita ν. Hay otras dos ecuaciones posibles de este tipo, que se obtienen eliminando μ entre la segunda y tercera ecuación y entre la tercera y la primera.

Para no privilegiar ninguna pareja de ecuaciones sobre las demás y mantener la simetrí entre ellas, también sumaremos la segunda multiplicada por u_3 a la tercera multiplicada por $-u_2$, sumaremos la tercera multiplicada por u_1 a la primera multiplicada por $-u_3$ y conservaremos las tres ecuaciones resultantes. Obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l}\nu(u_2v_1 - u_1v_2) = u_2(x - x_0) - u_1(y - y_0),\\ \nu(u_3v_2 - u_2v_3) = u_3(y - y_0) - u_2(z - z_0),\\ \nu(u_1v_3 - u_3v_1) = -u_1(z - z_0) - u_3(x - x_0).\end{array}\right.$$

El siguiente paso para conseguir por este procedimiento una condición de compatibilidad del sistema es eliminar ν. Conseguiremos esto multiplicando la primera ecuación por v_3, la segunda por v_1 y la primera por v_2. Obtenemos

$$0 = u_2v_3(x - x_0) - v_3u_1(y - y_0) + u_3v_1(y - y_0) - v_1u_2(z - z_0) + u_1v_2(z - z_0) - v_2u_3(x - x_0).$$

Reordenando esta expresión la escribimos como

$$(u_2v_3 - v_2u_3)(x - x_0) + (u_3v_1 - v_3u_1)(y - y_0) + (u_1v_2 - v_1u_2)(z - z_0) = 0. \tag{5.51}$$

La forma en que hemos derivado esta ecuación implica que es una condición necesaria para que el punto (x, y, z) esté en el plano. Como $\vec{U}$ y $\vec{V}$ no son colineales, el vector

$$\vec{N} = (u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - v_3u_1, u_1v_2 - v_1u_2) \tag{5.52}$$

formado por los coeficientes de la ecuación (5.51) es distinto del vector nulo $(0, 0, 0)$ (ver la parte 1 del ejercicio 1, en la página 241). Por lo tanto, alguno de los coeficientes de la ecuación (5.51) es diferente de cero, la ecuación (5.51) es efectivamente la ecuación de un plano que no puede ser otro que el plano α con ecuaciones paramétricas (5.50) y el vector $\vec{N}$ en (5.52) es un vector normal al plano.

Observemos que $\vec{N}$ puede calcularse directamente a partir de las coordenadas de los vectores directores $\vec{U}$ y $\vec{V}$.

Ejemplo 114 En los ejemplos 89 y 90 de la sección 5.3 consideramos el plano α que pasa por el punto $P = (0, -1, 1)$ y tiene a $U = (1, -2, -1)$ y $V = (-1, 3, 1)$ como vectores directores y encontramos que tiene la ecuación reducida

$$x + z = 1.$$

Aplicaremos ahora la ecuación (5.51) a este ejemplo. Comenzamos por calcular los coeficientes

$$\begin{aligned}u_2v_3 - v_2u_3 &= -2 \times 1 - 3 \times (-1) = 1,\\ u_3v_1 - v_3u_1 &= -1 \times (-1) - 1 \times 1 = 0,\\ u_1v_2 - v_1u_2 &= 1 \times 3 - (-1) \times (-2) = 1.\end{aligned}$$

Con ellos formamos la ecuación

$$1 \times (x - 0) + 0 \times (y - (-1)) + 1 \times (z - 1) = 0,$$

en la que, luego de algunas sencillas operaciones, reconocemos la ecuación reducida

$$x + z = 1$$

que ya habíamos encontrado para este plano. ♣

Ejercicio 5.6.14 Usando el método de calcular un vector normal a partir de los vectores directores, hallar una ecuación reducidas para el plano α de ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda - \mu, \\ y = 2 + \lambda + \mu, \\ z = -1 - \lambda - 2\mu. \end{array} \right. \tag{5.53}$$

Comparar el resultado con el obtenido al resolver el ejercicio 5.3.16, página 212.

Ejercicio 5.6.15 Dados los vectores

$$\vec{U} = (u_1, u_2, u_3), \qquad \vec{V} = (v_1, v_2, v_3),$$

definimos

$$W = (u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - v_3u_1, u_1v_2 - v_1u_2)$$

1. Mostrar que el vector (5.52) es el vector nulo $(0, 0, 0)$ si y solo si $\vec{U}$ y $\vec{V}$ son colineales.
2. Mostrar que W siempre es ortogonal a $\vec{U}$ y $\vec{V}$.

5.6.4. Ejercicios adicionales

Ejercicio 5.6.16 Sea α el plano de ecuación

$$2x + 3y - z = 1$$

y P el punto $(0, -4, 1)$.

1. Hallar la distancia de P a α.
2. Hallar la proyección de P sobre α (es el punto de α más cercano a P).
3. Hallar el punto simétrico de P respecto al plano α.

Ejercicio 5.6.17 Sea α el plano de ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 7 + \lambda - \mu, \\ y = 4 + 2\lambda, \\ z = \qquad 3\lambda + \mu, \end{array} \right.$$

y P el punto $(9, 6, 2)$. Calcular la distancia de P a α y hallar el punto de α que está más próximo de P. Hallar los valores de λ y μ que en las ecuaciones paramétricas del plano corresponden a ese punto.

Ejercicio 5.6.18 Sea α el plano de ecuación

$$x - y + z = 1$$

y r la recta de ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 + 3\lambda, \\ y = 1 + 1\lambda, \\ z = 1 + \lambda, \end{array} \right.$$

1. Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de la recta r' que es la proyección de r sobre el plano α.

2. Hallar la proyección sobre α del punto $(4,1,1)$ y la intersección de r con α. Verificar que ambos puntos pertenecen a la recta r'.

Ejercicio 5.6.19 Sea α el plano de ecuación

$$x + 2y + 3z = 1$$

y r la recta de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = 4 + 2\lambda, \\ z = 6 + 3\lambda, \end{cases}$$

Hallar la proyección sobre α de la recta r.

Ejercicio 5.6.20 Sea α el plano de ecuación

$$x + 2y + 3z = 1$$

y r la recta de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 - \lambda, \\ y = 4 - \lambda, \\ z = 6 + \lambda, \end{cases}$$

Hallar la proyección sobre α de la recta r y determinar la distancia entre el plano α y la recta r.

Ejercicio 5.6.21 Sea α el plano de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + 3\lambda - \mu, \\ y = -1 + 2\lambda, \\ z = \phantom{-1 + {}} 2\lambda - \mu, \end{cases}$$

y β el de ecuación reducida

$$2x - 5y + 2z = 20.$$

1. Hallar la distancia entre los planos α y β.

2. Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de un plano γ diferente de β que también sea paralelo a α y esté a la misma distancia que β.

5.7. Superficies

En esta sección estudiaremos algunas superficies en el espacio a través de sus cortes con planos paralelos a los ejes coordenados. Aunque los métodos son generales, los ilustraremos con aplicaciones a esferas y cilindros, y propondremos luego trabajar con otras superficies dadas por ecuaciones cuadráticas. También veremos cómo resolver el problema de hallar las intersecciones de rectas con este tipo de superficies.

5.7.1. La ecuación de la esfera y otras superficies

La esfera $\mathcal{E}$ de centro $C = (a, b, c)$ y radio r es el conjunto de puntos P que está a distancia r de C. Podemos caracterizar entonces a la esfera como el conjunto de los puntos que satisfacen la ecuación

$$d(P, C) = r.$$

En términos del vector $\vec{CP} = P - C$, esta ecuación es equivalente

$$|P - C| = r.$$

El módulo de un vector se calcula a partir del producto escalar. De modo que podríamos escribir también

$$\sqrt{(P - C) \cdot (P - C)} = r.$$

Como es una igualdad entre números mayores o iguales que cero, es equivalente a la igualdad de sus cuadrados, que es algebraimente más simple:

$$(P - C) \cdot (P - C) = r^2. \tag{5.54}$$

Cuando expresamos todo esto en coordenadas, si

$$P = (x, y, z)$$

el vector $P - C$ es

$$P - C = (x - a, y - b, z - c).$$

De modo que cuando (5.54) se expresa en coordenadas resulta

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Esta es la forma general de la ecuación de la esfera.

Ejemplo 115 La esfera unidad
El ejemplo más canónico de esfera es la esfera de radio 1 que está centrada en el origen $O = (0, 0, 0)$. Su ecuación es

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Cada uno de los ejes coordenados corta a la esfera unidad en dos puntos. El eje Ox lo hace en $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

Ejercicio 5.7.1 Hallar los cortes de la esfera unidad con el eje Oy y con el eje Oz. ♣

Un recurso corriente para estudiar un objeto en el espacio 3D es analizar sus cortes con planos. Es una práctica bien instalada en el dibujo técnico, que recurre frecuentemente a la representación de cortes de piezas y edificios para su mejor visualización, y es también el tipo de información que devuelen al especialista muchos estudios médicos en los que se obtienen imágenes de algún tipo del interior del cuerpo humano. En nuestro próximo ejemplo estudiaremos los cortes de la esfera unidad con planos horizontales, de ecución $z = k$. El valor de k controla la “altura del corte“.

Ejemplo 116 Estudiaremos los cortes de la esfera $\mathcal{E}$ de ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

con planos horizontales de ecuación

$$z = k.$$

La primera observación es que los puntos que pertenezcan a la intersección de ambas superficies deben satisfacer ambas ecuaciones. Son entonces los puntos $P = (x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ z &= k. \end{aligned} \right.$$

La segunda ecuación permite simplificar algo la primera, pasando al sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 1 - k^2, \\ z & = & k. \end{array} \right. \tag{5.55}$$

Observación 51 Es importante tener presente que la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 - k^2 \tag{5.56}$$

por sí sola no es la ecuación de la intersección del plano y la esfera.

Dado que la coordenada z no aparece en la ecuación, si un punto $(x, y, 0)$ la satisface entonces cualquier punto (x, y, z) la satisface, independientemente del valor de z. Por ejemplo, para $k = 1/\sqrt{2}$ la ecuación toma la forma

$$x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

y todos los puntos

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + z(0, 0, 1).$$

la satisfacen. Estos puntos forman la recta vertical que pasa por $(1/2, 1/2, 0)$. Generalizando el argumento que acabamos de presentar, un punto $P = (x, y, 0)$ pertenece al conjunto de puntos que satisface la ecuación si y solo si toda la recta vertical que pasa por P está contenida en ese conjunto. En particular, cuando $k < 1$, la ecuación (5.56) representa un cilindro circular recto, cuya directriz es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $r = \sqrt{1 - k^2}$ en el plano Oxy. Ver el ejemplo 117.

Ejercicio 5.7.2 Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de una recta vertical que esté completamente contenida en el cilindro que se obtiene tomando $k = 0$.

Ejercicio 5.7.3 ¿Qué representa la ecuación (5.56) cuando $k = 1$? ♠

Analicemos ahora el sistema de ecuaciones (5.55) para distintos valores de k.

Mientras $-1 < k < 1$ se tiene que

$$1 - k^2 > 0.$$

En un plano (x, y), la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 - k^2$$

representa entonces una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio

$$r = \sqrt{1 - k^2}. \tag{5.57}$$

Aunque no se trata de una ecuación en un plano (x, y), sino una ecuación acerca de las coordenadas de puntos en el espacio, como la coordenada z necesariamente toma el valor k, todo vuelve a reducirse a un problema plano. El sistema representa la circunferencia de radio (5.57) con centro $(0, 0, k)$ en el plano $z = k$.

Cuando $k = 1$ o $k = -1$ la primera ecuación en (5.55) se reduce a

$$x^2 + y^2 = 0,$$

que solo se satisface si

$$x = y = 0.$$

El único punto que satisface las ecuaciones es $(0, 0, 1)$ si $k = 1$ y $(0, 0, -1)$ si $k = -1$. Se trata, respectivamente, del "Polo Sur"y el "Polo Norte"de la esfera $\mathcal{E}$.

Si $k > 1$ o $k < -1$ la primera ecuación en (5.55) ya no puede satisfacerse. Esto significa que la intersección de la esfera y el plano es vacía. Cuando $k > 1$ el plano está demasiado por encima de la esfera para cortarla. Cuando $k < -1$ pasa por debajo, sin tocarla. ♣

Ejemplo 117 Para $r > 0$, la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{5.58}$$

representa en el espacio un cilindro circular recto, de radio r, y generatrices paralelas al eje Oz, al que llamaremos $\mathcal{C}$. El corte de $\mathcal{C}$ con cualquier plano $z = k$ está formado por los puntos

$$(x, y, k)$$

cuyas coordenadas x e y satisfacen la ecuación (5.58). En un plano (x, y) , esa ecuación representa una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio r.

Otra manera de verlo es que observar que si un punto (x, y, z) cualquiera satisface la ecuación (5.58), entonces cualquier otro punto (x, y, z') también la satisfará, porque la coordenada z no interviene. Al variar z dejando fijos x e y, recorremos una recta vertical, que es una de las generatrices del cilindro $\mathcal{C}$.

Por ejemplo, todos los puntos

$$\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, z\right) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, 0\right) + z(0, 0, 1)$$

pertenecen a $\mathcal{C}$. El segundo miembro explicita que están sobre una recta con vector director $(0, 0, 1)$.

En nuestro próximo ejemplo presentamos una nueva aplicación del método de cortar superficies con planos paralelos a los ejes coordenados.

Ejemplo 118 De acuerdo a lo que discutimos en el ejemplo 117, la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{5.59}$$

representa un cilindro vertical recto de radio 1, cuyo eje es el eje Oz. Al cortarlo con planos horizontales se obtiene circunferencias de radio 1. Nuestro propósito es cortarlo ahora con planos verticales, de la forma

$$y = k.$$

Naturalmente, el corte está formado por todos los puntos $P = (x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{r} x^2 + y^2 = 1, \\ y = k. \end{array} \right.$$

Este sistema es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 & = & 1 - k^2, \\ y & = & k. \end{array} \right. \tag{5.60}$$

Este nuevo sistema es relativamente fácil de analizar. Mientras se satisfaga

$$-1 < k < 1$$

tenemos que

$$1 - k^2 > 0$$

y la primera igualdad en (5.60) se satisface si y solo si $x = \sqrt{1 - k^2}$ o $x = -\sqrt{1 - k^2}$. Los puntos que están en la intersección son entonces los que satisfacen uno de los dos siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{1 - k^2}, \\ y = k, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{1 - k^2}, \\ y = \quad k. \end{array} \right.$$

Por separado, cada uno de los dos sistemas representa una recta vertical. La intersección es entonces la unión de dos rectas verticales.

Cuando $k = 1$ o $k = -1$, encontramos que el sistema (5.60) se reduce a

$$\left\{ \begin{array}{r} x^2 = 0, \\ y = k. \end{array} \right.$$

Se trata ahora de una única recta. La recta

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y = 1, \end{array} \right.$$

en el caso $k = 1$, y la recta

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \quad 0, \\ y = -1, \end{array} \right.$$

cuando $k = -1$.

Cuando $k > 1$ o $k < -1$ la igualdad

$$x^2 = 1 - k^2 < 0$$

es imposible para cualquier número real x. Esto implica que el sistema (5.60) es incompatible y significa que el plano no corta al cilindro. Efectivamente, el módulo de k mide la distancia del plano $y = k$ al eje del cilindro, y en este rango de valores es mayor que el radio del cilindro. En esta situación, el plano y el cilindro no tienen puntos en común. ♣

Ejercicio 5.7.4 Dibujar los cortes de la superficie de ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

con planos paralelos a los planos Oxy, Oxz y Oyz. Discutir la naturaleza del corte según la posición del plano. Dibujar ejemplos típicos de cada posible situación.

Ejercicio 5.7.5 Dibujar los cortes de la superficie de ecuación

$$z = xy$$

con planos paralelos a los planos Oxy, Oxz y Oyz. Discutir la naturaleza del corte según la posición del plano. Dibujar ejemplos típicos de cada posible situación.

5.7.2. Cortes de rectas con superficies

El principio para cortar una recta con una superficie descrita por una ecuación que debe ser satisfecha por sus puntos es similar al principio para cortar una recta con un plano dado por su ecuación reducida.

Ejemplo 119 La recta r de ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 + \lambda, \\ y = 3 + \lambda, \\ z = 8 + 3\lambda, \end{array} \right. \tag{5.61}$$

también puede describirse por las ecuaciones reducidas

$$\left\{ \begin{array}{r} x - y = 1, \\ 3x - z = 4. \end{array} \right.$$

La intersección de r con la esfera $\mathcal{E}$ de centro $(-1, 1, 3)$ y radio $\sqrt{21}$ está formada por los puntos que satisfacen a la vez las ecuaciones reducidas de la recta y la ecuación de la esfera. Son, por lo tanto, los puntos $P = (x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfacen el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rl} x - y = & 1, \\ 3x - z = & 4, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = & 21 \end{array} \right. \tag{5.62}$$

formado por las dos ecuaciones reducidas de la recta y la ecuación de la esfera.

Para calcular la intersección usaremos las ecuaciones parametrizadas de la recta, en vez de las reducidas. Las ecuaciones parametrizadas reducen el problema de identificar un punto sobre la recta a la determinación de un único número, el valor del parámetro que corresponde a ese punto. Un punto sobre la recta, con coordenadas (x, y, z) dadas por las ecuaciones parmétricas (5.61) pertenece a la ecuación de la esfera si y solo si el parámetro λ satisface la ecuación

$$(5 + \lambda)^2 + (2 + \lambda)^2 + (5 + 3\lambda)^2 = 21, \tag{5.63}$$

que resulta de sustituir en la ecuación de la esfera la expresión paramétrica de las coordenadas de un punto genérico en la recta r. Algunas manipulaciones algebraicas reducen (5.63) a

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0,$$

una ecuación cuadrática en λ cuyas soluciones son $\lambda = -1$ y $\lambda = -3$. Corresponden, respectivamente, a los puntos

$$P_{-1} = (3, 2, 5), \quad P_{-3} = (1, 0, -1).$$

Verificar que ambos puntos satisfacen el sistema de ecuaciones (5.62) es un ejercicio que dejamos para el lector.

Ejercicio 5.7.6 Verificar que P_{-1} y P_{-3} satisfacen las ecuaciones (5.62).

Ejercicio 5.7.7 Calcular la distancia del centro de la esfera $\mathcal{E}$ a la recta r. Verificar que es menor que $\sqrt{21}$ y que el punto que realiza la distancia es el punto medio del segmento $P_{-1}P_{-3}$. ♣

Tal como comentábamos en el ejemplo, sugerimos usar las ecuaciones paramétricas de la recta para resolver este tipo de problemas. En los próximos ejercicios aparce rectas definidas por sus ecuaciones paramétricas. En caso de no tenerlas porque la recta está caracterizada por ecuaciones reducidas o de alguna otra manera, sugerimos buscar ecuaciones paramétricas para calcular la intersección.

Ejercicio 5.7.8 En todas las partes de este ejercicio consideraremos la esfera $\mathcal{E}$ de centro $C = (1, 0, 3)$ y radio 3.

1. Calcular la intersección de $\mathcal{E}$ con la recta de ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 7 - 2\lambda. \end{array} \right.$$

2. Calcular la intersección de $\mathcal{E}$ con la recta de ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -4 + \lambda, \\ y = -2, \\ z = -7 + 2\lambda. \end{array} \right.$$

3. Calcular la intersección de $\mathcal{E}$ con la recta de ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -3 - 4\lambda, \\ y = -5 - 2\lambda, \\ z = \quad 1 + 4\lambda. \end{array} \right.$$

Para cada una de las rectas, calcular su distancia al centro de la esfera y estudiar si este valor es coherente con los resultados obtenidos durante el cálculo de intersecciones.

En nuestro próximo ejemplo seleccionaremos un punto P en una esfera $\mathcal{E}$ y buscaremos todas las rectas que pasan por P y tales que su intersección con $\mathcal{E}$ está formada únicamente por el punto P. Estudiar este ejemplo nos llevará a encontrar el plano tangente a la esfera en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 120 El punto $P = (4, -2, 9)$ pertenece a la esfera $\mathcal{E}$ de centro $C = (3, 2, 1)$ y radio 9. En efecto, el vector

$$\vec{CP} = P - C = (1, -4, 8) \tag{5.64}$$

tiene módulo igual a $\sqrt{1 + 16 + 64} = 9$.

Las ecuaciones paramétricas de una recta r genérica que pasa por P y tiene un vector director no nulo cualquiera

$$\vec{V} = (u, v, w)$$

son

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & 4 + u\lambda, \\ y = & -2 + v\lambda, \\ z = & 9 + w\lambda. \end{array}\right.$$

En el corte de r con $\mathcal{E}$ el parámetro λ debe satisfacer la ecuación

$$(1 + u\lambda)^2 + (-4 + v\lambda)^2 + (8 + w\lambda)^2 = 9,$$

que se obtiene al sustituir en la ecuación de la esfera las expresiones paramétricas de las coordenadas de los puntos en la recta. Algunas manipulaciones algebraicas estándar permiten escribir esta ecuación como

$$\lambda^2 \left(u^2 + v^2 + w^2\right) + 2\lambda(u - 4v + 8w) = 0.$$

Obviamente, $\lambda = 0$ es una solucion, que corresponde al punto P. Para que no aparezca otra debe satisfacerse

$$u - 4v + 8w = 0. \tag{5.65}$$

Observemos que (5.65) puede escribirse en la forma mucho más sugerente

$$0 = (1, -4, 8) \cdot (u, v, w) = \vec{CP} \cdot \vec{V}.$$

Esta es la condicion de ortogonalidad del vector director $\vec{V}$ de la recta r con el vector $\vec{C}P$, entre el centro de la esfera y el punto P.

Las rectas que pasan por P y tiene un vector director $\vec{V}$ que satisface esta condición de ortoganalidad son tangentes a la esfera en P. Por ejemplo, la recta con vector director $(4, -1, -1)$ es una recta tangente a la esfera.

Ejercicio 5.7.9 Hallar rectas tangentes a la esfera que sean paralelas a los planos coordenados Oxy, Oxz y Oyz. Dar ecuaciones paramétricas y reducidas.

Ejercicio 5.7.10 Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de centro O y radio $\sqrt{3}$ en el punto $(1, 1, 1)$.

Ejercicio 5.7.11 Mostrar que

$$(P - C) \cdot \vec{U} = 0$$

es la condición para que el corte con la esfera sea único y que en ese caso el corte es una ráiz doble.

Para $r > 0$, hallar la ecuación de un plano tangente a una esfera de ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

en un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ cualquiera de la esfera. NOTA: el resultado quedará expresado en términos de las coordenadas a, b y c del centro de la esfera y x_0, y_0 y z_0 del punto P. ♣

Ejercicio 5.7.12 Estudiar la intersección del cilindro de ecuación

$$x^2 + y^2 = 1,$$

con la esfera de ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Discutir según R.

Ejercicio 5.7.13 Hallar la intersección de la recta de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + a\lambda, \\ y = 4\lambda, \\ z = -\lambda \end{cases}$$

con el cilindro de ecuación

$$x^2 + y^2 = 1,$$

y con la esfera de ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Discutir según a.