Capítulo 4

Ampliaciones del cálculo diferencial e integral

Dado que la derivación y la integración pueden verse como operaciones inversas entre sí, cada propiedad de la derivación se traducirá en una propiedad de la integración, y viceversa. Por ejemplo, la linealidad de la integral

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

está íntimamente relacionada con la linealidad de la derivada

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

En este capítulo derivaremos fórmulas para el cálculo de integrales a partir de las fórmulas para la derivada del producto y la composición de funciones.

La fórmula

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{4.1}$$

para la derivada de un producto da lugar a la fórmula de integración por partes.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx.$$

En la sección 4.1 mostraremos la validez de la fórmula (4.1). A partir de esa igualdad demostraremos en la sección 4.2 la fórmula de integración por partes y la emplearemos para evaluar integrales.

La composición de funciones es la aplicación consecutiva de una y otra. La composición de g con f evaluada en x es

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

El símbolo $\circ$ es simplemente una notación para indicar la composición. Cuando f es derivable en x y g es derivable en $f(x)$, la derivada de $g \circ f$ existe y toma el valor

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x). \tag{4.2}$$

Este resultado para las derivadas recibe el nombre de *regla de la cadena* e implica la *fórmula de sustitución*

$$\int_a^b h(g(x))g'(x)dx \int_{g(a)}^{g(b)} h(y)dy.$$

En la sección 4.4 mostraremos la validez de la regla de la cadena. En la 4.5 la fórmula de sustituión para el cálculo de integrales.

Los resultados de este capítulo tienen interés teórico propio y diversas aplicaciones que van mucho más allá de la evaluación de integrales. Aunque no desarrollaremos nada de esto, mencionamos dos ejemplos especialmente interesantes:

- la fórmula de integración por partes está por detrás de la extensión del cálculo diferencial que en el siglo XX significó la teoría de distribuciones;
- la regla de la cadena permite definir con precisión el concepto de curvatura, que es una noción geométrica de fundamental importancia.

4.1. La derivada del producto de funciones derivables

El estudio de la derivada de cualquier función $f(x)$ es el estudio de la relación que guardan los incrementos Δf de la función con los incrementos Δx de su variable. Para estudiar los incrementos de un producto buscaremos expresar el incremento

$$\Delta(fg) = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$$

del producto fg, de una forma que haga evidente cómo participan en el cálculos los valores de los incrementos

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x), \quad \Delta g = g(x+\Delta x) - g(x),$$

de cada una de las funciones f y g involucradas.

Ejemplo 64 Antes de tratar este problema en toda su generalidad, proponemos al lector examinar las ideas que usaremos luego en el caso general en un ejemplo particularmente sencillo, en que

$$f(x) = g(x) = x.$$

Ejercicio 4.1.1

1. Calcular el incremento de x^2 entre $x = 2$ y $x = 2 + \Delta x$.

2. Mostrar que puede interpretarse como la diferencia de áreas entre dos cuadrados de lados $2 + \Delta x$ y 2, y escribirse en la forma

$$\Delta(x^2) = 2\Delta x + 2\Delta x + (\Delta x)^2. \tag{4.3}$$

   Relacionar está fórmula con la figura 4.106.

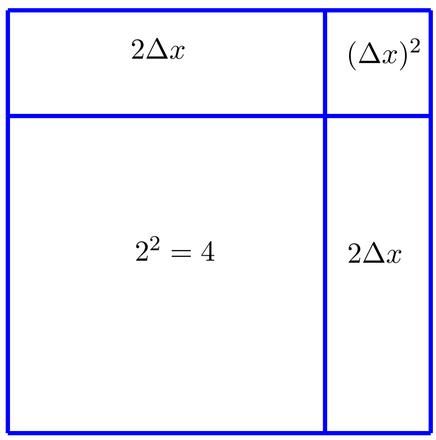

Figura 4.106 Incrementos del cuadrado

La figura da una clave geométrica para organizar el cálculo. ♣

Pasemos ahora al caso general. La idea es interpretar los productos $f(x)g(x)$ y

$$f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) = f(x)g(x) + \Delta(fg)$$

como áreas de rectángulos. El primero de ellos con base $f(x)$ y altura $g(x)$ y el segundo con base $f(x+\Delta x)$ y altura $g(x+\Delta)$. El incremento $\Delta(fg)$ aparecerá entonces como el área de una figura plana, que descompondremos en tres rectángulos cuya área puede calcularse en términos de los valores de $f(x)$, $g(x)$, Δf y Δg.

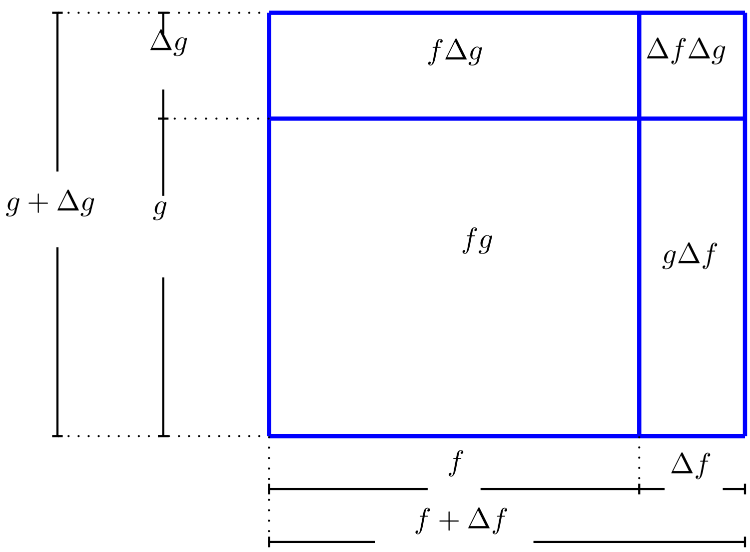

Figura 4.107 Incrementos del producto fg

El área total de la figura es $(f+\Delta f)(g+\Delta g)$. El dibujo muestra que

$$\Delta(fg) = (f+\Delta f)(g+\Delta g) - fg = f\Delta g + g\Delta f + \Delta f\Delta g. \tag{4.4}$$

Ejemplo 65 Consideremos las funciones

$$f(x) = x, \quad g(x) = \operatorname{sen} x$$

y su producto

$$h(x) = f(x)g(x) = x \operatorname{sen} x$$

Fijemos además

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad \Delta x = \frac{\pi}{3}.$$

Por lo tanto

$$x + \Delta x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

El incremento de la función h entre x y $x+\Delta x$ es entonces

$$\Delta h = h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\times\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{12}$$

Podemos ordenar también el cálculo del incremento como en el segundo miembro de (4.4). Evaluamos entonces el valor de f en x y el de su incremento:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6},\quad \Delta f=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$

Haciendo lo propio para g encontramos

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2},\quad \Delta g=g\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Con estos valores calculados, podemos evaluar Δh como

$$\Delta h=\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi+2\pi+2\pi}{12}=\frac{5\pi}{12},$$

que coincide con el resultado arrojado por nuestro cálculo directo a partir de evaluaciones de h. ♣

Ejercicio 4.1.2 Evaluar

$$h(x)=e^x\operatorname{sen}x$$

en $x=\pi/6$ y en $x+\Delta x=\pi/4$. Calcular el incremento de la función h por medio de evaluaciones directas en $\pi/6$ y $\pi/4$. Calcular los valores y los incrementos del seno y la exponencial entre $\pi/6$ y $\pi/4$ y escribir el incremento de h con el formato de la fórmula (4.4), tomando

$$f(x)=e^x,\quad g(x)=\operatorname{sen}x.$$

Mostrar que esta expresión devuelve el valor correcto para el incremento.

Ejercicio 4.1.3 Hacer los cálculos para verificar que la fórmula (4.4) es válida incluso cuando $f(x)$, $g(x)$, Δf o Δg son negativos. En estos casos, el argumento basado en la interpretación geométrica de las áreas en la figura 4.107 es menos convincente.

Para estudiar si existe la derivada en x del producto fg debemos calcular el cociente incremental

$$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x}.$$

La fórmula (4.4) nos permite escribir el numerador en términos de los incrementos de f y de g. Al hacerlo, encontramos que

$$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x}=f\frac{\Delta g}{\Delta x}+g\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta f\Delta g}{\Delta x}. \tag{4.5}$$

Hagamos $\Delta x\to 0$ y analicemos si la expresión (4.5) se aproxima a algún valor. Si las derivadas de f y g existen en x, entonces sus cocientes incrementales se aproximarán al valor de las respectivas derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ cuando Δx tiende a cero. Escribimos entonces que

$$\frac{\Delta g}{\Delta x}\to g'(x),\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}\to f'(x),$$

cuando $\Delta x\to 0$. Por lo tanto

$$\frac{\Delta f\Delta g}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g\to 0,$$

porque es el producto de $\Delta f/\Delta x$, que tiende a $f'(x)$, por Δg, que tiende a 0 Combinando toda esta información concluimos

$$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x}\to f'g+fg'$$

cuando $\Delta x\to 0$, lo que implica que si las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces la derivada de fg en x también existe y satisface (4.1).

Ejemplo 66 La derivada de la función

$$h(x) = e^x \operatorname{sen} x$$

del ejercicio 4.1.2 es

$$h'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

En el primer sumando hemos usado que la derivada de la exponencial es la propia exponencial. En el segundo que el coseno es la derivada del seno. ♣

Ejemplo 67 Evaluando sus cocientes incrementales y pasando al límite, hemos aprendido que la derivada de x^2 es $2x$. La fórmula de la derivada del producto da un procedimiento alternativo para calcular la derivada de un cuadrado a partir del conocimiento de que la constante 1 es la derivada de la función lineal x . Si tenemos en cuenta que

$$x^2 = xx,$$

entonces

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 1x + x1 = 2x.$$

De manera análoga, $x^3 = x^2 x$. Entonces

$$\frac{d(x^3)}{dx} = 2xx + x^2 1 = 3x^2.$$

El procedimiento puede usarse para todas las potencias naturales.

Ejercicio 4.1.4 Mostrar que para cualquier valor natural de n se satisface

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Sugerencia: hacer inducción sobre n. ♣

Ejemplo 68 Si

$$f(x) = x \operatorname{sen} x$$

entonces

$$f'(x) = 1 \operatorname{sen} x + x \cos x = \operatorname{sen} x + x \cos x.$$

Ejercicio 4.1.5 Derivar $x \cos x$. ♣

Ejemplo 69 Si

$$f(x) = x \log x$$

entonces

$$f'(x) = 1 \log x + x \frac{1}{x} = \log x + 1.$$

Veremos luego cómo este resultado nos permitira calcular con facilidad una primitiva de $\log x$. ♣

Ejercicio 4.1.6 Calcular las derivadas de

$$x \operatorname{sen}(ax), \quad e^{bx} \cos x, \quad e^x \operatorname{sen} x.$$

4.2. Integración por partes

El tipo de fórmulas para la derivada que obtuvimos en los ejemplos 68 y 68 de la sección 4.1 habilita a calcular primitivas que no son obvias en una primera aproximación. Lo haremos primero de manera informal en dos ejemplos, y luego discutiremos cómo esta idea da lugar a un procedimiento sistemático.

Ejemplo 70 El resultado del ejemplo 68 permite calcular una primitiva de

$$x \cos x.$$

Sabemos que

$$(x \operatorname{sen} x)' = \operatorname{sen} x + x \cos x,$$

lo que es equivalente a decir que

$$x \operatorname{sen} x$$

es una primitiva de

$$\operatorname{sen} x + x \cos x.$$

Es casi lo que queremos, salvo por el sumando $\operatorname{sen} x$. Pero $\operatorname{sen} x$ desaparecerá del cálculo si antes de derivar restamos de $x \operatorname{sen} x$ una primitiva de $\operatorname{sen} x$, que es algo conocido para nosotros: $-\cos x$. Concluimos así que

$$F(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x \tag{4.6}$$

debería ser una primitiva de $x \cos x$, cosa que intentaremos verificar derivando:

$$F'(x) = 1 \operatorname{sen} x + x \cos x - \operatorname{sen} x = x \cos x.$$

Al terminar el cáclculo comprobamos que efectivamente tenemos una primitiva de $x \cos x$.

Usando un razonamiento parecido a partir del ejemplo 69 puede resolverse el siguiente ejercicio.

Ejercicio 4.2.1 Calcular una primitiva de $\log x$.

Ejercicio 4.2.2 Para cualquier valor de a, hallar primitivas de $x \cos(ax)$.

Ejercicio 4.2.3 Calcular primitivas de $e^x \cos x$ y $e^x \operatorname{sen} x$. Sugerencia: considerar al mismo tiempo las derivadas de ambas funciones, y buscar combinaciones adecuadas de ellas que permitan resolver el problema planteado.

4.2.1. La fórmula de integración por partes

Dado que

$$(fg)' = f'g + fg'$$

podemos despejar

$$f'g = (fg)' - fg'.$$

Integrando entre a y b obtenemos

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \int_a^b (fg)'(x)dx - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

La primera integral del miembro de la derecha es de evaluación directa, porque fg es una primitiva del integrando. Resulta entonces

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx. \tag{4.7}$$

Esta fórmula recibe el nombre de *fórmula de integración por partes.*

Ejemplo 71 Vamos a calcular

$$\int_e^{e^2} \log x dx$$

usando integración por partes. La clave es interpretar el integrando como el producto $f'g$, de la derivada f' de una cierta función f por otra función g que será derivada en el proceso. El papel de la g lo jugará el logaritmo. Tenemos entonces

$$g(x) = \log x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

No hay otra cosa que un logaritmo dentro de la integral, pero cuando algo a parece solo podemos considerar que hay un uno multiplicando, como 1 es la derivada de x, tomaremos

$$f(x) = x, \quad f'(x) = 1.$$

Entonces

$$\int_e^{e^2} \log x\, dx = \int_e^{e^2} 1 \log x\, dx = \int_e^{e^2} x' \log x\, dx = x\log x\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x\frac{1}{x}\, dx.$$

El primer sumando se reduce a hacer evaluaciones. El segundo es una integral de 1, de evaluación directa. Concluimos

$$\int_e^{e^2} \log x\, dx = e^2 \log e^2 - e\log e - \left(e^2 - e\right) = e^2.$$

Ejercicio 4.2.4 Evaluar la integral de este ejemplo usando la primitiva del ejercicio 4.2.1. ♣

Ejercicio 4.2.5 Calcular

1. $\displaystyle\int_1^e \log x dx.$
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx.$
3. $\displaystyle\int_0^1 xe^{ax} dx$, para a cualquiera.
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} x dx.$
5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos x dx.$

Observación 35 Integración por partes puede emplearse también para el cálculo de primitivas, en la forma

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx, \tag{4.8}$$

que expresa que una primitiva de $f'g$ puede obtenerse restando del producto fg una primitiva de fg'.

Ejercicio 4.2.6 Calcular primitivas de las funciones de los ejercicios 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3, aplicando la fórmula (4.8). Sugerencia: los cálculos son esencialmente los mismos que ya se hicieron, la idea del ejercicio es interpretar la fórmula en esos ejemplos que ya se trabajaron.

Ejercicio 4.2.7 Integración por partes suele emplearse cuando se reconoce que el integrando se puede escribir de manera útil como el producto $f'g$ de la derivada f' de una cierta función f, por una segunda función g. Pero f' es tanto la derivada de f como de cualquier otra función $f + c$, donde c es una constante arbitraria. ¿Qué ocurre cuando dejamos variar c? ¿Es posible que al variar c la misma integral produzca una infinidad de resultados diferentes? ¿Cómo afecta la constante c el uso de integración por partes para el cálculo de primitivas, tal como se describe en la observacion 35

El próximo ejercicio requiere utilizar el siguiente resultado: cuando x tiende a $+\infty$, el producto $x^k e^{-x}$ de cualquier potencia de x por la exponencial de $-x$, tiende a cero.

Ejercicio 4.2.8 Un ejemplo de integral impropia

1. Para $y > 0$ cualquiera, calcular
$$I(y) = \int_0^y xe^{-x}dx.$$

2. Hallar el límite de $I(y)$ cuando y tiende a infinito. Ese límite es la integral
$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx.$$

3. Para cualquier valor de $a > 0$, calcular
$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax}dx.$$

4.3. La relación entre cortante y momento

Para una viga en equilibrio, en puntos en que no hay cargas concentradas aplicadas, el momento flector es derivable y su derivada coincide con el cortante. Luego de ver este fenómeno en un par de ejemplos, enunciaremos este resultado y daremos de él varias demostraciones.

Ejemplo 72 Consideremos una viga de longitud l, apoyada en sus dos extremos, que soporta en su punto medio una carga puntual Q. En los apoyos aparecen dos reacciones verticales de valor $Q/2$ que equilibran la carga. El cortante en esta situación es

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2}, & 0 < x < l/2, \\ -\dfrac{Q}{2}, & l/2 < x < l. \end{cases}$$

El momento

$$M(x) = \begin{cases} \dfrac{Qx}{2}, & 0 < x < l/2, \\ \dfrac{Ql}{2} - \dfrac{Qx}{2}, & l/2 < x < l. \end{cases}$$

Observemos que en cada uno de los tramos $0 < x < l/2$ y $l/2 < x < l$ se cumple la relación

$$M'(x) = V(x).$$

Esto se hace aparente en la figura 4.108. Observemos que la convención de invertir el signo en el eje vertical del gráfico de momentos hace que el gráfico se vea con una pendiente de signo contrario al valor del cortante en cada punto.

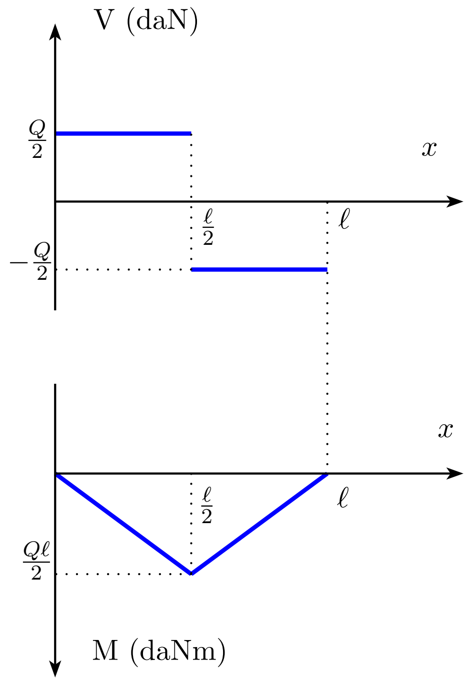

Figura 4.108

En $x = l/2$ el momento no es derivable. Observemos que en ese lugar, en que aparece una carga puntual, no hay manera de definir el cortante de modo que sea continuo. ♣

Ejemplo 73 Consideremos una ménsula de longitud l empotrada en su extremo derecho y sometida a una carga distribuida triangular

$$q(x) = ax, \quad 0 \leq x < l,$$

tal como se muestra en la figura 4.109.

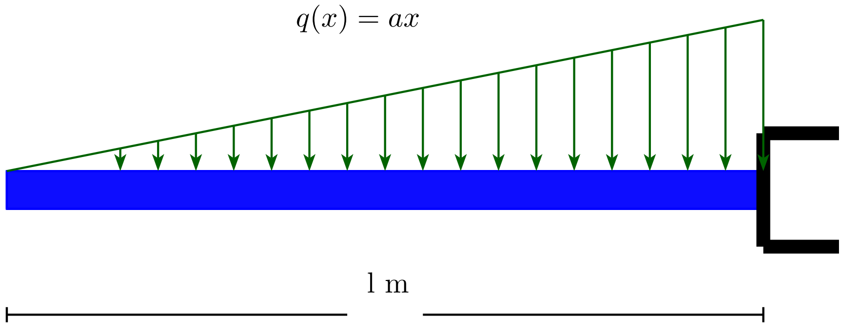

Figura 4.109

Para la ménsula empotrada en su extremo derecho y sometida a una carga distribuida con densidad ρ, el valor del cortante en x es

$$V(x) = -\int_0^x \rho(s)ds = -\int_0^x asds = -\frac{a}{2}x^2, \quad 0 \leq x < l. \tag{4.9}$$

El momento flector es

$$M(x) = -\int_0^x (x-s)asds = -\left.\frac{a}{2}xs^2\right|_0^x + \left.\frac{a}{3}s^3\right|_0^x = -\frac{a}{2}x^3 + \frac{a}{3}x^3 = -\frac{a}{6}x^3. \tag{4.10}$$

Observemos que

$$M'(x) = -3\frac{a}{6}x^2 = -\frac{a}{2}x^2 = V(x).$$

Veremos que esta relación no es una peculiaridad de este ejemplo, sino un caso particular de un resultado general. ♣

Ejercicio 4.3.1 Revisar los ejemplos y ejercicios en que se han calculado cortantes y momentos flectores para barras con distintas cargas y anclajes, y verificar que en todos los casos la igualdad

$$M'(x) = V(x)$$

se satisface fuera de los puntos x en que hay cargas puntuales aplicadas.

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente Teorema.

Teorema 2 *Sean $V(x)$ y $M(x)$ el cortante y el momento flector de una barra sometida a una combinación de cargas verticales distribuidas y puntuales. La variable x es una longitud que identifica la posición de cada sección de la barra. En las secciones en las que no hay aplicadas cargas puntuales se satisface la igualdad*

$$M'(x) = V(x). \tag{4.11}$$

Este resultado tiene un gran valor práctico, porque implica que el momento es una primitiva del cortante, por lo que puede calcularse directamente a partir del cortante, evaluando áreas encerradas bajo su gráfico, evitando evaluar la integral que define el valor del momento.

Ejemplo 74 Volvamos al ejemplo 73 de una ménsula de longitud l empotrada en su extremo derecho y sometida a una carga distribuida triangular

$$q(x) = ax, \quad 0 \leq x < l.$$

El valor del cortante en x es

$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2, \quad 0 \leq x < l.$$

tal como hemos calculado en (4.9). La fórmula 4.11 implica que el momento es una primitiva del cortante, de modo que sus incrementos se obtienen integrando el cortante:

$$M(x) - M(0) = \int_0^x V(s)ds = \int_0^x \left(-\frac{a}{2}s^2\right) ds.$$

La sección izquierda, en $x = 0$ está libre, por lo tanto $M(0) = 0$. Evaluando la integral concluimos

$$M(x) = -\frac{a}{6}x^3$$

y reencontramos así el resultado que ya conocíamos para $M(x)$ por un procedimiento más simple que la evaluación de la integral Obtuvimos el resultado pero integrar el cortante conduce a cálculos más simple. Además, en muchos casos puede hacerse gráficamente a partir del diagrama de cortantes. ♣

A continuación proponemos tres series de ejercicios que nos permitirán construir tres demostraciones diferentes del Teorema 2. Nos concentraremos en el término que proviene de las cargas distribuidas, que es el que tiene mayor dificultad. Al final incorporaremos también las fuerzas puntuales, tanto cargas como reacciones. Al mostrar varios argumentos diferentes que justifican un mismo resultado, pretendemos enfatizar también la idea de que frecuentemente hay varios abordajes posibles y válidos para un mismo problema.

Las contribuciones de las cargas distribuidas al cortante $V(x)$ y al momento flector $M(x)$ son, respectivamente

$$V_q(x) = -\int_0^x q(s)ds, \qquad M_q(x) = -\int_0^x q(s)(x-s)ds. \tag{4.12}$$

4.3.1. Análisis de los incrementos de M_q

Si repasamos las demostraciones del Teorema Fundamental del Cálculo y de la fórmula para la derivada de un producto, encontraremos que ambas descansan en la definición de derivada como límite de cocientes incrementales y en un estudio cuidadoso de los incrementos de las funciones que intervienen. En el próximo ejercicio proponemos al lector analizar los incrementos ΔM_q de la contribución al momento flector $M(x)$ que proviene de las cargas distribuidas q.

La idea básica es que el incremento ΔM del momento flector M entre x y $x + \Delta x$ proviene de dos efectos diferentes:

- la contribución de la carga del intervalo $[x, x + \Delta x]$;
- para la parte de la carga q que está a la izquierda de x, el 'brazo' del momento cambia en una longitud de Δx.

Organizaremos el cálculo de ΔM de modo que cada uno de estos efectos quede representado en un sumando diferente.

Ejercicio 4.3.2

1. Mostrar que el incremento $\Delta M_q = M_q(x + \Delta x) - M_q(x)$ puede escribirse en la forma

$$\Delta M_q = -\Delta x \int_0^x q(s)ds - \int_x^{x+\Delta x} (x + \Delta x - s)q(s)ds.$$

   Concluir que

$$\Delta M_q = -\Delta x V_q(x) - \int_x^{x+\Delta x} (x + \Delta x - s)q(s)ds. \tag{4.13}$$

2. Observar que el primer sumando es el momento en $x + \Delta x$ de $V_q(x)$ y el segundo el momento de la parte de la distribución de carga que cae entre x y $x + \Delta x$. Mostraremos ahora que el segundo sumando es pequeño y no aparecerá al pasar al límite en los cocientes incrementales. Llamemos Q al valor máximo de la distribución de carga $q(x)$. Mostrar que

$$\left| \int_x^{x+\Delta x} (x + \Delta x - s)q(s)ds \right| \leq Q(\Delta x)^2.$$

3. Concluir que los cocientes incrementales

$$\frac{\Delta M_q}{\Delta x}$$

   se aproximan a $V_q(x)$ a medida que Δx tiende a 0.

Observación 36 La ecuación (4.13) puede conseguirse por un argumento físico, examinando el equilibrio del tramo de viga entre x y $x + \Delta x$. Supondremos que sobre la barra hay solo fuerzas verticales, por lo que, en ausencia de cargas horizantales, sobre el tramo que estamos considerando actúan:

- un sistema de fuerzas en la sección x, que trasmite los esfuerzos del tramo de la barra a la izquierda de x al tramo de la barra a la derecha de x. Por definición de cortante y momento flector, estos esfuerzos tienen como resultante un cortante $V(x)$ y un momento $M(x)$;
- un sistema de fuerzas en la sección $x + \Delta x$, que trasmite los esfuerzos del tramo de la barra a la derecha de $x + \Delta x$ al tramo de la barra a la izquierda de $x + \Delta x$. Por el principio de acción y reacción y la definición de cortante y momento flector, estos esfuerzos tienen como resultante los opuestos $-V(x+\Delta x)$ y $-M(x+\Delta x)$ del cortante y el momento flector en Δx;
- el tramo de la distribución de carga $q(s)$ que corresponde al intervalo $x < s < x + \Delta x$.

Estas fuerzas están representadas en la figura 4.110

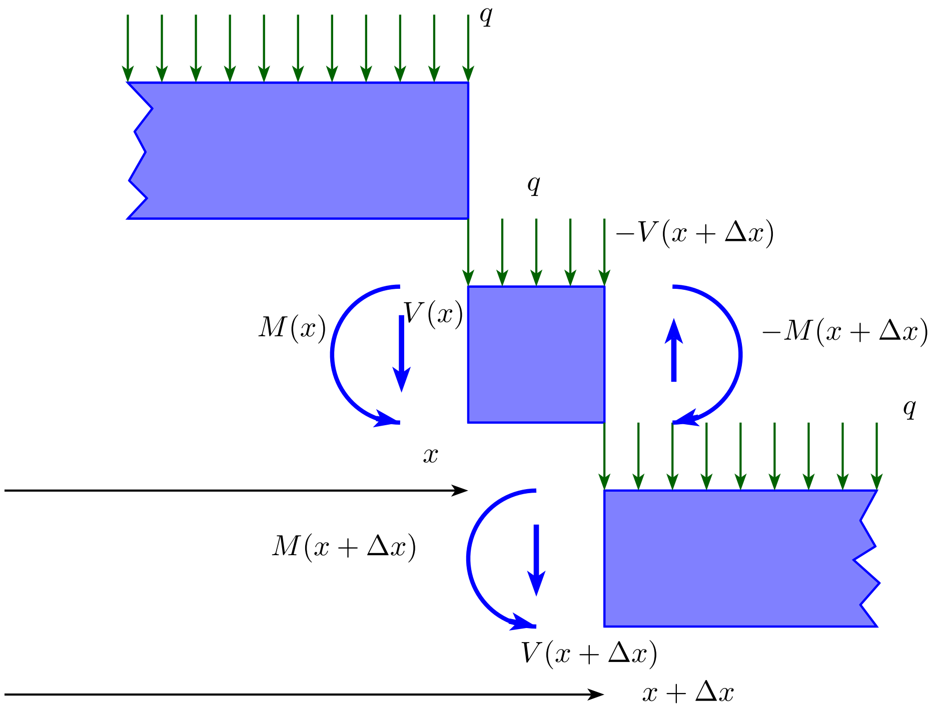

Figura 4.110

El tramo de barra que corresponde al intervalo $[x, x+\Delta x]$ debe estar en equilibrio bajo todas estas fuerzas. En particular, los momentos deben estar equilibrados. Planteando el equilibro de momentos respecto al centro de la sección en $x+\Delta x$ encontramos

$$0 = \Delta x V(x) + M(x) - 0V(x+\Delta x) - M(x+\Delta x) - \int_x^{x+\Delta x} (x+\Delta x - s)q(s)ds,$$

que es equivalente a (4.13). Este mismo argumento físico puede encontrarse también en las fichas del curso de Estabilidad 1. ♣

4.3.2. Derivación de M_q usando la derivada del producto y el Teorema Fundamental del Cálculo

Ejercicio 4.3.3 Mostrar que la contribución $M_q(x)$ al momento flector $M(x)$ que aparece en la fórmula (4.12) puede escribirse como

$$M_q(x) = -x\int_0^x \rho(s)ds + \int_0^x s\rho(s)ds$$

y derivarla usando en el miembro de la derecha la fórmula de la derivada del producto y el Teorema Fundamental del Cálculo. Concluir que $M_q'(x) = V_q(x)$.

4.3.3. Argumentos basados en la fórmula de integración por partes

Aplicaremos la fórmula de integración por partes a

$$M_q(x) = -\int_0^x q(s)(x-s)ds.$$

Para ello integraremos $q(s)$ y derivaremos $x-s$. Según la segunda fórmula en (4.12), que define V_q, una primitiva de $q(s)$ es

$$\int_0^x q(s)ds = -V_q(x).$$

La derivada respecto a s de $x-s$ es -1. Obtenemos entonces

$$M_q(x) = -\left((x-s)V(s)\Big|_0^x - \int_0^x V(s)(-1)ds \right)..$$

Al evaluar el primer sumando encontramos

$$(x-s)V(s)\Big|_0^x = (x-x)V_q(x) - (x-0)V_q(0) = 0.$$

Concluimos

$$M_q(x) = -\int_0^x V_q(s)ds.$$

Este argumento nos dice cómo calcular M_q como una integral de V_q, que es el resultado de mayor interés para las aplicaciones. Además, por el Teorema Fundamental del Cálculo, implica que $M_q' = V_q$.

4.3.4. La contribución de las fuerzas puntuales y el fin de la demostración del Teorema 2

Cuando hay fuerzas puntuales y cargas distribuidas, tanto el momento flector $M(x)$ como el cortante $V(x)$ resultan de la suma de dos términos diferentes: uno que viene de las cargas distribuidas y otro de las cargas puntuales. Los llamaremos, respectivamente, M_q, V_q, M_P y V_P. Escribimos entonces

$$M(x) = M_q(x) + M_P(x), \quad V(x) = V_q(x) + V_P(x).$$

En las secciones anteriores hemos mostrado de varias maneras que $M_q' = V_q$. La contribución al cortante y al momento flector en x de una carga puntual Q ubicada en un punto x_Q con $x_Q < x$ es, respectivamente,

$$V_Q = -Q, \quad M_Q = -(x-x_Q)Q. \tag{4.14}$$

Ejercicio 4.3.4 Mostrar que la contribución de las cargas puntuales satisface las relaciones

$$M_P(x) = \int_0^x V_P(s)ds, \qquad M_p' = V_P, \tag{4.15}$$

y completar la demostración del Teorema 2. Sugerencia: en cada punto x en que no esté aplicada una carga puntual, las contribuciones al cortante y el momento flector de las cargas puntuales son una suma de términos del tipo de los que aparecen en (4.14). Cualquiera de las dos igualdades en (4.15) puede demostrarse directamente y permite obtener la otra a partir de ella.

4.4. La regla de la cadena

Ya hemos visto cómo calcular derivadas de sumas y productos de funciones y cómo aplicar al cálculo de integrales estos resultados. El objetivo de esta sección y la siguiente es hacer un recorrido análogo con la *composición de funciones*, la regla para derivarla –que recibe el nombre de *regla de la cadena*– y la técnica de *integración por sustitución* que deriva de ella.

4.4.1. La composición de funciones

Las funciones permiten describir la variabilidad presente en mucho fenómenos. Comprenderla es importante para muchas tareas, por lo que hemos puesto énfasis en estudiar incrementos y cocientes incrementales. Por otra parte, es habitual en muchos procesos que una tarea vaya seguida de otra. Por ejemplo, al calcular el costo de los materiales para una obra primero hay que evaluar la cantidad de cada material, y luego tomar esos resultados como insumo para el cálculo de costos a partir de los precios vigentes; al seleccionar la tipografía en un diseño se van aplicando una tras otras distintas decisiones: elegir el tipo de fuente, luego el tamaño, luego el estilo, luego el color; una receta de cocina describe una secuencia de transformaciones, etcétera.

En el cálculo, esta idea general aparece bajo la forma de la composición de funciones. Si tenemos dos funciones f y g podemos aplicarla una a continuación de la otra. El esquema ilustra el resultado de aplicar primero f a x y luego g a $f(x)$:

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)).$$

Se genera así una nueva función

$$h(x) = g(f(x))$$

que recibe el nombre de composición de g y f y se indica con la notación $g \circ f$. En definitiva

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ejemplo 75 Tomemos

$$f(x) = -x^2, \quad g(x) = e^x,$$

dos funciones de variable real, cuyos gráficos aparecen en las figuras 4.111 y 4.112

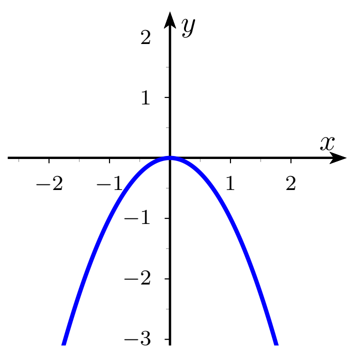

Figura 4.111 Gráfico de $-x^2$

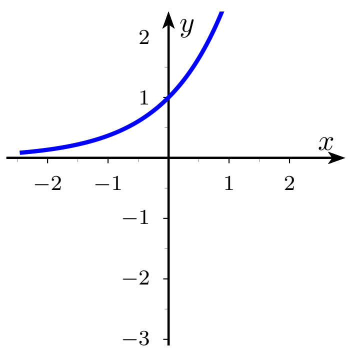

Figura 4.112 Gráfico de e^x

Si aplicamos a x primero f y luego g obtenemos

$$f(x) = -x^2, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{-x^2},$$

Por lo tanto
$$(g \circ f)(x) = e^{-x^2}.$$
Su gráfico aparece en la figura 4.113

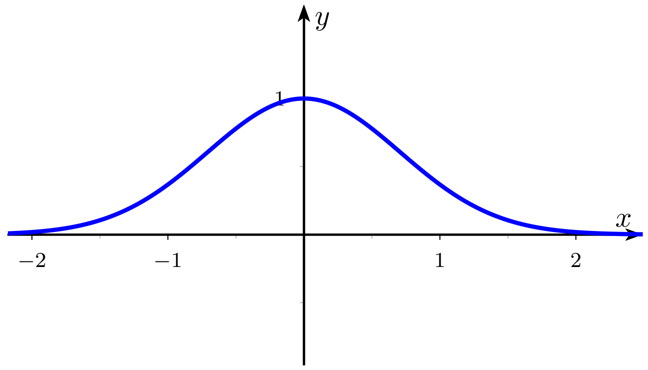

Figura 4.113

Por ejemplo, para evaluar $g \circ f$ en $x = -2$ primero calculamos
$$-(-2)^2 = -4$$
y luego $e^{-4} \approx 0{,}018$.

Ejercicio 4.4.1 Calcular el valor de $g \circ f$ que corresponde a $x = 1$ y a $x = 2$.

A diferencia de la suma y el producto de funciones, la composición no es conmutativa. A continuación proponemos al lector que estudie la composición $f \circ g$

Ejercicio 4.4.2 Para la función $f \circ g$, definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, hallar la fórmula que la representa y dibujar su gráfico. ♣

Ejemplo 76 Definimos
$$f(x) = 2x + 1, \qquad g(x) = x^2.$$
En las figuras 4.114 y 4.115 aparecen los gráficos de f y g.

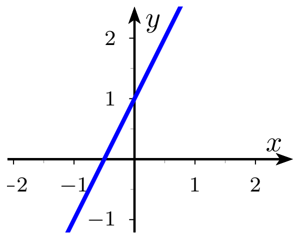

Figura 4.114 Gráfico de $f(x) = 2x + 1$

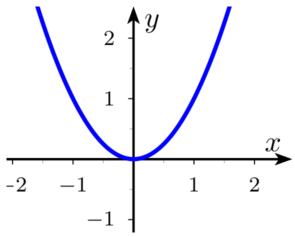

Figura 4.115 Gráfico de $g(x) = x^2$

La composición $g \circ f$ es
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2,$$
cuyo gráfico aparece en la figura 4.116

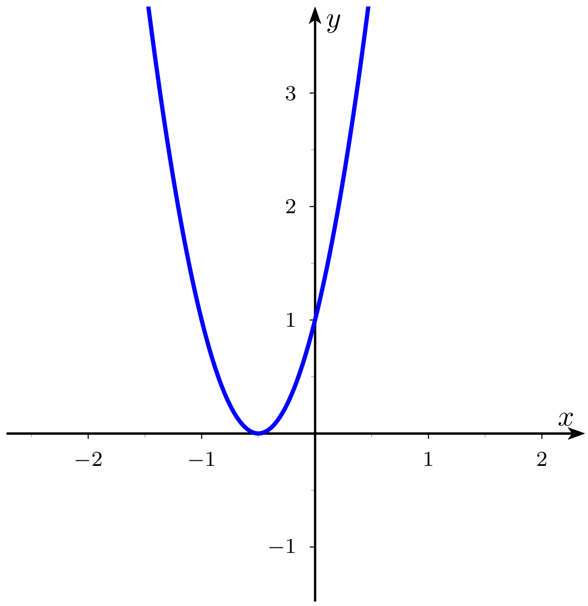

Figura 4.116 Gráfico de la función compuesta $(f \circ g)(x) = (2x + 1)^2$

Ejercicio 4.4.3 Hallar la fórmula y el gráfico de la composición $f \circ g$. ♣

Observación 37 Para que la composición $g \circ f$ esté definida en x es necesario que $f(x)$ esté definida, y, a su vez, que para $f(x)$ esté definida la función g. No prestaremos mucha atención en este curso a este problema de dominios de las funciones, porque en general trabajaremos con funciones reales de variable real con dominios de definición muy amplios. Aún así, encontraremos de tanto en tanto puntos singulares en que no estarán definidas algunas de las funciones con las que trabajaremos.

Ejercicio 4.4.4 De las funciones f y g se conocen los valores que aparecen en la tabla.

x	f	g
0	2	4
1	7	16
2	-1	0
3	-1	2

¿Para qué valores de x es posible calcular $g \circ f$ a partir de esa información, y qué valor toma la función compuesta $g \circ f$? Contestar las mismas preguntas para $f \circ g$.

Ejemplo 77 Un ejemplo especialmente importante para lo que vamos a hacer es el de las funciones lineales, de la forma

$$f(x) = ax + b, \quad g(x) = cx + d.$$

Las constantes a y c representan las pendientes de los gráficos de las funciones f y g.

Entonces

$$(g \circ f)(x)) = g(f(x)) = c(ax + b) + d = cax + cb + d,$$

es una nueva función lineal, con pendiente ca. La pendiente de la función compuesta es simplemente el producto de las pendientes. Si recordamos que la pendiente del gráfico es la derivada de la función, podemos reformular este resultado diciendo que la derivada de la composición de dos funciones lineales es el producto de sus derivadas. Este caso es especialmente sencillo porque para las funciones lineales las derivadas son constante, pero veremos en la próxima sección que, con las modificaciones adecuadas, este enunciado se generaliza a funciones cualesquiera. ♣

Ejercicio 4.4.5 Consideremos

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = 2 + x^3.$$

1. Para $x \in \mathbb{R}$ definimos $u(x) = f(g(x))$ y $v(x) = g(f(x))$. Hallar fórmulas explícitas en x para u y para v.
2. Calcular las derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$ directamente, a partir de las fórmulas de $u(x)$ y $v(x)$ encontradas en la parte anterior.
3. Calcular las derivada $u'(x)$ y $v'(x)$ usando la regla de la cadena.

Ejercicio 4.4.6 La interpretación de la función $\operatorname{sen} x$ como el seno de un cierto ángulo es válida solo cuando la medida del ángulo está expresada en radianes. Cuando la calculadora está en el modo `deg`, en que interpreta que las medidas de los ángulos están calculados en grados, cuando calcula el seno (o el coseno, o cualquier otra función trigonométrica), está usando una función diferente que la función seno del cálculo. Llamaremos $\operatorname{sen}_{\texttt{deg}}$ a esta función.

Entonces

A. $\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} x = \operatorname{sen}\left(\dfrac{180x}{\pi}\right);$

B. $\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} x = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{180}\right);$

C. $\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} x = \dfrac{180}{\pi}\operatorname{sen}\left(\dfrac{180x}{\pi}\right);$

D. $\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} x = \dfrac{\pi}{180}\operatorname{sen}(x).$

Si con la calculadora en modo grados vamos haciendo

$$\frac{\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} 0{,}1}{0{,}1}, \quad \frac{\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} 0{,}01}{0{,}01}, \quad \frac{\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} 0{,}001}{0{,}001}, \quad \frac{\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} 0{,}0001}{0{,}0001}, \quad \frac{\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} 0{,}00001}{0{,}00001}, \ldots,$$

¿a qué número observaremos que se aproximan los resultados?

4.4.2. La regla de la cadena

En esta sección enunciaremos y daremos una justificación de la regla de la cadena. Como primer paso, vamos a escribir nuevamente el ejemplo 77 sobre la composición de funciones lineales en términos de los cocientes incrementales y con una notación que enfatiza las distintas variables en juego.

Ejemplo 78 La función lineal

$$f(x) = ax + b$$

define una variable

$$y = ax + b. \tag{4.16}$$

Como entre ambas variables hay una relación lineal, sus incrementos satisfacen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

donde a, el coeficiente que multiplica a x en (4.16) es la derivada de y respecto a x. Nuestro objetivo es estudiar $g(f(x))$, que pensaremos entonces como $g(y)$. La función

$$g(y) = cy + d$$

define una variable

$$z = cy + d. \tag{4.17}$$

que satisface

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = c.$$

La pendiente del gráfico de $g \circ f$ estará dada por el cociente incremental

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} = ac,$$

que está en todo de acuerdo con el resultado que habíamos encontrado en el ejemplo 77. ♣

Una generalización del argumento que acabamos de presentar permite justificar la regla de la cadena para funciones cualesquiera.

Teorema 3 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en x y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $f(x)$. Entonces la composición $g \circ f$ es derivable en x y satisface*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x). \tag{4.18}$$

Justificación. Escribamos

$$y = f(x), \quad z = g(y).$$

Al incrementar la variable x en Δx observaremos en las variables y y z incrementos

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), \quad \Delta z = g(y + \Delta y) - g(y).$$

Las hipótesis de derivabilidad de f en x y de g en $f(x)$ implican que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x), \quad \frac{\Delta z}{\Delta y} \to g'(y) = g'(f(x)), \tag{4.19}$$

cuando $\Delta x \to 0$. Para el cociente incremental de la composición $z = g \circ f$ respecto a la variable independiente x escribimos

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

por lo tanto, en virtud de (4.19),

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} \to g'(f(x))f'(x) \tag{4.20}$$

cuando $\Delta x \to 0$, lo que justifica la validez de (4.18).

Ejercicio 4.4.7 ¿Por qué el argumento que acabamos de presentar no es una demostración completamente rigurosa de la regla de la cadena? ¿Cuál es su punto débil?

Ejemplo 79 Volvemos ahora a las funciones

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(y) = y^2.$$

que habíamos considerado en el ejemplo 76, con el ligero cambio de notación de usar para g la variable y. Su composición es

$$(g \circ f)(x) = (2x + 1)^2. \tag{4.21}$$

Sus derivadas son

$$f'(x) = 2, \quad g'(y) = 2y.$$

De acuerdo a la regla de la cadena, la derivada de la composición es

$$(g \circ f)'(x) = 2y \times 2 = 2(2x + 1) \times 2 = 4(2x + 1) = 8x + 4.$$

En este caso podemos desarrollar el cuadrado en (4.21) para escribir

$$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 2$$

y derivar directamente esta expresión, para obtener el mismo resultado

$$(g \circ f)'(x) = 8x + 4.$$

Ejercicio 4.4.8 Usar la regla de la cadena y el cálculo directo, para evaluar la derivada de $f \circ g$.

Observación 38 También vale en el caso general la propiedad de que la pendiente del gráfico de la composición es el producto de la pendiente de los gráficos de f y g. A diferencia del caso lineal, en que las pendientes son constantes, para funciones cualesquiera hay que asegurarse de tener en cuenta el valor de la pendiente en el punto correcto del gráfico. Veamos esto para $x = 1$. Tenemos $f(1) = 3$ y $f'(1) = 2$. La derivada $(g \circ f)'(1) = 8 \times 1 + 4 = 12$ es el producto de 2, la pendiente del gráfico de f en $x = 1$, por 6 que es la pendiente del gráfico de g en $3 = f(1)$. En efecto, $g'(3) = 2 \times 3 = 6$.

Este hecho es completamente general, y vale para cualquier composición de funciones. La explicación es que cerca de cada punto del gráfico el gráfico es muy cercano a su tangente en ese punto. La regla de la cadena viene a decir que para valores pequeños de Δx, la composición se comporta como la composición de las dos funciones lineales cuyos gráficos son las tangentes a los gráficos de f y g. ♠ ♣

Observación 39 Ya hemos observado que podemos pensar que las funciones f y g definen variables

$$y = f(x), \quad z = g(y).$$

Es usual indicar entonces las derivada $f'(x)$ y $g'(y)$ con la notación

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad \frac{dz}{dy} = g'(y). \tag{4.22}$$

El origen de esta notación es que las derivadas son, respectivamente, límites de los cocientes incrementales

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta y}.$$

Con la notación de (4.22), la regla de la cadena toma el sugerente aspecto

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}. \tag{4.23}$$

Además de darnos una mnemotecnia que ayuda a recordar la regla de la cadena, veremos que esta nueva notación es especialmente útil a la hora de aplicar la regla de la cadena al cálculo de integrales. ♠

Ejemplo 80 Vamos a calcular ahora la derivada de $\cos(x^2)$, que puede verse como la composicón $g \circ f$ de

$$f(x) = x^2, \quad g(y) = \cos y.$$

Sabemos que

$$f'(x) = 2x, \quad g'(y) = -\operatorname{sen} y.$$

De modo que

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = -\operatorname{sen}(x^2)2x.$$

Es preferible escribir de manera algo diferente el resultado del cálculo. También aprovecharemos para dejar de lado la notacion $g \circ f$ y usar otra notación que haga explícito cuál es la función que estamos derivando:

$$\frac{d\cos(x^2)}{dx} = -2x\operatorname{sen}(x^2).$$

El cálculo podría haberse hecho también con la notación (4.23), escribiendo

$$y = x^2, \quad z = \cos y.$$

Entonces

$$\frac{dz}{dx} = -\operatorname{sen} y\, 2x = -2x\operatorname{sen}(x^2).$$

Es interesante observar que estos cálculos nos permiten hallar primitivas de $x\operatorname{sen}(x^2)$ y abordar un cálculo como

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\operatorname{sen}(x^2)dx.$$

Salvo por un factor -2 el integrando es la derivada de $\cos(x^2)$, de modo que hacemos aparecer el factor -2 que necesitamos simplemente multiplicando y dividiendo por este número:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\operatorname{sen}(x^2)dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} \left(-2x\operatorname{sen}(x^2)\right) dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2)\Big|_0^{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Vemos entonces que conocer la regla de la cadena amplía nuestros recursos para el cálculo de primitivas.

Ejercicio * 4.4.9

1. Calcular las derivadas de e^{x^2}, $e^{\operatorname{sen} x}$ y $\cos(e^x)$.
2. Hallar primitivas de xe^{x^2}, $e^{\operatorname{sen} x}\cos x$, $e^x\operatorname{sen}(e^x)$.

Ejercicio 4.4.10 Usar la regla de la cadena para calcular las derivadas de $e^{\log x}$ y $\log(e^x)$. Interpretar el resultado hallado.

Ejercicio 4.4.11 De las funciones f, g y sus derivadas se conocen los valores que aparecen en la tabla.

x	f	g	f'	g'
0	2	4	-2	3
1	7	16	-1	4/3
2	-1	0	$-1/2$	1/3
3	-1	2	$-1/6$	0

1. ¿Para qué valores de x es posible calcular la derivada $(g \circ f)'(x)$ a partir de esa información, y qué valor toma $(g \circ f)'(x)$?
2. Contestar las mismas preguntas para $f \circ g$.

Ejercicio 4.4.12 Derivada de un cociente

1. Mostrar directamente, a partir del cálculo de los cocientes incrementales y su límite, que
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$
Sugerencia: usar la identidad
$$\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x^2 + x\Delta x}$$
para escribir los incrementos de $1/x$.
2. Usar la regla de la cadena para mostrar que
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}. \tag{4.24}$$
3. A partir de la fórmula (4.24) y la fórmula de derivación del producto de funciones demostrar que
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \tag{4.25}$$
Sugerencia:
$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}.$$
4. Obtener la fórmula (4.25) por el procedimiento alternativo de calcular directamente sus cocientes incrementales y pasar al límite.

4.4.3. Derivadas de funciones inversas

Cualquier número $x > 0$ tiene una única raíz cuadrada positiva $\sqrt{x}$. Calcular raíces cuadradas de números positivos define entonces una función $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ por la fórmula
$$f(x) = \sqrt{x}.$$
Esta función satisface
$$f^2(x) = x, \quad x > 0.$$
Al derivar respecto a x esta igualdad, empleando la regla de la cadena, resulta
$$2f(x)f'(x) = 1,$$
expresión de la que concluimos
$$f'(x) = \frac{1}{2f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{4.26}$$

Podemos hacer el cálculo al revés, a partir de la igualdad

$$f(x^2) = x, \quad x > 0.$$

Haciendo uso de la regla de la cadena concluimos

$$f'(x^2)2x = 1, \quad x > 0.$$

De aquí despejamos

$$f'(x^2) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2}}, \quad x > 0.$$

Escribiendo $y = x^2$ y teniendo en cuenta que cualquier número positivo puede escribirse como el cuadrado de otro número, concluimos que

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad y > 0,$$

que es exactamente lo mismo que (4.26. Sólo estamos llamando y a la variable que antes se llamaba x.

Ejercicio 4.4.13 Mostrar que el incremento de $\sqrt{x}$ cuando x varía hasta $x + \Delta x$ es igual a

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

y usar esta expresión para mostrar la fórmula (4.26) por un camino diferente, a partir de la consideración de los cocientes incrementales para $\sqrt{x}$. Sugerencia: tener en cuenta que $\sqrt{x + \Delta x} \to \sqrt{x}$ cuando $\Delta x \to 0$.

Ejercicio 4.4.14 Utilizar la regla de la cadena para calcular la derivada de $\sqrt{1 - x^2}$.

La operación de tomar raíces cuadradas es la inversa de la de elevar al cuadrado. Si pensamos en elevar al cuadrado como una nueva función $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por la fórmula

$$g(y) = y^2$$

tenemos que

$$g(f(x)) = x, \quad f(g(y)) = y, \tag{4.27}$$

lo que puede decirse en palabras como "el cuadrado de la raíz cuadrada de x es x" y "la raíz cuadrada del cuadrado de y es y". Observemos que para que la segunda afirmación sea cierta debemos limitarnos a tomar $y \geq 0$.

Ejercicio 4.4.15 ¿Qué obtenemos cuando para $y < 0$ calculamos $\sqrt{y^2}$?

Las fórmulas (4.27) expresan que la función g deshace la transformación que produce la f, y viceversa. Dado que en la vida a veces es importante poder deshacer lo que uno hace, la modelización matemática refleja este hecho a través del concepto de *función inversa*: tomar raíces cuadradas es el inverso de elevar al cuadrado, restar un número es la operación inversa de sumarlo, dividir entre un número es la operación inversa de multiplicar, el logaritmo es la inversa de la exponencial y cada función trigonométrica admite una inversa cuando se considera sobre un intervalo adecuado de valores.

El argumento que nos permitió calcular la derivada de $\sqrt{x}$ es el caso particular de un argumento general: si admitimos que la derivada $f'(x)$ existe, entonces la regla de la cadena nos permite calcularla a partir del conocimiento de $g'(y)$. Por ejemplo, derivando respecto a x la igualdad $g(f(x)) = x$ obtenemos

$$g'(f(x))f'(x) = 1,$$

de donde sale que

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}. \tag{4.28}$$

Ejercicio 4.4.16 Aplicar la fórmula general (4.28) al caso particular en que $f(x) = \sqrt{x}$, para reencontrar la derivada de la raíz cuadrada.

Ejercicio 4.4.17 Si a es un número real cualquiera, las funciones

$$f(x) = x + a, \quad g(x) = x - a,$$

son inversas una de la otra. Estudiar qué forma toma la ecuación (4.28) en este ejemplo.

Ejercicio 4.4.18 Si a es un número real diferente de 0 cualquiera, las funciones

$$f(x) = ax, \quad g(x) = \frac{x}{a},$$

son inversas una de la otra. Estudiar qué forma toma la ecuación (4.28) en este ejemplo.

Ejercicio 4.4.19 Aplicar la fórmula (4.28) al caso particular en que $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ejercicio 4.4.20 La función log puede definirse como la inversa de la exponencial $f(x) = e^x$. Usar el hecho de que la derivada de f es la propia f para calcular la derivada de log.

Ejercicio 4.4.21 Mostrar las siguientes fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas:

1. $\operatorname{arc\,sen}'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$;
2. $\arccos'(x) = -1/\sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$;
3. $\operatorname{arc\,tg}'(x) = 1/(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.4.22 Mostar que si f es una función derivable que nunca se anula, entonces

$$(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Observación 40 La notación con diferenciales ayuda a recordar las fórmulas de esta sección. Si $y = f(x)$ y $x = g(y)$ escribimos

$$\frac{dx}{dy} = g'(y).$$

Con esta notación expresamos la derivada de y respecto a x en la forma

$$\frac{dy}{dx},$$

que sugiere

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

Esta es justamente la fórmula (4.28).

4.4.4. Una demostración rigurosa de la regla de la cadena

El objetivo de esta sección es completar una demostración rigurosa de la regla de la cadena (teorema 3). El fallo del argumento que dimos antes es que al formar el cociente incremental

$$\frac{\Delta z}{\Delta y}$$

necesitamos dividir entre Δy, que es una cantidad que depende de Δx y que no podemos asegurar que sea diferente de 0. Por lo tanto, la división podría ser imposible.

Para estudiar la derivada de la función compuesta $g(f(x)$ debemos analizar el incremento

$$\Delta z = g(f(x + \Delta x) - g(f(x)).$$

Comenzamos analizando la variación Δy que sufre f cuando x se incrementa hasta $x + \Delta x$. Tenemos que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{4.29}$$

Como f es derivable en x sabemos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x)$$

cuando $\Delta x \to 0$. Esta última igualdad es equivalente a decir que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon(x), \tag{4.30}$$

donde

$$\epsilon(x) \to 0$$

cuando $\Delta x \to 0$. Combinando (4.29) con (4.30) obtenemos

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x. \tag{4.31}$$

.

Ejercicio 4.4.23 Mostrar que para g cerca del punto $y = f(x)$ vale una fórmula

$$g(y + \Delta y) = g(y) + g'(y)\Delta y + \epsilon_2(\Delta y)\Delta y, \tag{4.32}$$

donde $\epsilon_2(\Delta y) \to 0$ cuando $\Delta y \to 0$.

Escribiendo

$$f(x + \Delta x) = y + \Delta y,$$

podemos usar ahora (4.31) en (4.32) para escribir los incrementos de $g \circ f$ en función de los incrementos de x:

$$g(f(x + \Delta x)) = g(f(x)) + g'(f(x))\left(f'(x)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x\right) + \epsilon_2(\Delta y)\Delta y.$$

Haciendo algunos cálculos encontramos

$$g(f(x + \Delta x)) - g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)\Delta x + g'(f(x))\epsilon(\Delta x)\Delta x + \epsilon_2(\Delta y)\Delta y.$$

Entonces

$$\frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = g'(f(x))f'(x) + g'(f(x))\epsilon(\Delta x) + \epsilon_2(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Cuando $\Delta x \to 0$, el cociente $\Delta y/\Delta x$ en el último sumando tiene límite $f'(x)$ y está multiplicado por ϵ_2 que tiende a cero. El primer sumando del miembro de la derecha también tiende a cero. Por tanto todo el miembro de la derecha tiende a $g'(f(x))f'(x)$.

4.5. Integración por sustitución

La regla de la cadena (4.18) puede traducirse inmediatamente en una fórmula para el cálculo de primitivas e integrales definidas. Si $F(y)$ es una primitiva de $f(y)$ entonces

$$F'(y) = f(y),$$

por lo que la derivada de la composición $F \circ g$ es

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

afirmación a la que puede darse la vuelta para decir que $F(g(x)$ es una primitiva de $f(g(x)g'(x)$ y a la que podemos recurrir para calcular

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(a)) - F(g(b) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy \tag{4.33}$$

El uso que daremos a este resultado es introducir una variable

$$y = g(x)$$

para reducir una integral del tipo en

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$$

en una de la forma

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

que puede ser evaluada a través de la regla de Barrow como

$$F(g(b)) - F(g(a))$$

una vez que seamos capaces de determinar una primitiva F de f.

Ejemplo 81 Calcularemos ahora

$$\int_0^2 xe^{x^2}.$$

Es un cálculo que ya hemos propuesto en el ejercicio 4.4.9, pero que retomaremos para ilustrar un procedimiento formal que ayuda a manejarlo. En este ejemplo es natural tomar como nueva variable

$$y = x^2,$$

porque un factor x aparece multiplicando la exponencial de x^2 y x es, a menos de un factor 2, la derivada de x^2. Podemos escribir entonces

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \tag{4.34}$$

que podemos manipular formalmente como

$$dy = 2xdx. \tag{4.35}$$

En la integral aparece un factor x, pero no el 2. Este formalismo nos permite escribir

$$xdx = \frac{dy}{2}. \tag{4.36}$$

Con el cambio de variable, la exponencial e^{x^2} se transforma en e^y. Ya tenemos todo lo que aparece dentro del signo de integral transformado a la nueva variable. Para los límites de integracion resumimos los resultados en la siguiente tabla

x	y
0	0
2	4

.

Poniendo junta toda esta información, concluimos

$$\int_0^2 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 e^y dy = e^4 - 1.$$

Observación 41 Vale la pena destacar la utilidad que tuvo usar en (4.34) la notación

$$\frac{dy}{dx}$$

para la derivada $f'(x)$. A partir de esa fórmula obtuvimos las igualdades formales (4.35) y (4.36), que nos permitieron operar con mucha facilidad para hacer el cambio de variable en la integral. ♠

Ejemplo 82 Calcularemos

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}(3\pi x + \pi/2)dx.$$

Introducimos entonces

$$y = 3x + \pi/2,$$

de modo que $dy = 3dx$ y $dx = dy/3$. Para los límites de integración tenemos

x	y
$\pi/6$	π
$\pi/2$	2π

.

De modo que

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}(3\pi x + \pi/2)dx = \frac{1}{3}\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}(y)dy = -\cos(y)|_{\pi}^{2\pi} = -2.$$

Ejercicio 4.5.1 Calcular

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\, dx, \qquad \int_0^3 \sqrt{x+1}\, dx, \qquad \int_1^2 \left(3e^{-2x} + 5x\right)\, dx,$$

Ejercicio 4.5.2 Calcular

$$\int_0^2 xe^{x^2}, \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) dx.$$

Ejercicio 4.5.3 Mostar que si f es una función derivable que nunca se anula, entonces

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Calcular una primitiva de $\tan x$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Ejercicio 4.5.4 Calcular las integrales

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^6}dx, \qquad \int_{0}^{\ln 4} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx, \qquad \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}dx, \qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x}\right) dx.$$

Ejercicio 4.5.5 Calcular las integrales

$$\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx, \qquad \int_{0}^{1} \frac{1}{e^x+1}dx, \qquad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\tan x} + \tan x\right) dx, \qquad \int_{9}^{16} \frac{\sqrt{\sqrt{x}-3}}{\sqrt{x}}dx.$$

En nuestro próximo ejemplo la motivación para hacer un cambio de variable no proviene de la fórmula de la integral, sino de la geometría que está por detrás de ella.

Ejemplo 83 Para $x \in (-1, 1)$ evaluaremos la integral

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}dt, \tag{4.37}$$

El integrando es

$$y = \sqrt{1-t^2}.$$

Elevando al cuadrado encontramos

$$y^2 + t^2 = 1,$$

por lo que la integral que estamos considerando remite al cálculo del área encerrada bajo una circunferencia. Dado que el ángulo θ tal que

$$t = \cos\theta$$

es un parámetro natural para este problema, lo tomaremos como variable.

Entonces apelamos al formalismo del calculo con dt y $d\theta$ para manejar el cambio en forma eficiente y escribimos

$$dt = -\operatorname{sen}\theta d\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}d\theta.$$

Los límites de integración cambián según

$$\begin{array}{c|c} t & \theta \\ \hline 0 & \pi/2 \\ x & \arccos x \end{array}.$$

Poniendo toda esta información junta en la integral concluimos

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{\arccos x} \left(1-\cos^2\theta\right) d\theta.$$

De este modo, la sustitución reduce el problema al cálculo de una integral que podemos resolver haciendo cosas más o menos estándar. Dejamos planteado el ejercicio de terminar su determinación.

Ejercicio 4.5.6 Terminar el cálculo evaluando la integral. Sugerencia: usar la fórmula de arcos dobles

$$\cos^2\theta = \frac{1 + cos(2\theta)}{2}$$

para manejar el cuadrado del coseno.

Ejercicio 4.5.7 Para $R > 0$ y $x \in (-R, R)$ calcular

$$\int_0^x \sqrt{R^2 - t^2}dt.$$

Es interesante observar que la integral del ejemplo puede evaluarse por otros dos procedimientos alternativos.

Ejercicio 4.5.8

1. Para $x \in (-1, 1)$ calcular (4.37) sin recurrir al cálculo diferencial, interpretando la integral como el valor del área de una cierta región del círculo $t^2 + y^2 \leq 1$ en el plano (t, y).

2. Hacer el cálculo aplicando integración por partes. Sugerencia: interpretar

$$\sqrt{1 - t^2} = 1 \times \sqrt{1 - t^2},$$

y aplicar partes usando una primitiva de 1 y la derivada de $\sqrt{1 - t^2}$.

Ejercicio 4.5.9 Para $R > 0$ y $x \in (-R, R)$ calcular

$$\int_0^x \sqrt{R^2 - t^2}dt.$$

Sugerencia: reducir este problema al caso $R = 1$. ♣

Nuestra próxima serie de ejercicios propone una serie de propiedades del cálculo de integrales que pueden obtenerse aplicando técnicas de cambio de variables o argumentos puramente geométricos acerca de cómo se relaciona el gráfico de una función $f(x)$ con los gráficos de $f(ax)$, $f(x + b)$ y $f(ax + b)$. Sugerimos al lector que explore las dos vías de abordar estos problemas.

Ejercicio 4.5.10 Decimos que una función f es *par* si para todo $x \in \mathbb{R}$ se satisface $f(x) = f(-x)$. Mostrar que si f es par entonces

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx. \tag{4.38}$$

Interpretar geométricamente este resultado. Una función f es *impar* si para todo $x \in \mathbb{R}$ se satisface $f(x) = -f(-x)$. Â¿Cuál es la fórmula análoga a 4.38 para funciones impares?

Ejercicio 4.5.11 Más sobre funciones pares e impares.

- Mostrar que una potencia x^n con n natural es par si y solo si n es par, e impar si y solo si n es impar.
- Â¿Qué tipo de paridad tienen las funciones trigonométricas y la función exponencial?
- Mostrar que la derivada de una función par es impar, y viceversa.
- Mostrar que la única función que es a la vez par e impar es la función constante 0.

Ejercicio 4.5.12 Para resolver este ejercicio sugerimos representar gráficamente las situaciones que se describen en cada una de sus partes.

1. Definimos en el plano (x, y) la transformación
$$T(x, y) \mapsto (x/2, y)\,.$$
Si una región del plano tiene área A, Â¿cuál es el área de su imagen por T?

2. Sean $f(x)$ una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, a y b dos números reales y R la región del plano encerrada entre $x = 2a$, $x = 2b$, el eje Ox y el gráfico de $f(x)$. Mostrar que la imagen de R por T es la región del plano encerrada entre $x = a$, $x = b$, el eje Ox y el gráfico de $f(2x)$.

3. Usar los argumentos geométricos de las partes anteriores para concluir que
$$\int_a^b f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} f(x)dx. \tag{4.39}$$

4. Mostrar la igualdad (4.39) usando la técnica del cambio de variables para el cálculo de integrales.

Ejercicio 4.5.13 Para una cierta función f, nos es conocido que
$$\int_0^{12} f(3x)\,dx = 1.$$
Determinar el valor de a para el que la integral
$$\int_0^a f(x)\,dx,$$
puede calcularse a partir de esa información y hallar el valor de la integral.

Ejercicio 4.5.14 Sea f una función par que satisface
$$\int_0^1 f(5x)dx = 3.$$
Determinar el valor de
$$\int_{-5}^{5} f(x)dx.$$

A. 0;

B. 6/5;

C. 6;

D. 15;

E. 30.

Ejercicio 4.5.15 Mostrar que para cualquier función f y constantes a, b y c se satisface la igualdad

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx.$$

Hacerlo por medio de un argumento geométrico basado en la definición de integral como área bajo el gráfico de la función, y la relación que hay entre los gráficos de $f(x)$ y $f(x+c)$.

Ejercicio 4.5.16 Se sabe que

$$\int_1^2 f(x)dx = 5.$$

Entonces

A. $\int_1^2 f(x+7)dx = 5$;

B. $\int_8^9 f(x+7)dx = 5$;

C. $\int_{-6}^{-5} f(x+7)dx = 5$;

D. $\int_{-6}^{-5} f(x+7)dx = -5$;

Elegir la opción correcta.

Ejercicio 4.5.17 Una función f es periódica con período T si la igualdad

$$f(x+T) = f(x)$$

se satisface para todo x.

1. Mostrar que si f es una función periódica de período $T > 0$, para cualquier elección de a se cumple
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$
2. Concluir que entonces
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$$
se satisface para cualquier elección de a y b.

Ejercicio 4.5.18 Sea f una función periódica de período 2 tal que

$$\int_0^2 f(x)dx = -5$$

y g una función periódica de período 3 tal que

$$\int_0^3 g(x)dx = 7.$$

Determinar el valor de

$$\int_0^{24} (f(x) + g(x))\, dx.$$

Ejercicio 4.5.19 Sean f y g dos funciones periódicas de período 2, tales que f es par, g es impar y satisfacen

$$\int_0^1 f(x)dx = -7 \qquad \int_0^1 g(x)dx = 11.$$

Determinar el valor de

$$\int_{-1}^{2} (5f(x) - 2g(x))\, dx.$$

A. -83;

B. -61;

C. -105;

D. -12;

E. -32.

La función valor absoluto tiene una primitiva relativamente sencilla. Conocerla proporciona un abordaje alternativo para los problemas en que hay que calcular integrales con valores absolutos.

Ejercicio 4.5.20 Mostrar que $x|x|$ es una primitiva de $|x|$. Hacerlo por dos procedimientos:

1. calculando la derivada de $x|x|$ en cada punto;
2. para cada x, calculando la integral de valor absoluto en el intervalo comprendido entre 0 y x.

Ejercicio 4.5.21 Calcular la integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} |1 - x|\, dx.$$

A. $-\dfrac{15}{8}$.

B. $\dfrac{9}{8}$.

C. $\dfrac{15}{8}$.

D. $\dfrac{17}{8}$.

E. $\dfrac{55}{8}$.

Ejercicio 4.5.22 Hallar, en función de x, una fórmula que se pueda evaluar directamente para calcular

$$F(x) = \int_{-2}^{x} (2 - |t + 1|)\, dt.$$

Determinar el valor máximo que toma F y el punto en que lo alcanza. Hallar los puntos en que F se anula.

Ejercicio 4.5.23 Hallar todos los valores de x en que se anula

$$F\left(x\right) = 10 + \int_{5}^{x} \left(-\frac{t}{2} - \left|\frac{t}{4} - 1\right|\right) \, dt.$$

Ejercicio 4.5.24 Hallar primitivas de las funciones parte positiva x_{+} y parte negativa x_{-}.

Ejercicio 4.5.25 Hallar el valor mínimo m y el valor máximo M que la función

$$F(x) = \int_{0}^{x} \left((t-3)_{-} - 1\right) \, dt$$

toma en el intervalo $[-1, 9]$.