# Capítulo 3

# Integrales: cálculo por medio de primitivas

El objetivo de este capítulo es desarrollar un método sistemático de cálculo de integrales

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.1}$$

para una clase bastante amplia de integrandos $f$. El procedimiento que usaremos podría parecer bastante audaz si no fuera porque varios siglos de historia ya han demostrado que conduce a buen puerto: en vez de considerar una integral como (3.1) trabajaremos con infinitas de ellas, estudiando la función

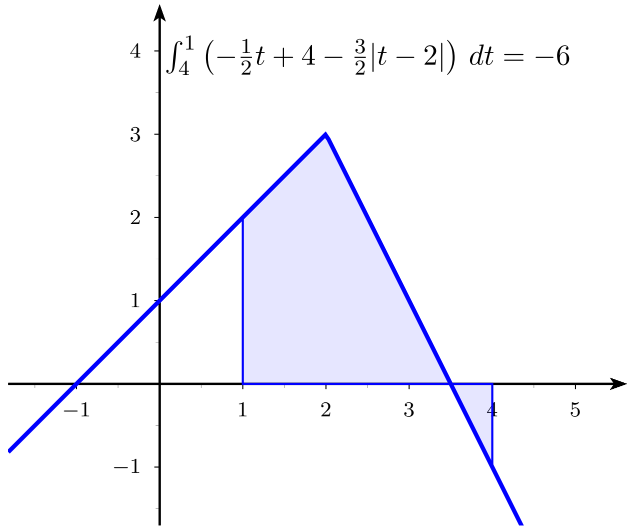
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{3.2}$$

que se obtiene cuando el límite superior de integración en (3.1) se considera variable.

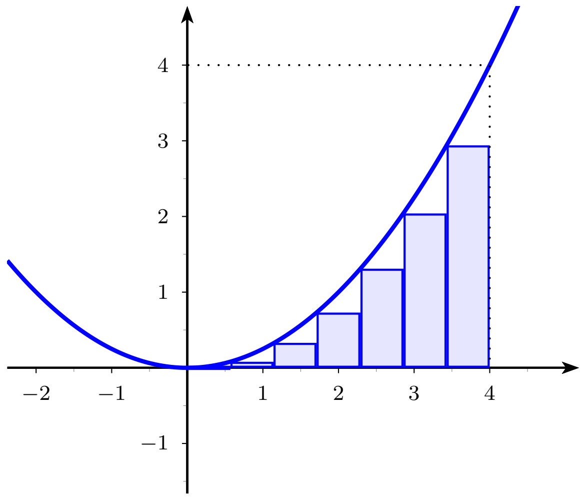
El análisis de la variación de $F$ nos conducirá al método de *cálculo de primitivas* para la evaluación de integrales. Además, ya hemos visto en el capítulo **??** que el estudio de la función $F$ es interesante en sí mismo, tanto por sus propiedades teóricas como por sus aplicaciones.

Aunque el cálculo de primitivas tiene un lugar importante en el cálculo de integrales, recordemos que las integrales están definidas independientemente, como el resultado de calcular áreas siguiendo ciertas convenciones de signo, y pueden calcularse por diversos métodos.

- Métodos de la geometría elemental. Cuando los gráficos de funciones delimitan regiones formadas por rectángulos, triángulos y sectores de círculo, sus integrales pueden calcularse con argumentos geométricos relativamente sencillos.




- Sumas de Riemann y otros procesos de aproximación. Es posible calcular una aproximación tan exacta como se desee de una integral aproximando el área encerrada bajo su gráfico por la unión de figuras más simples. Una manera de hacerlo es construyendo una serie de rectángulos con alturas calculadas a partir del integrando, lo que conduce a aproximar la integral por sumas de Riemann. También se han desarrollado muchos otros métodos de este tipo, que en la actualidad suelen implementarse con la ayuda de computadoras que se ocupan de gestionar el gran volumen de cálculo que requieren.

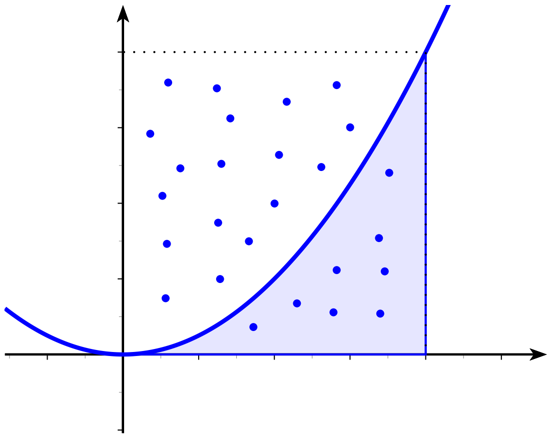



- Métodos de cálculo de primitivas. Son los métodos que estamos comenzando a estudiar en este capítulo. Son muy populares en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral y tienen mucho interés conceptual. Además permiten tratar con exactitud las integrales de las funciones más importantes del análisis matemático. Lamentablemente, el conjunto de funciones que se puede integrar de esta manera es pequeño. Por ejemplo, a pesar de su aparente simplicidad, las integrales

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad \int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx,$$

no pueden calcularse con estos métodos.

- Métodos de Monte-Carlo. Son métodos de cálculo aproximado que consisten en generar al azar un nube de puntos en un rectángulo que contenga el gráfico de la función a integrar y luego contar cuántos caen por debajo del gráfico y cuantos por encima. Esta proporción permite estimar el área de la región bajo el gráfico. El cálculo es mas preciso cuantos más puntos se usen.

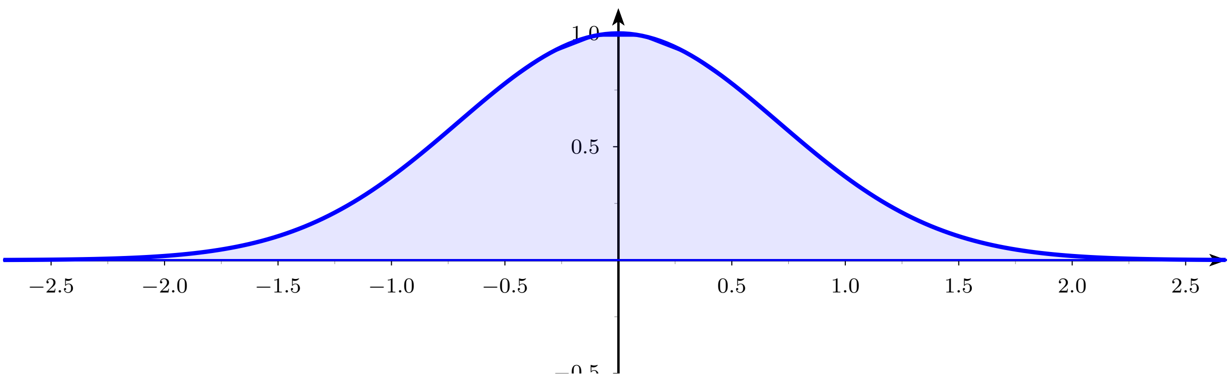
  

  Requiere de la capacidad de generar masivamente puntos independientes unos de otros, para hacer el experimento.

- Astucia o resultados profundos que relacionan las integrales con otra cantidades que se puedan determinar. En esta categoría cae el interesantísimo resultado

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

  que dice que el valor de una integral en la que interviene el número $e$ y se extiende hasta el infinito, está relacionado con el número $\pi$ que a su vez está relacionado con el perímetro y el área del círculo. Curioso, ¿no?



## 3.1. La variación de las funciones

Las funciones son un objeto interesante de estudiar porque tienen variaciones. Tan es así, que cuando en el lenguaje coloquial decimos que una cierta cosa es función de otra está implícito que la primera cosa cambia cuando la segunda lo hace. Para la matemática es útil ampliar un tanto esta noción de todo función y admitir también a las constantes entre las funciones, del mismo modo que aceptamos al cero entre los números, pero eso no debe distraernos de la importancia de comprender la forma en que las funciones varían. Esta sección está destinada a estudiar la variación de las funciones reales de variable real. En la sección **??** analizaremos los incrementos absolutos, que son simplemente las diferencias entre los valores que una función toma para valores diferentes de su argumento. En la sección **??** haremos algo más sutil, pero generalmente más importante: consideraremos los incrementos de la función en relación a los incrementos de su argumento. Esto nos conducirá a la importante noción de *cociente incremental* y, posteriormente, a la de *derivada*.

### 3.1.1. Los incrementos de las funciones

Una función $f$ asocia a cada $x$ de su dominio un elemento $f(x)$ de su codominio. Si la función toma valores en el conjunto de los números reales, que es el caso que consideraremos en lo sucesivo, $f(x)$ es un número real. Cuando una función que toma valores en los reales se evalúa en dos valores de $x$, que llamaremos $x_1$ y $x_2$, se obtienen entonces dos números $f(x_1)$ y $f(x_2)$, en general diferentes. Dado que son números, podemos restarlos. Llamaremos $\Delta f$ a esta diferencia:

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

es el incremento de la función $f$ entre $x_1$ y $x_2$, y nos da una idea de qué tan diferentes son $f(x_1)$ y $f(x_2)$.

**Ejercicio 3.1.1** Mostrar que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es constante si y solo si todos los posibles incrementos $\Delta f$ son iguales a cero.

En la representación gráfica habitual de las funciones reales en el plano $(x, y)$ dibujamos todos los puntos de la forma

$$y = f(x).$$

El incremento $\Delta f$ es entonces la diferencia de alturas entre los puntos $(x_2, f(x_2)$ y $(x_1, f(x_1)$, tal como se muestra en la Figura 3.90.

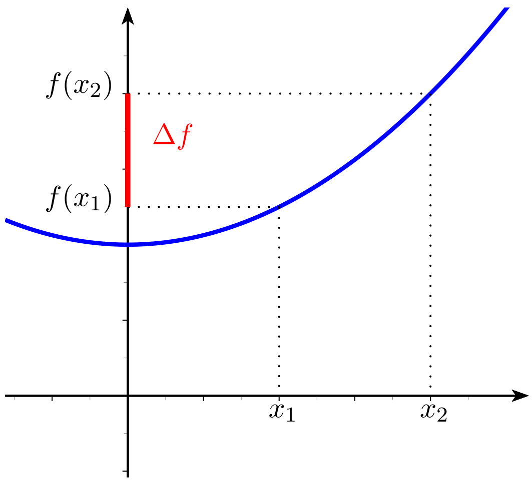



Figura 3.90

**Observación 25** El uso frecuente de la representación gráfica de $y = f(x)$ hace que también sea corriente indicar la diferencia entre los valores de la función con el símbolo $\Delta y$ en vez de $\Delta f$. Con esta notación escribiremos

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

para indicar el incremento de la función entre $x_1$ y $x_2$. ♠.

**Ejemplo 40** En la Figura 3.91 aparece en el plano $(x, y)$ el gráfico de la función

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}. \tag{3.3}$$

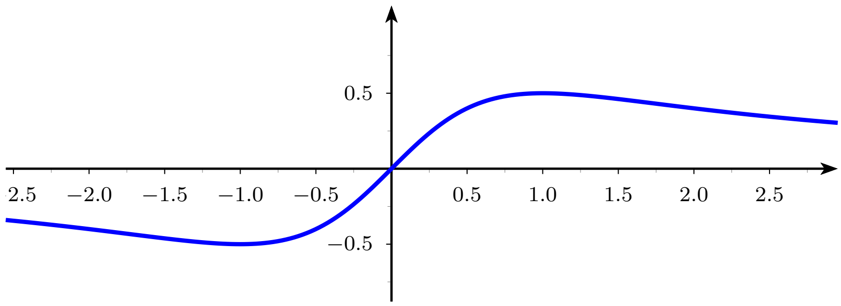



Figura 3.91

En la tabla aparecen, con una precisión de seis cifras decimales, los valores de $f$ para 21 valores de $x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1{,}0$ | $-0{,}500000$ | $-0{,}3$ | $-0{,}275229$ | $0{,}4$ | $0{,}344828$ |
| $-0{,}9$ | $-0{,}497238$ | $-0{,}2$ | $-0{,}192308$ | $0{,}5$ | $0{,}400000$ |
| $-0{,}8$ | $-0{,}487805$ | $-0{,}1$ | $-0{,}099010$ | $0{,}6$ | $0{,}441176$ |
| $-0{,}7$ | $-0{,}469799$ | $0{,}0$ | $0{,}000000$ | $0{,}7$ | $0{,}469799$ |
| $-0{,}6$ | $-0{,}441176$ | $0{,}1$ | $0{,}099010$ | $0{,}8$ | $0{,}487805$ |
| $-0{,}5$ | $-0{,}400000$ | $0{,}2$ | $0{,}192308$ | $0{,}9$ | $0{,}497238$ |
| $-0{,}4$ | $-0{,}344828$ | $0{,}3$ | $0{,}275229$ | $1{,}0$ | $0{,}500000$ |

Tanto el gráfico como la tabla muestran la variación de $f$. ♣

La variación de una función $f$ se produce por la variación de su argumento $x$ entre dos valores.

**Ejemplo 41** Cuando para la función $f$ en (3.3) tomamos $x_0 = 0{,}7$ y $x_1 = 0{,}9$ el incremento en la variable $x$ es

$$\Delta x = 0{,}9 - 0{,}7 = 0{,}2.$$

El incremento en la función es

$$\Delta f = f(0{,}9) - f(0{,}7) \simeq 0{,}497238 - 0{,}469799 = 0{,}027439.$$

Entre $x_0 = 0$ y $x_1 = 0{,}2$ el incremento $\Delta x$ de la variable independiente también toma el mismo valor, pero incremento de $f$ es

$$\Delta f = f(0{,}2) - f(0) \simeq 0{,}192308 - 0 = 0{,}192308.$$

Observemos que para un mismo valor del incremento $\Delta x$, los valores del incremento $\Delta f$ son aproximadamente diez veces más grandes.

**Ejercicio 3.1.2** El incremento $\Delta x$ de la variable $x$ entre dos filas consecutivas de la tabla es siempre igual a 0,1. Determinar las filas entre las que los incrementos $\Delta f$ son los mayores y los menores posibles. ¿Cómo se refleja esto en el gráfico de $f$?

**Ejemplo 42** Cuando tomamos $x_0 = 0$ y $x_1 = 0{,}1$ el incremento que observamos en la función $f$ es

$$\Delta f = f(0{,}1) - f(0) \simeq 0{,}099010 - 0 = 0{,}099010,$$

un valor muy próximo a 0,1. Esta variación de 0,1 en los valores de $f$ es justamente la que se observa entre $x_0 = 0{,}5$ y $x_1 = 1$. Observamos en este ejemplo que dos valores diferentes de $\Delta x$ pueden producir prácticamente la misma variación $\Delta f$ en la función $f$.

**Ejercicio 3.1.3** Determinar los valores de $\Delta x$ que hacen que el incremento de $f$ entre $x_0 = 0$ y $x_1 = 0 + \Delta x$ sea exactamente igual a 0,1. ♠

**Ejemplo 43** Calcularemos

$$I = \int_a^b \left(\frac{5}{2} - \frac{x}{2}\right) dx.$$

Es la integral de una función lineal, que podemos evaluar con la fórmula generalizada para el área del trapecio

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{b}{2} + \frac{5}{2} - \frac{a}{2}\right)(b-a) = \frac{5}{2}(b-a) - \frac{1}{2}(b+a)(b-a).$$

Haciendo los cálculos y agrupando los sumandos que contienen $a$ y los que contienen $b$ encontramos

$$I = \frac{5}{2}(b-a) - \frac{1}{2}(b^2-a^2) = \frac{5}{2}b - \frac{1}{2}b^2 - \left(\frac{5}{2}a - \frac{1}{2}a^2\right). \tag{3.4}$$

Si introducimos la función

$$G(x) = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x^2$$

encontramos que la integral es igual al incremento

$$\Delta G = G(b) - G(a)$$

de la función $G$ entre $x = a$ y $x = b$.

**Ejercicio 3.1.4** Generalizar el resultado de este ejemplo, mostrando que cualquier integral de la forma

$$I = \int_a^b (mx + n)\,dx,$$

puede calcularse como el incremento $\Delta F$ entre $a$ y $b$ de la función

$$F(x) = \frac{m}{2}x^2 + nx$$

**Observación 26** La notación $\Delta F$ para los incrementos tiene la ventaja el defecto de que no hacer explícito entre que puntos $a$ y $b$ se está calculando el incremento. Existe una notación alternativa, muy corriente en la jerga del cálculo de integrales, según la cual el incrememto $\Delta F$ entre $x = a$ y $x = b$ se indica como

$$\Delta F = F(x)|_a^b\,.$$

Con esta notación, podemos escribir el enunciado del ejercicio 3.1.4 en la forma

$$\int_a^b (mx+n)\,dx = \left(\frac{m}{2}x^2 + nx\right)\Big|_a^b \tag{3.5}$$

Esta nueva notación contiene toda la información acerca de cuál es la función que se está incrementando y entre qué puntos se calcula el incremento. Por lo tanto, es mucho más compleja. Así que también mantendremos el uso de la notación $\Delta F$ o $\Delta y$, que es mucho más concisa, y la emplearemos cuando el contexto provea la información necesaria para interpretarla a pesar de toda la ambigüedad que puede llegar a tener. ♠

**Ejercicio 3.1.5** Aplicando directamente la fórmula (3.5),

1. calcular la integral
$$\int_{-1}^{3}\left(5-\frac{2}{3}x\right)dx.$$
2. Para cada valor de $x$, calcular
$$\int_{2}^{x}\left(\frac{5}{2}-\frac{t}{2}\right)dt.$$
Comparar con los resultados del ejemplo 1.6.1 en la sección 1.6 ♣

**Ejercicio 3.1.6** Dada una función $f$ y un número $x_0$ definimos

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Mostrar que el incremento $\Delta F$ entre $x = a$ y $x = a + \Delta x$ es

$$\Delta F = \int_{a}^{a+\Delta x} f(t)dt.$$

**Ejercicio 3.1.7** Para $x \in \mathbb{R}$ definimos la función

$$F(x) = \int_1^x (t + 4 - 3|t-4|)\;dt.$$

1. Consideremos $x = 4$.
   *a*) Para cualquier $\Delta x > 0$ calcular el incremento $\Delta F$ de $F$ entre $x = 4$ y $x = 4 + \Delta x$.
   *b*) Para cualquier $\Delta x < 0$ calcular el incremento $\Delta F$ de $F$ entre $x = 4$ y $x = 4 + \Delta x$.
2. Para cualquier valor de $x \neq 4$ y valores de $|\Delta x|$ suficientemente pequeños como para que 4 no caiga en el intervalor entre $x$ y $x + \Delta x$, calcular los incrementos $\Delta F$.

### 3.1.2. Incrementos relativos: cocientes incrementales

El ejemplo 42 nos muestra que incrementos $\Delta x$ muy diferentes en la variable $x$ pueden producir incrementos iguales, o muy parecidos, en la función $f$. Esta observación se conecta con una pregunta muy natural en este contexto: un incremento dado, ¿es grande o pequeño? Podemos analizar esto en un ejemplo algo concreto: ¿un desnivel de un metro, es grande o chico? Depende de la situación, si estamos colgando cabeza abajo con nuestra cabeza un metro por debajo de nuestros pies seguramente nos parecerá grande y estaremos incómodos. Pero si la diferencia de altura entre dos esquinas de una misma manzana es de un metro entonces seguramente estemos en una cuadra con una cuesta suave. Si la misma diferencia de alturas se produce entres dos mojones consecutivos de una carretera, el desnivel podría resultar imperceptible. Con las funciones ocurre algo parecido. Por ejemplo, la función $f$ tiene los mismos incrementos $\Delta f$ en lugares diferentes, pero su gráfico evidentemente cambia de carácter. Cerca de $x = 0$ está variando bastante, en tanto que cerca de $x = 1$ y $x = -1$ su variación es mucho menor.

La manera de distinguir estas dos situaciones es introducir una medida del incremento $\Delta f$ relativa al incremento $\Delta x$. Dadas una función real $f$, un punto $x$ y un incremento $\Delta x$ la variable $x$ definimos el *cociente incremental*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

**Ejemplo 44** Para la función $f$ de los ejemplos 40 y 42, presentamos en la tabla 44 algunos valores de $x$ y $\Delta x$ y los valores correspondientes de los incrementos $\Delta f$ y los cocientes incrementales $\Delta f/\Delta x$.

| $\Delta x$ | $\Delta f$ | $\Delta f/\Delta x$ |
|---|---|---|
| −0,3 | −0,275229 | 0,917429 |
| −0,2 | −0,192308 | 0,961540 |
| −0,1 | −0,099010 | 0,990099 |
| 0,0 | 0,000000 | |
| 0,1 | 0,099010 | 0,990099 |
| 0,2 | 0,192308 | 0,961540 |
| 0,3 | 0,275229 | 0,917429 |

| $\Delta x$ | $\Delta f$ | $\Delta f/\Delta x$ |
|---|---|---|
| 0,4 | 0,344828 | 0,862070 |
| 0,5 | 0,400000 | 0,800000 |
| 0,6 | 0,441176 | 0,735295 |
| 0,7 | 0,469799 | 0,671141 |
| 0,8 | 0,487805 | 0,609756 |
| 0,9 | 0,497238 | 0,552486 |
| 1,0 | 0,500000 | 0,500000 |

El cociente incremental establece una relación entre los incrementos sobre el gráfico de $f$ en el eje $y$ y en el eje $x$. Una forma de visualizar su significado es trazar la recta que une los puntos

$$(x, f(x)), \quad (x + \Delta x, f(x + \Delta x)) = (x + \Delta x, f(x) + \Delta f),$$

del gráfico de $f$. El cociente incremental es la pendiente de esa recta (que en general es una recta secante al gráfico de $f$).

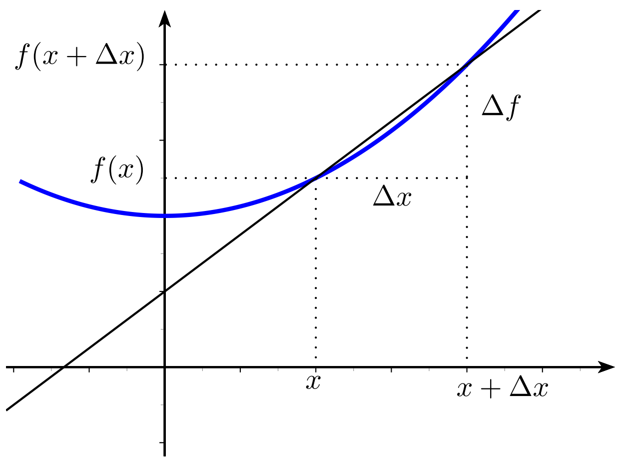



Figura 3.92

En la figura3.92 se muestran las rectas secantes al gráfico de $f$ que corresponden a la ¿primera? y ¿segunda? línea de la tabla.

**Ejemplo 45** Para las funciones lineales

$$f(x) = ax + b,$$

los incrementos

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = a(x + \Delta x) - (ax + b) = a\Delta x,$$

son proporcionales a $\Delta x$ y no dependen de $x$. Por lo tanto los cocientes incrementales siempre toman el valor constante

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = a.$$

Los gráficos de funciones lineales son rectas en el plano $(x, y)$. El coeficiente $a$ es la pendiente de esas rectas.

**Ejercicio 3.1.8**

1. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(5, -8)$ del plano $(x, y)$. Identificar la función lineal $f(x) = ax + b$ que la tiene como gráfico.

2. Hallar la función lineal $f(x) = ax + b$ cuyo gráfico es la recta que pasa por el puntos $(2, 1)$ y tiene pendiente $1/2$.

**Ejercicio 3.1.9** Consideremos la función

$$f(x) = x^2.$$

1. Para $x = -2, -1, 0, 1, 2$ calcular los incrementos $\Delta f$ y los cocientes incrementales $\Delta f/\Delta x$ para cada pareja de valores consecutivos de $x$. Dibujar las rectas secantes al gráfico de $f$ que corresponden a los cocientes incrementales calculados. Verificar la correspondencia entre los dibujos y los resultados del cálculo.

2. Para $x = 1$ y $\Delta x$ cualquiera calcular los incrementos $\Delta f$ y los cocientes incrementales $\Delta f/\Delta x$.

3. Particularizar los cálculos de la parte 2 para $\Delta x = 1/2$ y para $\Delta x = -1/4$. Dibujar las rectas secantes que corresponden a estos valores de $\Delta x$.

4. Determinar el valor de $\Delta x$ que hace que el cociente incremental $\Delta f/\Delta x$ calculado en la parte 2 sea igual a 0. Interpretar gráficamente el resultado.

En nuestra próxima serie de ejemplos vamos a estudiar ahora variaciones y cocientes incrementales de la función

$$F(x) = \int_2^x \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - 4$$

que habíamos estudiado en el ejemplo 1.6.1 de la sección 1.6.

**Ejemplo 46** Comenzamos por trabajar entre los valores $x = 1$ y $x = 1{,}5$. El incremento $\Delta F$ de la función es en este caso

$$\Delta F = F(1{,}5) - F(1).$$

Dado que tenemos dos expresiones diferentes para $F$, como una integral o como un polinomio de segundo grado en $x$, trabajaremos con ambas.

Cuando usamos la forma con la integral escribimos

$$\Delta F = \int_2^{1{,}5} \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt - \int_2^{1} \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = \int_1^{1{,}5} \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt. \tag{3.6}$$

El incremento es entonces el área del trapecio que aparecen en la figura 3.93

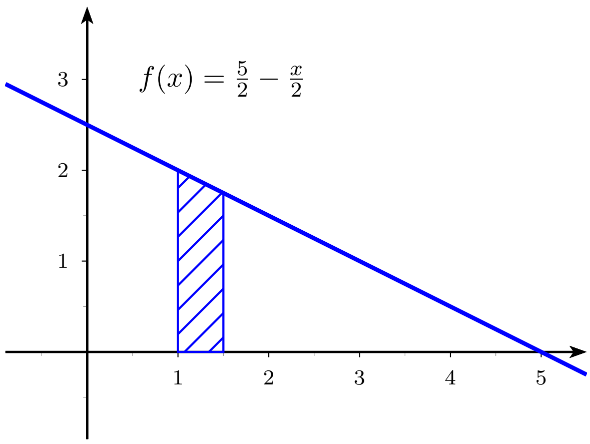



Figura 3.93

La evaluamos como

$$\Delta F = \frac{1}{2}\,(2 + 1{,}75)\,(1{,}5 - 1) = 0{,}9375.$$

Usando la forma de polinomio para evaluar la función encontramos

$$F(1{,}5) = -0{,}8125, \quad F(1) = -1{,}75, \quad \Delta F = 0{,}9375.$$

Como era de esperar, ambos procedimientos arrojan el mismo resultado.

El incremento en la variable es

$$\Delta x = 1{,}5 - 1 = 0{,}5.$$

A partir de estos números evaluamos el cociente incremental

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{0{,}9375}{0{,}5} = 1{,}875.$$

En la figura 3.93 este número es la altura media del trapecio. Tiene todavía otra interpretación geométrica como pendiente de una recta secante al gráfico de $F$, tal como se muestra en la figura 3.94

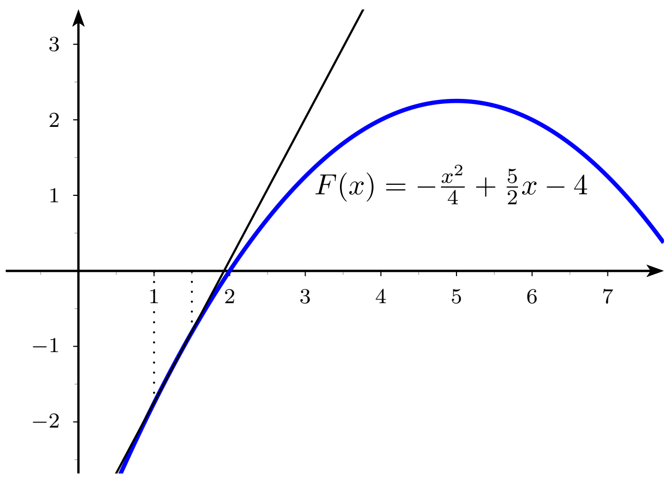



Figura 3.94

**Ejercicio 3.1.10** Hallar la ecuación de la recta secante al gráfico de $F$ por los puntos del gráfico con abscisa $x = 1$ y $x = 1{,}5$. Determinar los puntos de corte de esta secante con los ejes coordenados del plano $(x, y)$. ♣

**Ejemplo 47** La primera generalización al ejemplo 46 pasa por tomar un incremento $\Delta x$ cualquier para la variable $x$ y trabajar entre los valores $x = 1$ y $x = 1 + \Delta x$. El incremento $\Delta F$ de la función es ahora

$$\Delta F = F(1 + \Delta x) - F(1)$$

y nuevamente podremos calcularlo por dos caminos diferentes.

Primero consideramos

$$\Delta F(x) = \int_2^{1+\Delta x} \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt - \int_2^1 \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = \int_1^{1+\Delta x} \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt. \tag{3.7}$$

El incremento es ahora el área del trapecio que aparecen en la figura 3.95 y que evaluamos como La evaluamos como

$$\Delta F = \frac{1}{2}\left(2 + 2 - \frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x.$$

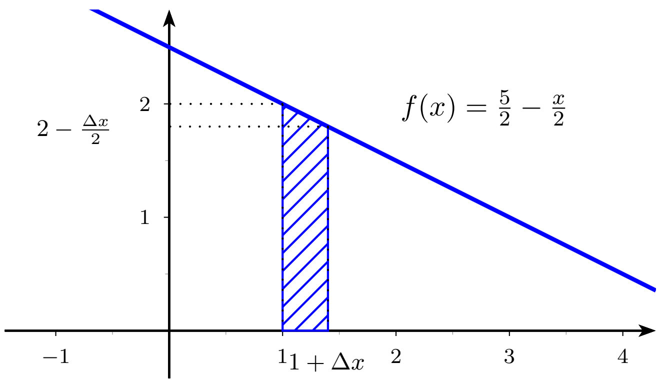



Figura 3.95

En este punto podemos organizar los cálculos al menos de dos maneras diferentes. La primera es escribir

$$\Delta F = \left(2 - \frac{\Delta x}{4}\right)\Delta x,$$

que invita a interpretar el área del trapecio como el área de un rectángulo que tiene la misma base que el trapecio y una altura igual a la altura media del trapecio. En particular, la forma líneal del gráfico de la función que está dentro de la integral hace que esta altura media sea el promedio de las alturas en los extremos y se alcance en el punto medio del intervalo $[1, 1 + \Delta x]$. La segunda toma la forma

$$\Delta F = 2\Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{4}, \tag{3.8}$$

que invita a pensar el área como la diferencia entre las áreas de un rectángulo de base $\Delta x$ y altura 2, y un triángulo de base $\Delta x$ y altura $\Delta x/2$ que se le "recortó" de su parte de arriba. Observemos que cuando $\Delta x$ es muy chico el área del triángulo es mucho más chica que la del rectángulo y esta fórmula puede interpretarse de la siguiente manera: la integral entre 1 y $1 + \Delta x$ es esencialmente igual a $\Delta x$ por el valor del integrando en 1, más una pequeña corrección que hay que hacer porque entre 1 y $1 + \Delta x$ la función que está dentro de la integral modifica en algo su valor. En la figura 3.96 se ilustra la geometría de estas dos interpretaciones.

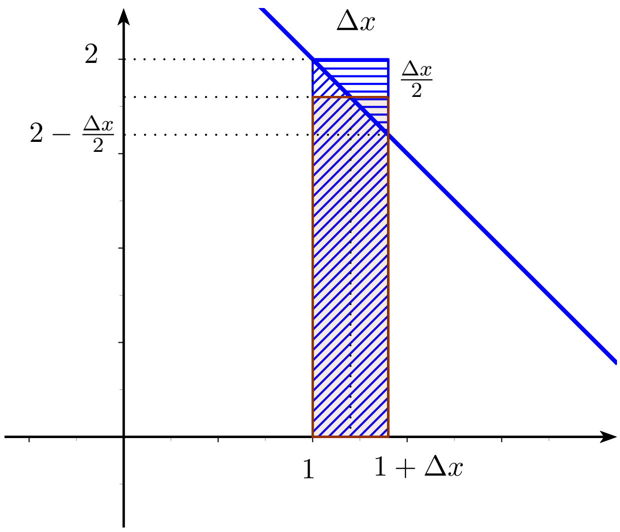



Figura 3.96

Usando la forma de polinomio para evaluar la función encontramos

$$F(1+\Delta x) = -\frac{1}{4}(1+\Delta x)^2 + \frac{5}{2}(1+\Delta x) - 4 = -\frac{1}{4}(\Delta x)^2 + 2\Delta x - 1{,}75. \qquad (3.9)$$

Ya habíamos calculado valor de $F(1) = -1{,}75$. Al hacer la diferencia reencontramos (3.8).

**Observación 27** El valor de $F$ en 1 también puede obtenerse haciendo $\Delta x = 0$ en (3.9). Es también obvio que $\Delta F$ se anula cuando $\Delta x = 0$, como una rápida inspección de la fórmula (3.8) permite confirmar. ♣

Para $\Delta x \neq 0$ podemos evaluar los cocientes incrementales

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{2\Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{4}}{\Delta x} = 2 - \frac{\Delta x}{4}. \qquad (3.10)$$

**Observación 28** Aunque el miembro de la derecha en (3.10) puede evaluarse en $\Delta x = 0$ y arroja el valor 2 ya no es un cociente incremental, que solo tiene sentido cuando $\Delta x = 0$. ¿Qué significado tiene entonces este número?

**Ejercicio 3.1.11** Para cada valor de $\Delta x \neq 0$ hallar la ecuación de la recta secante al gráfico de $F$ por los puntos del gráfico con abscisa $x = 1$ y $x = 1 + \Delta x$. Determinar los puntos de corte de esta secante con los ejes coordenados del plano $(x, y)$. Estudiar cómo se comporta esta recta a medida que $\Delta x$ se aproxima a 0. ♣

**Ejercicio 3.1.12** Para la función

$$f(x) = 2x^2 - x,$$

el cociente incremental

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

en $x = 3$ es

A. 11.

B. $11\Delta x$.

C. $2(\Delta x)^2 - \Delta x$.

D. $11 + 2\Delta x$.

E. $15 + 11\Delta x + 2(\Delta x)^2$.

**Ejercicio 3.1.13** Para la función
$$f(x) = 2x^2 - x,$$
y un valor genérico de $x$ determinar, cuando sea posible, la recta secante al gráfico de $f$ entre los puntos $(1,1)$ y $(x, f(x))$. Hallar la intersección de esta recta con el eje $O_x$. ¿Qué ocurre con este punto de intersección cuando $x$ se aproxima a 1?

**Ejercicio 3.1.14** Para $x \in \mathbb{R}$ definimos la función
$$F(x) = \int_1^x (t + 4 - 3|t-4|)\, dt.$$

1. Consideremos $x = 4$.
   *a*) Para cualquier $\Delta x > 0$ calcular para $F$ el cociente incremental $\Delta F/\Delta x$ entre $x = 4$ y $x = 4 + \Delta x$.
   *b*) Para cualquier $\Delta x < 0$ calcular para $F$ el cociente incremental $\Delta F/\Delta x$ entre $x = 4$ y $x = 4 + \Delta x$.
   *c*) En las dos situaciones de las partes anteriores determinar a qué valor se aproximan los cocientes incrementales cuando $\Delta x$ se aproxima a 0. Comparar con el valor que toma en $t = 4$ el integrando en la integral que define $F$ e interpretar geométricamente.
2. Para cualquier valor de $x \neq 4$ y valores de $|\Delta x|$ suficientemente pequeños como para que 4 no caiga en el intervalor entre $x$ y $x + \Delta x$, calcular para $F$ el cociente incremental $\Delta F/\Delta x$ entre $x = 4$ y $x = 4 + \Delta x$. Investigar qué ocurre con los incrementos y con los cocientes incrementales cuando $\Delta x \to 0$. Discutir según que $x$ sea mayor o menor que 4.

**Ejercicio 3.1.15** La figura 3.97 representa el gráfico de una función $f(t)$. Entre dos enteros consecutivos, el gráfico de $f$ es una semicircunferencia.

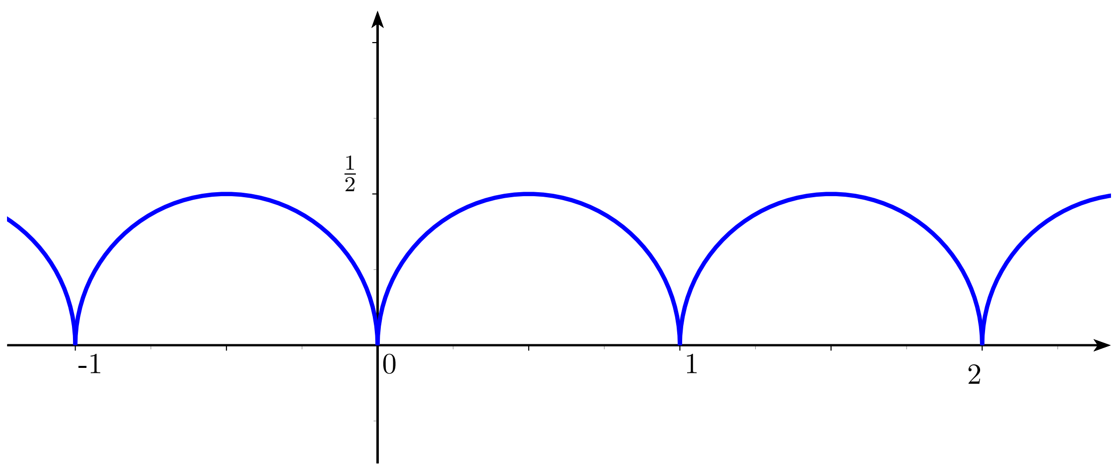



Figura 3.97. Pregunta 3.1.15

A partir de la función $f$, se define

$$F(x) = 1 + \int_2^x f(t)dt.$$

Calcular el cociente incremental $\dfrac{\Delta F}{\Delta x}$ para $x = 1$, $\Delta x = \dfrac{1}{2}$.

A. $-\dfrac{\pi}{4}$.

B. $-\dfrac{1}{2}$.

C. $\dfrac{\pi}{8}$.

D. $\dfrac{1}{2}$.

**Ejercicio 3.1.16** La viga de la figura, de 2 metros de longitud, soporta una carga distribuida, con una densidad lineal constante a trozos de 800 daN/m en el primer tramo de un metro de longitud y de 1600 daN/m en el segundo tramo de un metro.

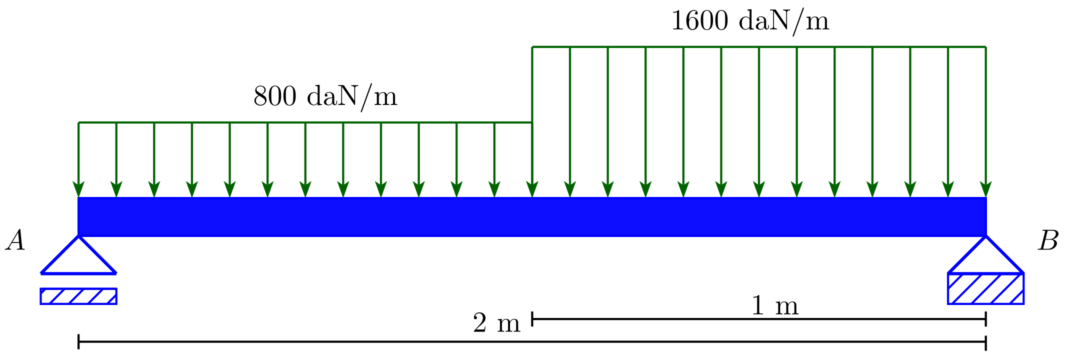



Figura 3.98.

Llamamos $x$ a una coordenada que mide la distancia de cada sección de la viga a su extremo izquierdo.

1. Para $0 < x < 2$ determinar el cortante $V(x)$ y el momento flector $M(x)$ cada sección de la viga.

2. Para $x = 1$ y $0 < \Delta x < 1$ calcular los cocientes incrementales $\Delta V/\Delta x$ para el cortante y determinar a qué valor se aproximan cuando $\Delta x \to 0$.

3. Para $x = 1$ y $-1 < \Delta x < 0$ calcular los cocientes incrementales $\Delta V/\Delta x$ para el cortante y determinar a qué valor se aproximan cuando $\Delta x \to 0$. Comparar con la parte anterior.

4. Para $x = 1$ y $0 < \Delta x < 1$ calcular los cocientes incrementales $\Delta M/\Delta x$ para el momento flector y determinar a qué valor se aproximan cuando $\Delta x \to 0$.

5. Para $x = 1$ y $-1 < \Delta x < 0$ calcular los cocientes incrementales $\Delta M/\Delta x$ para el momento flector y determinar a qué valor se aproximan cuando $\Delta x \to 0$. Comparar con la parte anterior y con el valor del cortante en $x = 1$.

El cálculo de las pendientes está relacionado en la Arquitectura con el manejo de los niveles. Los siguientes dos ejercicios tienen que ver con aplicaciones de esta idea.

**Ejercicio 3.1.17** Salvar un desnivel de 30 metros con una rampa que va a requerir varios tramos, respetando la normativas a tales efectos, cada tramo no puede superar los 10 metros medidos horizontalmente como se muestra en la figura 3.99 y la pendiente deberá ser menor que 12 %. Calcular el número mínimo de tramos y la pendiente que al final tiene cada uno de ellos.

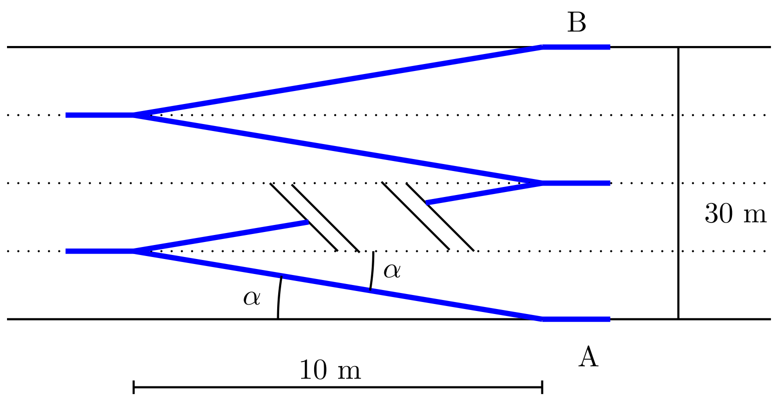



Figura 3.99.

**Ejercicio 3.1.18** Entre los puntos A y B se desea tender un caño de desagüe ¿Cuál es la diferencia mínima de alturas necesaria para que esto sea posible? Suponiendo que la diferencia de alturas es la habilitada por la construcción sanitaria que la establece entre 2 % y 7 % y que se coloca un tramo recto de caño, ¿cuál es la longitud mínima y la longitud máxima que puede tener el caño?

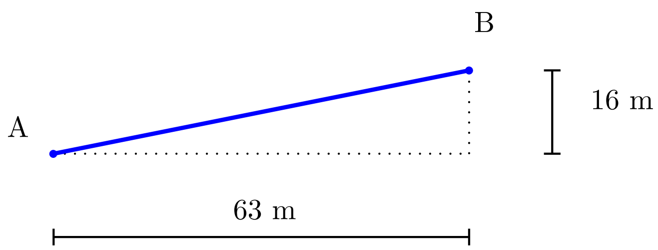



Figura 3.100.

## 3.2. La derivada

En la sección 3.1 analizamos los incrementos y cocientes incrementales de varias funciones. En esta sección nos concentraremos en la variación de estos cocientes incrementales. En particular, en el hecho de que para una clase muy amplia de funciones $f$ presentan un valor límite bien definido cuando $\Delta x \to 0$. Este límite es la *derivada* de $f$ en $x$. Vimos que los cocientes incrementales tienen un sentido geométrico bien preciso como pendientes de rectas secantes al gráfico de una funcion. A medida que $\Delta x \to 0$ estas secantes van aproximando mejor y mejor la recta tangente al gráfico. Cuando la derivada de $f$ en $x$ existe, la posición límite de estas secantes es la *recta tangente* al gráfico de $f$ en el punto $(x, f(x))$ y su pendiente es justamente la derivada $f'(x)$. Cuando la derivada $f'(x)$ no existe, entonces el gráfico de $f$ no tiene en $(x, f(x))$ una recta tangente.

**Ejemplo 48** La función

$$f(x) = x^2$$

toma el valor

$$f(1) = 1.$$

Para analizar su incremento entre $x = 1$ y $x = 1 + \Delta x$ comenzamos por evaluar

$$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Por lo tanto

$$\Delta f = f(1 + \Delta x) - f(1) = 2\Delta x + (\Delta x)^2. \tag{3.11}$$

Observemos que $\Delta f \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, de acuerdo con el hecho de que $f$ es continua en $x = 1$. Calculemos el cociente incremental

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x. \tag{3.12}$$

**Ejercicio 3.2.1** Para $\Delta x = 1/2$ formar los cocientes incrementales $\Delta f/\Delta x$ para los incrementos entre $x = 1$ y $x = 1 + \Delta x$ de tres maneras diferentes:

1. Evaluando directamente la diferencia $f(1 + 1/2) - f(1)$ y luego dividiendo entre $\Delta x = 1/2$.

2. Evaluando el incremento $\Delta f$ por medio de la fórmula (3.11) para $\Delta 1/2$ y luego dividiendo entre $\Delta x = 1/2$.

3. Evaluando directamente el cociente incremental usando la fórmula (3.12) para $\Delta x = 1/2$.

Repetir los cálculos para

$$\Delta x = 1/10, 1/100, 1/1,000, 1/10,000.$$

Observar que los cocientes incrementales se aproximan a 2 a medida que $\Delta x$ se hace cada vez más pequeño.

La fórmula (3.12) para los cocientes incrementales implica que

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 2$$

cuando $\Delta x \to 0$. El valor 2 es, por definición, lo que llamamos la *derivada* de $f$ en $x = 1$. Es también la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f$ en el punto $(1, 1)$, como se ilustra en la Figura 3.101.

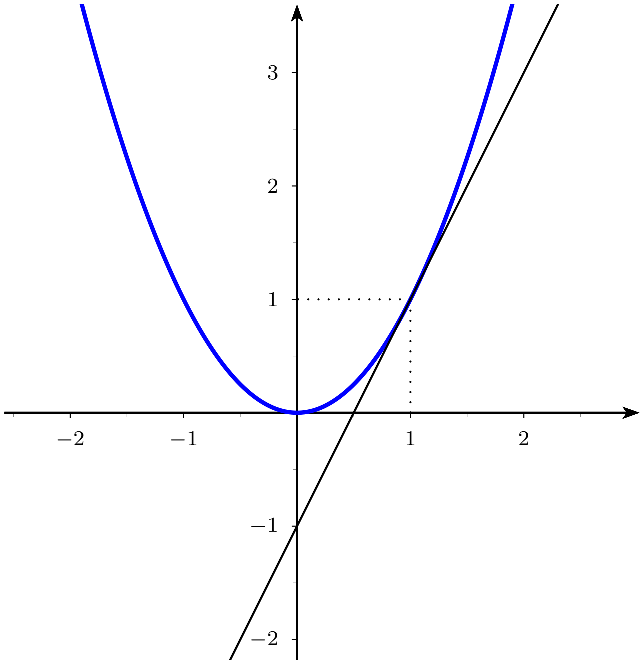



Figura 3.101.

**Ejercicio 3.2.2** Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^2$ en el punto $(1, 1)$. Determinar los puntos de corte de la recta con los ejes coordenados $Ox$ y $Oy$.

**Ejercicio 3.2.3** Para $f(x) = x^2$ y $x = 2$ hallar el valor límite de los cocientes incrementales $\Delta f/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$. Determinar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f$ en el punto $(2, 4)$ y dibujarla.

**Ejercicio 3.2.4** Para $f(x) = x^2$ y $x = 0$ hallar el valor límite de los cocientes incrementales $\Delta f/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$. Determinar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f$ en el punto $(0, 0)$ y dibujarla.

**Ejercicio 3.2.5** Para $f(x) = x^2$ y $x = -1$ hallar el valor límite de los cocientes incrementales $\Delta f/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$. Determinar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f$ en el punto $(0, 0)$ y dibujarla.

**Ejercicio 3.2.6** Para $f(x) = x^2$ y un valor cualquiera de $x$ hallar el valor límite de los cocientes incrementales $\Delta f/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$. Para $x \not 0$ determinar el punto de corte de la recta tangente al gráfico de $f$ en $(x, x^2)$ con el eje $Ox$. ¿Qué ocurre para $x = 0$? ♣

El comportamiento que acabamos de observar al estudiar los cocientes incrementales de $x^2$ es suficientemente general e importante como para merecer una definición general, para una función cualquiera.

**Definición 6** *Sea $f$ una función real definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y $x \in I$. Si los cocientes incrementales*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

*se aproximan a un valor límite cuando $\Delta x$ tiende a $0$, llamaremos a este límite la derivada de $f$ en $x$, y lo indicaremos con la notación $f'(x)$.*

**Ejemplo 49** En el ejemplo 48 hemos mostrado que si $f(x) = x^2$ entonces $f'(1) = 2$.

**Observación 29** Además de la notación $f'(x)$ también es corriente emplear

$$\frac{df}{dx}(x)$$

para indicar la derivada de $f$ respecto a $x$, una notación que usaremos en algún momento. En particular, para hacer cambios de variables en el cálculo de integrales. Otra notación para la derivada de $f$ es $Df$, pero no la utilizaremos en este texto. ♠

**Ejemplo 50** Para una función lineal de la forma

$$f(x) = mx + n$$

la pendiente es siempre constante e igual a $m$, tal como se muestra en la figura 3.102.

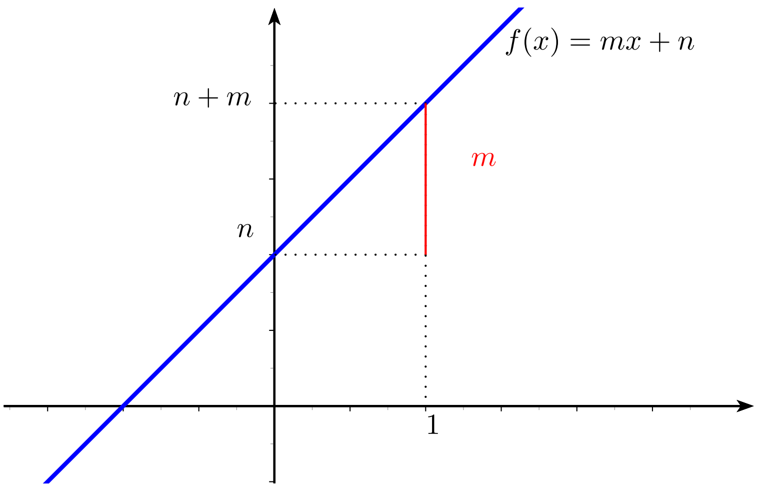



Figura 3.102.

Los cálculos lo confirman. El incremento $\Delta f$ de la función entre un punto $x$ y un punto $x + \Delta x$ es

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = m(x + \Delta x) - (mx + n) = m\Delta x.$$

Vemos entonces que para una función lineal el incremento $\Delta f$ es siempre proporcional a $\Delta x$, independientemente del valor de $x$. Al calcular el cociente

$$\frac{\Delta f}{\Delta x},$$

que relaciona el incremento en $f$ con el incremento en $x$, siempre se obtiene el mismo valor $m$, que es la pendiente de la recta. Por lo tanto

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to m$$

cuando $\Delta x \to 0$, independientemente del valor de $x$, por lo tanto

$$f'(x) = m, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 3.2.7** Mostrar que si una función $f$ tiene la propiedad de que todos sus cocientes incrementales $\Delta f/Deltax$ toman el mismo valor $m$, entonces es una función lineal de la forma $f(x) = mx + n$, para alguna constante $n$.

Sea $f$ una función constante, tal que para alguna constante $c$ se tiene

$$f(x) = c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hallar la derivada $f'$ de $f$ en un punto $x$ cualquiera. Interpretar geométricamente el resultado.

**Observación 30** En estos ejemplos encontramos un hecho geométrico obvio, pero sobre el que vale la pena llamar la atención: la recta tangente al gráfico de una función lineal $f(x) = mx + n$ es el propio gráfico de la función. En otras palabras, una recta es la tangente de sí misma en todos sus puntos. ♠ ♣

**Ejemplo 51** Vamos a analizar el incremento de la función

$$f(x) = x^3$$

al pasar del punto $x = 1$ a un punto $x = 1 + \Delta x$ próximo. Para evaluar $f$ en $1 + \Delta x$ necesitaremos hacer el cálculo de $(1+\Delta x)^3$. Al desarrollar la expresión $(1+\Delta x)^3$ aparecen en los distintos términos los coeficientes que están en la cuarta línea del triángulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots. & & \end{array}$$

El resultado es

$$(1 + \Delta x)^3 = 1 + 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3. \tag{3.13}$$

**Observación 31** Si el lector no conoce el Triángulo de Pascal y su relación con el cálculo de las potencias de un binomio, puede hacer las cuentas elevando primero al cuadrado

$$(1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + \Delta x^2$$

y multiplicando el resultado por $1 + \Delta x$. ♠

Escribimos entonces

$$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^3 = 1 + 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Al restar de $f(1 + \Delta x)$ el valor

$$f(1) = 1$$

obtenemos el incremento

$$\Delta f = f(1 + \Delta x) - f(1) = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \tag{3.14}$$

de la función $f$ entre 1 y $1 + \Delta x$.

Para $\Delta x \neq 0$ podemos calcular el cociente incremental

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2. \tag{3.15}$$

Cuando $\Delta x$ se aproxima a 0 los sumando $3\Delta x$ y $(\Delta x)^2$ en el miembro de la derecha de (3.15) se aproximan a 0, por lo tanto

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3 = f'(1).$$

Concluimos que la derivada de $x^3$ en $x = 1$ es igual a 3, que es justamente la pendiente de la recta tangente al gráfico de $x^3$ en $(1, 1)$. En la Figura 3.103 ilustramos el gráfico de $x^3$ y su recta tangente en $(1, 1)$.

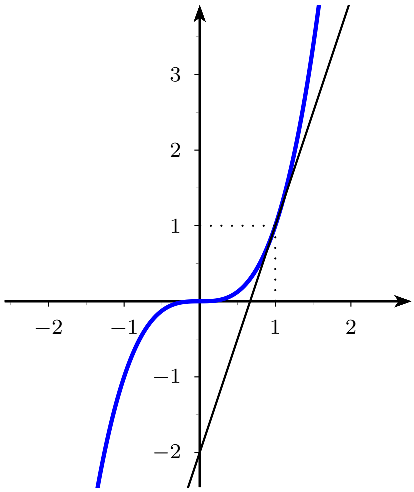



Figura 3.103.

Por lo tanto, cualquier punto $(x, y) \neq (1, 1)$ sobre la recta tangente al gráfico debe satisfacer la relación

$$\frac{y - 1}{x - 1} = 3,$$

lo que implica que

$$y = 3x - 2$$

es la ecuación de la recta tangente al gráfico en $(1, 1)$. Observar que esta fórmula predice que la recta tangente cortará el eje $Ox$ en $x = 2/3$, lo que está en perfecto acuerdo con el dibujo. ♣

**Ejemplo 52** Vamos a generalizar ahora el cálculo de la derivada de $x^3$ para cualquier valor de $x$.

**Observación 32** Si el lector encontró dificultades para resolver el ejercicio 3.2.6 tiene la oportunidad de hacerlo ahora, siguiendo el desarrollo para $x^3$ y haciendo las modificaciones necesarias. ♠

Comenzamos por evaluar

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3. \tag{3.16}$$

Para calcular el incremento restamos $f(x) = x^3$ de (3.16),

$$\Delta f = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Cuando $\Delta x \neq 0$, el cociente incremental es

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Cuando $\Delta x$ se aproxima a 0 encontramos

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3x^2 = f'(x).$$

Concluimos que la derivada de $x^3$ en un valor cualquiera de $x$ es igual a $3x^2$.

**Ejercicio 3.2.8** Hallar la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3$ en $x = -1$, en $x = 0$ y en $x = 2$. Estudiar las intersecciones de estas rectas tangentes con el gráfico de $f$. ¿Son únicas? ¿Hay algún punto $x$ en el que la recta tangente al gráfico deje el gráfico de $f$ completamente contenido en uno de los semiplanos que la recta tangente define? ♣

**Ejemplo 53** En los ejemplos 46 y 47, en las páginas 127 y 129 de la sección 3.1 habíamos calculado y analizado cuidadosamente los cocientes incrementales para la función

$$F(x) = \int_2^x \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - 4$$

en $x = 1$. Encontramos que

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = 2 - \frac{\Delta x}{4},$$

cantidad que aproxima a 2 cuando $\Delta x \to 0$. De modo que la derivada de $F$ en $x = 1$ existe y es igual a

$$F'(1) = 2.$$

Este valor coincide con la evaluación

$$\left.\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right|_{t=1} = 2 \tag{3.17}$$

del integrando en $t = 1$. Esto no es para nada casual. Tal como revela la Figura 3.96, página 130, el incremento de la integral entre 1 y $1 + \Delta x$ es esencialmente igual al área de un rectángulo de altura dada por la evaluación (3.17) del integrando y base igual a $\Delta x$. El área de este rectángulo se ve corregida por un término que proviene de la variación de la función cuando nos apartamos de $x = 1$. La continuidad de la función en $x = 1$ implica que está corrección se haga despreciable frente al área del rectángulo para valores pequeños de $\Delta x$ y desaparezca a la hora de calcular el límite implicado en la definición de derivada.

**Ejercicio 3.2.9** Para la función $F$ de este ejemplo calcular los cocientes incrementales $\Delta F/Deltax$ y la derivada $F'(x)$, para cualquier valor de $x$. Calcular los incrementos de dos maneras: a partir de la expresión de $F$ como una integral y a partir de la expresión de $F$ como un polinomio de segundo grado en $x$. ♣

Nuestro próximo ejercicio retoma el ejercicio 3.1.14, página 131.

**Ejercicio 3.2.10** Calcular la derivada $F'(x)$ para la función

$$F(x) = \int_1^x (t + 4 - 3|t - 4|)\ dt$$

y cualquier valor real de $x$. Graficar la función $F(x)$ y el integrando

$$f(x) = x + 4 - 3|x - 4|.$$

¿Qué relación hay entre ambos gráficos? ¿Se aprecia alguna singularidad en el gráfico de $F$ en el punto $(4, F(4))$?

**Ejercicio 3.2.11** Estudiar los cocientes incrementales de $f(x) = |x|$ en $x = 0$. Discutir según el signo del incremento $\Delta x$. ¿La función $f$ tiene derivada en $x = 0$? Para valores de $x$ distintos de 0, ¿la función tiene derivada? Relacionar esta discusión con el gráfico de $f(x) = |x|$.

**Ejercicio 3.2.12** Calcular la derivada de

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

en $x = 1$. Generalizar el cálculo para cualquier valor de $x$.

**Ejercicio 3.2.13** Linealidad de la derivada

1. Mostrar que el cociente incremental de la suma de dos funciones $f$ y $g$ satisface

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Concluir que si las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces existe

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

2. Si $a$ es una constante, mostrar que el cociente incremental del producto $af(x)$ es

$$\frac{\Delta(af)}{\Delta x} = a\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Concluir que si las derivadas $f'(x)$ existen, entonces existe

$$(af)'(x) = af'(x).$$

3. Calcular las derivadas de

$$-2x^3, \qquad x^2 + 5x,$$

4. Calcular la derivada de

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 5x + 7.$$

5. Calcular la derivada de un polinomio genérico de tercer grado

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

**Ejercicio 3.2.14**

1. Sea $f$ una función derivable y $a$ una constante. Definamos $g(x) = f(ax)$. Mostrar que

$$g'(x) = af'(ax).$$

Justificar esta igualdad de dos maneras: calculando cocientes incrementales para $g$ y estudiando el gráfico de $g$.

2. Sea $f$ una función derivable y $a$ una constante. Definamos $g(x) = f(x + a)$. Mostrar que

$$g'(x) = f'(x + a).$$

Justificar esta igualdad de dos maneras: calculando cocientes incrementales para $g$ y estudiando el gráfico de $g$.

3. Si $f$ es una función derivable y $a$ y $b$ son constantes, determinar cómo se calculan las derivadas de $g(x) = f(ax + b)$ a partir de las derivadas de $f$.

4. Comprobar la fórmula de la parte 3 calculando las derivadas de

$$(3x - 5)^2, \quad (1 - x)^3.$$

Hacer el cálculo primero desarrollando el cuadrado y el cubo y luego derivando. Repetir el cálculo usando la fórmula de la parte 3. En ambos casos, graficar las funciones y comparar con los gráficos de $x^2$ y $x^3$.

**Ejercicio 3.2.15** Mostrar que la derivada de una función par es impar, y que la derivada de una función impar es par. Estudiar el problema a través de los cocientes incrementales y del graáfico de las funciones.

**Ejercicio 3.2.16** Mostrar que la derivada de una función periódica de período $T$ también es periódica de período $T$. Estudiar el problema a través de los cocientes incrementales y del graáfico de las funciones.

La derivada existe para cualquier función real que produzca un gráfico suave, con tangentes bien definidas en cada punto, y su valor es el de la pendiente de la recta tangente. En particular, todos los polinomios, las funciones trigonométricas y sus inversas, la exponencial y el logaritmo tienen derivadas en sus dominios de definición. A partir del conocimiento de estas derivadas y las propiedades del cálculo de derivadas, pueden calcularse las derivadas de cualquier función construida a partir de ellas sumando, restando, multiplicando, dividiendo o componiendo funciones. En los próximos ejercicios proponemos calcular algunas derivadas a partir de las propiedades establecidas en los ejercicios 3.2.13 y 3.2.14 y la tabla de derivadas de la sección 3.2.1

**Ejercicio 3.2.17** Calcular las derivadas de

$$3\cos(\pi x) + 5x^2, \quad (8x + 3)^4, \quad 16e^{-3x+1} + 16e^{3x-1}.$$

**Ejercicio 3.2.18** Calcular las derivadas respecto a $t$ de

$$3\cos(\pi(x + t)), \quad 16e^{-3x(t+1)}, \quad t^2(x - t).$$

### 3.2.1. Tabla de derivadas

| Función | Derivada | Observaciones |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $f'(x)$ | |
| $c$ | $0$ | $c$ constante |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $n$ entero |
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $\alpha$ real, $x > 0$. |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | Caso particular de las potencias, con $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $x > 0$. |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | Caso particular de las potencias, con $\alpha = -1$, $x \neq 0$. |
| $\operatorname{sen} x$ | $\cos x$ | |
| $\cos x$ | $-\operatorname{sen} x$ | |
| $\tan x$ | $1 + \tan^2 x$ | |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $x > 0$. |
| $e^x$ | $e^x$ | |
| $(f+g)(x)$ | $f'(x) + g'(x)$ | Aditividad de la integral |
| $(af)(x)$ | $af'(x)$ | Homogeneidad de la integral ($a$ constante) |
| $(fg)(x)$ | $f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ | Derivada del producto |
| $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ | $\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ | Derivada del cociente, $g(x) \neq 0$ |
| $f(ax+b)$ | $af'(ax+b)$ | Caso especial de la regla de la cadena ($a$ y $b$ constantes) |
| $f(g(x))$ | $f'(g(x))g'(x)$ | Regla de la cadena |

## 3.3. El Teorema Fundamental del Cálculo

En esta sección continuaremos con el análisis de los incrementos y los cocientes incrementales de funciones de la forma

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{3.18}$$

Nuestro principal objetivo es demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo.

**Teorema 1 (Teorema Fundamental del Cálculo)** *Si $f$ es una función continua definida sobre un cierto intervalo $I \subset R$, $a$ pertenece a $I$, y para cada $x$ en $I$ definimos*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

*Entonces*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I.$$

Este resultado relaciona las operaciones de integrar y derivar. Visto desde un punto de vista geométrico exhibe una conexión notable entre el cálculo de áreas y el trazado de tangentes, dos cosas que en principio parecen dar respuesta a problemas sumamente diferentes. Tiene además consecuencias importantes para el cálculo, porque implica la célebre *Fórmula de Barrow* para el cálculo de integrales.

**Proposición 10** Fórmula de Barrow *Consideremos dos números $a$ y $b$ en un cierto intervalo $I$ de $\mathbb{R}$ y sea $f$ una función definida sobre $I$ que tiene en $I$ una primitiva $F$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dt = F(b) - F(a). \tag{3.19}$$

Para darle sentido a esta proposición solo hay que aclarar que una primitiva $F$ de una función $f$ es una función tal que su derivada $F'$ es $f$ (ver la definición 7 en la página 149)

Para cerrar esta introducción compartimos con el lector un argumento heurístico que pretende dar una idea de por qué el Teorema Fundamental del Cálculo es verdadero. Para calcular la derivada de una función debemos evaluar los cocientes incrementales $\Delta F/\Delta x$. El incremento $\Delta F$ es

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x).$$

que en el caso de la función (3.18) puede escribirse en la forma

$$\Delta F = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \tag{3.20}$$

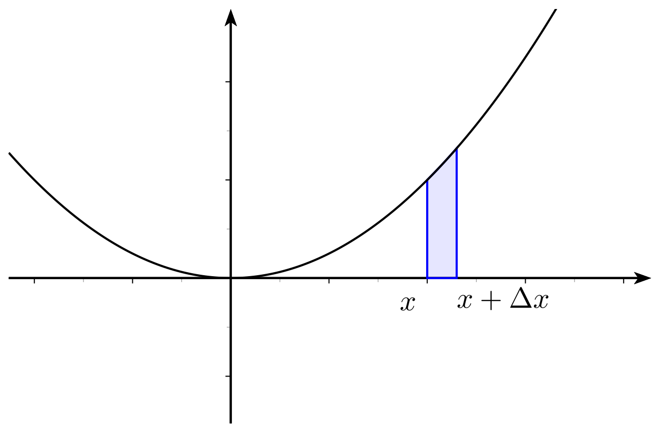



Figura 3.104.

La Figura 3.104 muestra la geometría asociada con la fórmula (3.20): el incremento de $F$ entres $x$ y $x+\Delta x$ es el área (signada) encerrada bajo el gráfico de $f$ en el intervalo $[x, x+\Delta x]$ y guarda una relación evidente con el tamaño de $\Delta x$ y con el tamaño de $f$ en ese intervalo.

Si la función es continua, cuando $\Delta x$ es muy pequeño los valores de $f$ en el intervalo $[x, x+\Delta x]$ serán muy próximos a los de $f(x)$, de modo que

$$\Delta F = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \simeq f(x)\Delta x$$

y, para $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \simeq f(x).$$

La demostración formal del Teorema 1 está basada en estas mismas ideas.

### 3.3.1. El Teorema Fundamental del Cálculo en ejemplos conocidos

En esta sección ilustraremos la validez del Teorema Fundamental del Cálculo volviendo sobre ejemplos que ya hemos visto antes.

**Ejemplo 54** Posiblemente, el caso más sencillo de integral es el de una función $f$ constante, tal que

$$f(x) = c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En este caso, si para un valor $a$ cualquiera definimos

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x c dt$$

el resultado es

$$F(x) = c(x-a) = cx - ca, \tag{3.21}$$

una función lineal. La función $F$ se anula en $x = a$, y crece o decrece con $x$, según $c$ sea positivo o negativo. Cuando $c = 0$ la función $F$ es la constante 0.

La derivada la función (3.21) es conocida para nosotros y es

$$F'(x) = c,$$

que es justamente el valor del integrando.

Cuando analizamos los incrementos de $F$ usando la fórmula (3.20) encontramos

$$\Delta F = \int_x^{x+\Delta x} c\, dt = c\Delta x, \tag{3.22}$$

que es el área de un rectángulo de altura $c$ y base $\Delta x$.

**Observación 33** Cuando $c$ o $\Delta x$ son negativos la fórmula 3.22 ya no es una área de un rectángulo. Pero aun así, en virtud de las convenciones de signo con las que hemos definido la integral, describe correctamente los incrementos de la función $F$. ♠

El cociente incremental es

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{c\Delta x}{\Delta x} = c,$$

que es justamente el valor del integrando. En este caso particular, todos los cocientes incrementales toman el mismo valor, que es también el valor de la derivada de $F$.

En particular, si tomamos $c = 2$ y $a = 4$, encontramos que

$$\int_4^x 2\,dt = 2x - 8. \tag{3.23}$$

La pendiente del gráfico de la integral es 2, que es justamente el valor del integrando.

**Ejercicio 3.3.1** Calcular

$$F(x) = \int_{-3}^x (-7)\,dt.$$

Graficar $F$.

**Ejercicio 3.3.2** Sea $F$ la función del ejercicio 3.3.1. Definimos

$$G(x) = 21 + F(x).$$

Calcular la derivada de $G$. Determinar el valor de $a$ que hace

$$G(x) = \int_a^x (-7)\,dt.$$

Graficar $G$.

**Ejercicio 3.3.3** Hallar los valores de $c$ y $a$ que permiten escribir

$$F(x) = -3x + 1$$

como una integral de la forma

$$F(x) = \int_a^x c\,dt.$$

Repetir para $F(x) = 5x - 2$. Generalizar para cualquier función de la forma $F(x) = ax + b$. ¿Qué ocurre cuando $a = 0$?

♣

Nuestro próximo ejercicio requiere trabajar con la ideas del ejemplo 54 en un contexto ligeramente diferente.

**Ejercicio 3.3.4** Sea

$$f(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Definimos

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Graficar $F(x)$. Estudiar en qué puntos es derivable. Cuando la derivada $F'(x)$ exista, calcularla.

**Ejemplo 55** Vamos a analizar ahora el comportamiento de funciones de la forma

$$F(x) = \int_a^x (mt + n)dt, \tag{3.24}$$

que es el caso particular de las integrales (3.18) para un integrando lineal

$$f(x) = mx + n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

El uso de la variable $t$ en la función $f$, en vez de $x$, en (3.24) es para no usar en la misma fórmula la misma letra con dos significados diferentes.

Como primer paso, retomaremos el ejemplo de los cocientes incrementales en $x = 1$ para la función

$$F(x) = \int_2^x \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt. \tag{3.25}$$

El incremento $\Delta F$ se obtiene calculando la integral

$$\int_1^{1+\Delta x} \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt. \tag{3.26}$$

Podríamos evaluar (3.26), pero en vez de hacerlo presentaremos un argumento que puede generalizarse a cualquier función continua. Consideremos momentáneamente el caso $\Delta x > 0$. En el intervalo $[1, 1 + \Delta x]$ el integrando en (3.26) toma un valor máximo $M$ y un valor mínimo $m$. Naturalmente, las desigualdades

$$m \leq \frac{5}{2} - \frac{t}{2} \leq M$$

se satisfacen para todo $t$ en el intervalo $[1, 1 + \Delta x]$. Por lo tanto

$$m\Delta x = \int_1^{1+\Delta x} mdt \leq \int_1^{1+\Delta x} \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = \Delta F \leq \int_1^{1+\Delta x} Mdt = M\Delta x. \tag{3.27}$$

Dividiendo entre $\Delta x$ la desigualdad 3.27 concluimos

$$m \leq= \frac{\Delta F}{\Delta x} \leq= M. \tag{3.28}$$

En este caso, en que tenemos una fórmula explícita para $f$, podemos saber exactamente cuáles son los valores de $m$ y $M$. Pero nos interesa especialmente destacar que esta fórmula tiene validez general.

**Ejercicio 3.3.5** Mostrar que la fórmula (3.28) es válida para una función cualquier también cuando $\Delta x < 0$ ¿Qué puede decirse de la fórmula (3.27)?

Para $\Delta x > 0$, el máximo $M$ y el mínimo $m$ del integrando en $[1, 1 + \Delta x]$ son

$$\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2, \quad \frac{5}{2} - \frac{1 + \Delta x}{2} = 2 - \frac{\Delta x}{2}.$$

Volviendo a (3.28) concluimos entonces que

$$2 - \frac{\Delta x}{2} \leq \frac{\Delta F}{\Delta x} \leq 2. \tag{3.29}$$

Las estimaciones del cociente incremental por debajo y por encima se aproximan a 2 cuando $\Delta x \to 0$, de modo que, para $\Delta > 0$,

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} \to 2, \tag{3.30}$$

cuando $\Delta x \to 0$.

**Ejercicio 3.3.6** Mostrar que cuando $\Delta x < 0$ los cocientes incrementales también deben aproximarse a 2 cuando $\Delta x \to 0$.

La fórmula 3.30 y el ejercicio 3.3.6, junto con la definición de derivada, implican que la derivada $F'(2)$ existe y

$$F'(2) = 2 = f(1).$$

**Ejercicio 3.3.7** El valor exacto del cociente incremental es $2-\Delta x/4$. Interpretar geométricamente las diferencias de este valor con 2 y con $2-\Delta x/2$, que son la estimaciones del cociente incremental por encima y por debajo que nos da la fórmula (3.29).

**Ejercicio 3.3.8** Generalizar a cualquier valor de $x$ los argumentos que acabamos de hacer para $x = 1$ y concluir que para la función $F$ definida por (3.25) se tiene que

$$F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}.$$

**Ejercicio 3.3.9** Generalizar el resultado del ejercicio 3.3.8 a cualquier función $F$ definida por la integral de una función lineal como en (3.24). ♣

### 3.3.2. Demostración del Teorema Fundamental del Cálculo

En esta sección completaremos una demostración del Teorema Fundamental del Cálculo, Teorema 1, página 143. No hay grandes novedades conceptuales respecto a lo que vimos en el ejemplo 55: el argumento descansa en que la desigualdad es válida para cualquier función $f$ y en el hecho de que si una función es continua en un punto $x$ tanto el máximo $M$ como el mínimo $m$ de la función en un intervalo de la forma $[x, x+\Delta x]$ se aproximan al valor $f(x)$ que la función toma en $x$.

Demostración del Teorema Fundamental del Cálculo. Comenzamos a escribir el incremento de $F$ como una integral:

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Consideremos el caso en que $\Delta x > 0$. Sean $m$ y $M$ el mínimo y el máximo de la función $f$ en el intervalo $[x, x+\Delta x]$. Entonces

$$m \leq f(t) \leq M, \quad x \leq t \leq x+\Delta x.$$

Por lo tanto

$$m\Delta x = \int_x^{x+\Delta x} m dt \leq \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Delta F \leq \int_x^{x+\Delta x} M dt = M\Delta x. \tag{3.31}$$

Dividiendo entre $\Delta x$ la desigualdad 3.31 concluimos

$$m \leq \frac{\Delta F}{\Delta x} \leq M. \tag{3.32}$$

Tanto $m$ como $M$ se aproximan a $f(x)$ cuando $\Delta x \to 0$, de modo que el cociente incremental también debe aproximarse a $f(x)$. Este valor límite es, por definición, la derivada de $F$ en $x$, de modo que

$$F'(x) = f(x).$$

**Ejemplo 56** Consideramos

$$F(x) = \int_{-1}^{x} (3 - 2t)\, dt.$$

Entonces

$$F(x) = -x^2 + 3x + 4. \tag{3.33}$$

**Ejercicio 3.3.10** Completar los detalles necesarios para calcular la fórmula explícita (3.33).

Derivando (3.33) obtenemos

$$F'(x) = -2x + 3 = f(x),$$

que es consistente con el Teorema 1

No necesitamos poder evaluar explícitamente la función $F$ como en el ejemplo 56 para calcular su derivada. En nuestro próximo ejemplo mostramos un caso en que la función $F$ no admite una expresión elemental, pero aun así puede calcularse su derivada.

**Ejemplo 57** Sea

$$F(x) = \int_{0}^{x} e^{-t^2}\, dt.$$

Entonces

$$F'(2) = e^{-2^2} = e^{-4} \simeq 0{,}0183.$$

**Ejercicio 3.3.11** Calcular la derivada de

$$F(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$$

en $x = 3\pi/2$. ♣

**Ejercicio 3.3.12** Calcular la derivada de

$$F(x) = 10 + \int_{e^2}^{x} (1 + t - |3t - 4|)\, dt$$

en $x = 0$ y en $x = 4/3$.

**Ejemplo 58** Especialmente interesante es el caso en que el cálculo de derivadas de $F$ por medio del Teorema Fundamental nos da herramientas para calcular integrales. Si

$$F(x) = \int_{1}^{x} t^2\, dt \tag{3.34}$$

entonces

$$F'(x) = x^2.$$

Concluimos así que $F$ es una función cuya derivada es $x^2$, información que la determina casi completamente.

**Ejercicio 3.3.13** Encontrar todas las funciones que tienen a $x^2$ como derivada. ¿Cuál de ellas es $F(x)$? ♣

En nuestra próxima sección desarrollaremos sistemáticamente las ideas del ejemplo 58.

### 3.3.3. Cálculo de integrales por medio de primitivas

El Teorema Fundamental del Cálculo, tal como lo estamos empleando en el ejemplo 58, sugiere que si somos capaces de encontrar una función cuya derivada sea $f(x)$ entonces podremos determinar

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Esto es casi cierto, salvo por el hecho de que hay en juego una constante indeterminada. Lo discutimos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 59** La función

$$F(x) = \int_0^x 1\,dt = x$$

tiene

$$F'(x) = 1$$

como su derivada. Pero

$$G(x) = \int_3^x 1\,dt = x - 3$$

también tiene derivada

$$G'(x) = 1.$$

Las dos funciones tienen la misma derivada, pero difieren en una constante, que es igual a la integral de 1 entre 0 y 3. ♣

**Definición 7** *Sea $f$ una función real definida sobre un intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Decimos que una función $F$ definida sobre $(a,b)$ es una primitiva de $f$ si la derivada $F'(x)$ existe para todo $x \in (a,b)$ y se satisface*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a,b).$$

Usando en el ejemplo 59 el vocabulario que propone la definición 7, podemos decir que las dos funciones

$$F(x) = x, \quad G(x) = x - 3,$$

son primitivas de la función constante 1.

**Ejemplo 60** La función

$$F(x) = x^3 - 3x + 7$$

es una primitiva de

$$f(x) = 3x^2 - 3.$$

**Ejercicio 3.3.14** Encontrar una primitiva de $f$ diferente de $F$. ♣

Una función no determina completamente sus primitivas, pero casi lo hace. La situación que se presenta en el ejemplo 59 es completamente general: dos primitivas de una misma función pueden diferir en una constante. El cálculo de integrales genera un fenómeno similar. Las funciones

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad G(x) = \int_b^x f(t)dt,$$

son dos primitivas de $f$ cuya diferencia

$$G(x) - F(x) = \int_b^x f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

es una constante que refleja el hecho de que hemos empezado a integrar en lugares diferentes.

Por otra parte, si dos funciones definidas en un cierto intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ tienen la misma derivada, entonces difieren en una constante. Para probar este hecho necesitamos el siguiente resultado previo, intuitivamente evidente pero cuya demostración requiere cierta elaboración que omitiremos.

**Lema 1** *Sea $f$ una función real definida sobre un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, tal que su derivada existe para todo $x \in (a, b)$ y satisface*

$$f'(x) = 0, \quad x \in (a, b).$$

*Entonces $f$ es constante.*

**Proposición 11** *Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de $f$ en un cierto intervalo $(a, b)$, entonces existe una constante $c$ tal que*

$$G(x) = F(x) + c, \quad x \in (a, b). \tag{3.35}$$

DEMOSTRACIÓN. Consideramos la derivada de la diferencia $G - F$. Tenemos

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f'(x) - f'(x) = 0, \quad x \in (a, b),$$

por lo tanto $G - F$ es constante en $(a, b)$. Llamando $c$ a esa constante tenemos

$$G(x) - F(x) = c, \quad x \in (a, b),$$

de donde se desprende inmediatamente (3.35).

La proposición 11 nos permitirá calcular integrales si somos capaces de encontrar la constante $c$. Lo vemos en un ejemplo.

**Ejemplo 61** Vimos en el ejemplo 58 que

$$F(x) = \int_1^x t^2\, dt$$

tiene como derivada

$$F'(x) = x^2.$$

Sabemos que

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3$$

es una primitiva de $x^2$, por lo tanto

$$F(x) = G(x) + c = \frac{1}{3}x^3 + c. \tag{3.36}$$

Sabemos que

$$F(1) = 0.$$

de modo que, evaluando la igualdad (3.36) en $x = 1$ obtenemos

$$0 = \frac{1}{3} + c,$$

lo que determina el valor

$$c = -\frac{1}{3}.$$

Concluimos

$$\int_1^x t^2\,dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}.$$

**Observación 34** Es fácil verificar que la última igualdad es correcta: la derivada del miembro de la derecha tiene que ser el integrando que aparecen en el miembro de la izquierda; al evaluar ambos miembros de la igualdad en cualquier valor de $x$ debe obtenerse el mismo resultad. En este caso tomar $x = 1$ es lo más práctico. Para $x = 1$ el miembro de la izquierda se anula, y el de la derecha vale

$$\frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3} = 0,$$

lo que completa la verificación. ♠♣

El método es completamente general. Si tenemos una primitiva $F$ de una función $f$ en un cierto intervalo $I$ de la recta, y queremos calcular

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

entonces

$$G(x) = F(x) + c.$$

Evaluando en $x = a$, en el que por su definición es evidente que $G$ se anula, encontramos

$$0 = F(a) + c,$$

por lo tanto

$$c = -F(a)$$

y

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a). \tag{3.37}$$

Aunque no es mucho más que un cambio de notación, es corriente escribir la igualdad (3.37) llamando $b$ al límite superior de integración, en vez de $x$. Encontramos entonces que si la función $F$ es una primitiva de $f$, entonces

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \tag{3.38}$$

Nuestra disusión ha demostrado la Fórmula de Barrow que habíamos enunciado en la página 143 como la proposición 10.

La Fórmula de Barrow nos dice que las integrales son incrementos de las primitivas del integrando. Además, como el procedimiento de calcular derivadas es muy sistemático, si somos hábiles en leer la tabla de derivadas de derecha a izquierda, dispondremos de una herramienta potente para calcular integrales. Esta herramienta es el cálculo de integrales por medio de primitivas. Antes de pasar a desarrollar sistemáticamente esta herramienta, dejamos un ejemplo.

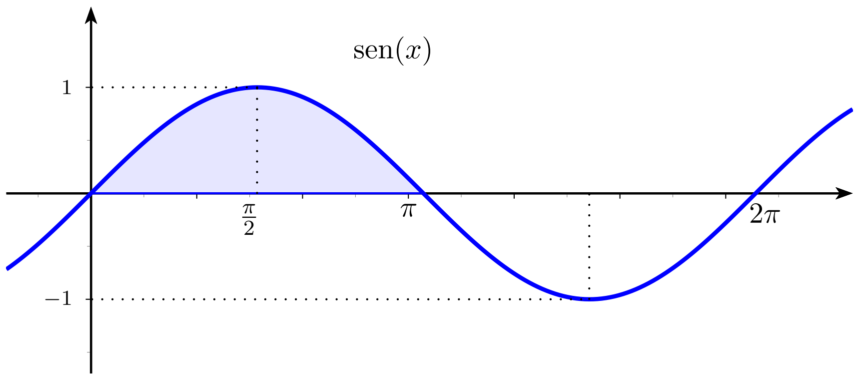



Figura 3.105.

**Ejemplo 62** En la Figura 3.105 aparece el gráfico de la función $\operatorname{sen} x$. Nuestro objetivo es calcular el área encerrada bajo su gráfico entre $x = 0$ y $x = \pi$. Esa área es

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx.$$

Como la derivada de $\cos x$ es $-\operatorname{sen} x$, una primitiva de $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$. Aplicamos la fórmula de Barrow y concluimos

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2.$$

Aplicando la Fórmula de Barrow hemos podido calcular el área de una figura que no podemos tratar con los métodos de la geometría elemental. ♣

### 3.3.4. Propiedades básicas del cálculo de integrales y aplicaciones

El Teorema Fundamental del Cálculo viene a decirnos que, en algún sentido, integrar y derivar son operaciones inversas una de la otra. Por lo tanto, sus propiedades están relacionadas. Esta observación permite obtener propiedades del cálculo de integrales a partir de propiedades del cálculo de derivadas y viceversa.

**Proposición 12** *Sean $f$ y $g$ dos funciones reales continuas definidas sobre el intervalo $[a, b]$. Entonces*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

DEMOSTRACIÓN: Las funciones

$$F(x) = \int_a^x f(t)dx, \quad G(x) = \int_a^x g(t)dx$$

son, respectivamente, primitivas de $f$ y $g$. Por lo tanto $F + G$ es una primitiva de $f + g$ y podemos usarla para evaluar

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = F(x) + G(x)|_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)).$$

Reordenando el último miembro de esta cadena de igualdades escribimos

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = F(b) - F(a) + G(b) - G(a).$$

En el miembro de la derecha reconocemos la integrales de $f$ y $g$ sobre el intervalo $[a, b]$.

**Proposición 13** *Sea $f$ una función real continua definidas sobre el intervalo $[a,b]$ y $c$ una constante. Entonces*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

**Proposición 14** *Sea $f$ una función real continua y $c$ una constante no nula. Entonces*

$$\int_a^b f(cx)dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)dx$$

**Ejercicio 3.3.15** ¿Qué valor toma la integral del miembro de la izquierda cuando $c = 0$? El resultado que se obtiene, ¿coincide con el límite cuando $c \to 0$ de las integrales en la proposición 14?

**Proposición 15** *Sea $f$ una función real continua y $c$ una constante. Entonces*

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$$

**Proposición 16** *Sea $f$ una función real continua y $c$ y $d$ dos constante una constante. Entonces*

$$\int_a^b f(cx+d)dx = \frac{1}{c}\int_{ca+d}^{cb+d} f(x)dx$$

**Ejercicio 3.3.16** Encontrar para cada una de estas tres últimas proposiciones los resultados del cálculo de derivadas que permiten justificarlas, y construir una demostración adaptando la demostración de la proposición 14. Interpretar geométricamente cada uno de los resultados en términos de los gráficos de $f$ y de las áreas encerradas entre el gráfico y el eje $O_x$.

**Ejercicio 3.3.17** Calcular

$$\int_2^3 \left(4e^{4-2x} - 4 - x\right)\, dx, \qquad \int_1^2 \cos\left(\pi\left(\frac{x}{4} - 1\right)\right)\, dx,$$

**Ejercicio 3.3.18** Calcular

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}e^{2x+1}}{\sqrt{x}}\, dx, \quad \int_\pi^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2 + x\operatorname{sen}(x-\pi/2)}{x}\, dx,$$

**Ejercicio 3.3.19** Para $x > 0$, calcular

$$\int_0^x (x-s)\sqrt{s}\, ds.$$

**Ejercicio 3.3.20** Hallar el valor de $a > 0$ que hace que

$$\int_a^{2a} \frac{1+x}{x}\, dx = 10.$$

**Ejercicio 3.3.21** Integral iterada.

1. *a*) Para cada valor de $y$ en el intervalo $[1,2]$, calcular

$$f(y) = \int_{6-2y}^{4} \left(xy^2 + x\right)\, dx.$$

b) Calcular

$$\int_1^2 f(y)dy.$$

2. a) Para cada valor de $x$ en el intervalo $[2, 4]$, calcular

$$g(x) = \int_{3-\frac{x}{2}}^{2} \left(xy^2 + x\right) dy.$$

b) Calcular

$$\int_2^4 g(x)dx.$$

**Ejercicio 3.3.22** Sea $R$ la región del plano encerrada entre la parábola de ecuación $y = 1 - x^2$, el eje $Ox$ y el eje $Oy$.

1. Hallar el valor de $a$ que hace que la recta de ecuación $y = a$ divida $R$ en dos regiones de igual área.

2. Hallar la ecuación de tercer grado que satisface el valor de $a$ tal que la recta de ecuación $x = a$ divide $R$ en dos regiones de igual área. Determinar $a$ con un error menor a $1/10$.

## 3.4. Derivada y recta tangente

Dada una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, al evaluarla en un número $x$ se produce un número $f(x)$. Esta operación se traduce a una representación geométrica sobre un plano $(x, y)$, que consiste en ubicar en este plano el punto $(x, f(x))$. Al dejar variar $x$ sobre todos los valores para los que la función $x$ está definida se obtiene una curva, que recibe el nombre de gráfico de la función $f$. Fijemos un valor $x_0$ y llamemos

$$P = (x_0, f(x_0))$$

al punto sobre $x_0$ en le gráfico de $f$.

Para calcular la derivada de $f$ en un $x_0$ consideramos un segundo valor $x_0 + \Delta x$ del argumento, con $\Delta x \neq 0$, y la evaluación $f(x_0 + \Delta x)$ de $f$. Esto produce un segundo punto

$$Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$$

sobre el gráfico de $f$.

La línea recta que une los puntos $P$ y $Q$ toca a la gráfica de $f$ en ambos puntos (aunque hay configuraciones en las que pueden pasar cosas diferentes, en general es una línea secante a la gráfica). La pendiente de esta línea es justamente el cociente incremental

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

que relaciona el cambio entre de las ordenadas de los puntos $P$ y $Q$ con el cambio entre sus abcisas.

Cuando hacemos $\Delta x$ tender a cero $Q$ se aproxima a $P$, las líneas rectas que construimos por este procedimiento siempre pasan por $P$, pero las pendientes cambian al cambiar el valor de $\Delta x$. Si la función $f$ es derivable en $x_0$, los valores de las pendientes se aproximan a $f'(x_0)$, y las rectas se van aproximando a la recta de ecuación

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

que resulta ser tangente al gráfico de $f$ en $P$.

### 3.4.1. Orden de contacto de la tangente con la curva

La recta tangente al gráfico de $f$ en $P = (x_0, f(x_0))$, cuya pendiente está dada por la derivada $f'(x_0)$ es la recta que mejor aproxima a $f$ entre todas las rectas que pasan por $P$. Para verlo, consideraremos los valores de $f$ en puntos cercanos a $x_0$, que escribiremos en la forma $f(x_0 + \Delta x)$, para una función que tiene derivada $f'(x_0)$ en $x_0$. Como la derivada en $x_0$ existe se satisface que

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0), \tag{3.39}$$

cuando $\Delta x \to 0$. La expresión (3.39) es equivalente a

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \epsilon(\Delta x), \tag{3.40}$$

donde $\epsilon(\Delta x)$ tiene la propiedad de aproximarse a 0 cuando $\Delta x \to 0$. Operando a partir de (3.39) podemos escribir

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x. \tag{3.41}$$

Cerca de $x_0$ el valor de $f$ quedó escrito como el valor de $f$ en $x_0$, más una primera corrección lineal en $\Delta x$ con un coeficiente dado por $f'(x_0)$, y un tercer sumando que es de un orden de magnitud menor que $\Delta x$, porque aparece $\Delta x$ –que ya de por sí es chico cuando nos aproximamos a $x_0$– multiplicado por $\epsilon(\Delta x)$, que también se hace pequeño cuando $\Delta x \to 0$.

**Ejemplo 63** Si $f(x) = x^2$ y $x_0 = 3$, entonces $f'(x_0) = 6$. Podemos estudiar el comportamiento del cuadrado cerca de $x_0 = 3$ escribiendo

$$x^2 = (3 + (x-3))^2 = 3^2 + 6(x-3) + (x-3)^2 = 9 + 6(x-3) + (x-3)^2.$$

El valor de $f$ en 3 es 9, el primer sumando del miembro de la derecha. El segundo es el producto de 6, la derivada de $f$ en 3, por el valor $x - 3 = \Delta x$. El tercer término es $(\Delta x)^2$, que se hace mucho más pequeño que $\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$, o, equivalentemente, $x \to 3$.

### 3.4.2. Derivada y mejor aproximación lineal

La fórmula (3.41) implica que la función lineal

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

cuyo gráfico es la recta que pasa por $P$ con pendiente $f'(x_0)$, es la mejor aproximación posible para $f(x)$ cerca de $x_0$ por una función lineal. Para verlo consideremos la forma genérica de una función lineal que tome el valor $f(x_0)$ en $x_0$:

$$y = f(x_0) + m(x - x_0). \tag{3.42}$$

Al calcular la diferencia entre $f$ evaluada en un punto $x_0 + \Delta x$ y su aproximación $y$ dada por (3.42), empleando para $f$ la fórmula (3.41) y teniendo en cuenta en (3.42) que $x - x_0 = \Delta x$, encontramos

$$f(x) - y = (f'(x_0) - m)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x.$$

Cuando $m \neq f'(x_0)$ el primer sumando en el miembro de la derecha domina la expresión del error para valores pequeños de $\Delta x$, y este resulta ser esencialmente proporcional $\Delta x$. Pero cuando $m = f'(x_0)$ el primer sumando se anula y

$$f(x) - y = \epsilon(\Delta x)\Delta x,$$

se aproxima a cero más rápido que $\Delta x$, porque es el producto de $\Delta x$ por la expresión $\epsilon(\Delta)$ que tiende a cero cuando $\Delta x$ lo hace.

## 3.5. Derivada y movimiento

Otra imagen que es conveniente asociar con la derivada es la de velocidad. Un guepardo puede alcanzar una velocidad del orden de los 110 km/h, pero eso no significa que pueda correr 110 kilómetros en una hora, porque sólo puede mantener esa velocidad por un período muy breve. O sea, para hacer esta afirmación no se puede tener a un guepardo corriendo durante una hora para medir cuánta distancia es capaz de recorrer. ¿Qué significa que en un cierto momento algo se esté desplazando con una velocidad dada?

Tenemos una experiencia directa acerca de lo que la velocidad es en cada instante, conocemos la sensación del aire en la cara cuando pedaleamos a 20 kilómetros por hora y para ver a qué velocidad viaja un auto en la carretera no hace falta observarlo a lo largo de un trecho largo. Pero para explicar lo que son esos 20 kilómetros por hora lo más sencillo es explicar que es la velocidad que nos permite recorrer 20 kilómetros en una hora. ¿Cómo se reconcilian estas dos ideas?

Una forma de hacerlo es medir las distancias recorridas en función del tiempo. Supondremos entonces que un móvil se desplaza sobre un eje coordenada, y que su posición en cada tiempo queda determinada por una función $p$, que en el instante $t$ nos da el valor $p(t)$ de la coordenada en la que está ubicado el móvil.

Si el móvil se desplaza con una velocidad constante $v$, podemos determinarla tomando medidas de posición en un instante $t$ inicial y en un instante posterior $t + \Delta t$ y dividiendo entre el tiempo transcurrido. Encontramos que

$$v = \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t}.$$

Hasta aquí está todo bien si la velocidad es constante. Pero cuando no lo es, es excepcional que este cálculo arroje el verdadero valor de la velocidad en un cierto instante $t$.

Por ejemplo, Usain Bolt detenta el record mundial en los 100 metros llanos, con un guarismo de 9,572 segundos. Si aplicamos a Usain el modelo que acabamos de describir, midiendo el tiempo en segundos y las distancias en metros, podemos fijar el tiempo $t = 0$ como el momento de largada y el origen de nuestro sistema de coordenadas en la línea de salida. Tenemos entonces $p(0) = 0$. Si dejamos transcurrir $\Delta t = 9,572$ unidades de tiempo hasta el momento en que Bolt cruza la linea de llegada, resulta entonces que $p(9,572) = 100$. La velocidad que corresponde a estos números es

$$v = \frac{100}{9,572}\text{m/s} \simeq 10,45\text{m/s} \simeq 37,61\text{km/h}.$$

Esta es la velocidad media durante el trayecto, pero entre los sesenta y ochenta metros de carrera superó los 44 kilómetros por hora. Al inicio, inmediatamente después de la largada, necesariamente tuvo que estar moviéndose a velocidades menores. Porque nadie, ni siquiera Bolt, puede acelerar instantáneamente desde el reposo hasta la velocidad de carrera.

¿Cómo se determina la velocidad de Bolt en un tiempo intermedio? Por ejemplo, a los $t$ segundos de carrera. Una manera de hacerlo es retomar la idea de medir velocidades medias entre los $t$ segundos y un tiempo posterior $t + \Delta t$, y calculando la velocidad media en el intervalo de tiempos $[t, t + \Delta t]$. Esta cantidad se determina a partir de las medidas de posición como el cociente

$$\frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t}.$$

Finalmente, la velocidad en el instante $t$ es el límite cuando $\Delta t$ tiende a cero de estas velocidades medias, y esto es justamente la derivada con respecto a $t$ de la función $p(t)$. De modo que las nociones de velocidad instantánea y de derivada son esencialmente la misma cosa.

**Ejercicio 3.5.1** Cuando un cuerpo cae en el campo gravitatorio uniforme de la Tierra y puede despreciarse la resistencia del aire, la distancia en metros recorrida durante los primeros $t$ segundos de caída puede aproximarse por

$$d(t) = 10t^2.$$

1. Hallar la velocidad del cuerpo a los 3 segundos de caída.
2. Si el cuerpo cae desde una altura de 10 metros, hallar la velocidad con la que este modelo predice que se estrellará contra el suelo.