Capítulo 2

Cortantes y momentos

El objetivo de este capítulo es ilustrar cómo el cálculo de integrales permite estudiar la distribución de esfuerzos en estructura. El espíritu general del capítulo es similar al de la sección **??**, ya que se trata de mostrar cómo el cálculo integral es una herramienta útil para modelar diferentes aspectos de la realidad. Por la relevancia que esta problema concreto tiene para la formación de un arquitecto y su riqueza como ejemplo de aplicación del cálculo, dedicaremos en este curso un espacio destacado al estudio de las solicitaciones en vigas sometidas a diferentes sistemas de cargas.

2.1. Las nociones de cortante y momento

El objetivo de esta sección es presentar a partir del análisis de algunos ejemplos especialmente simples las nociones de *cortante* y *momento flector*, o simplemente *momento*, en cada sección de una viga sometida a un sistema de cargas.

2.1.1. Las reacciones que equilibran una viga empotrada

Comenzaremos considerando una viga de dos metros de longitud empotrada en su extremo derecho, que soporta en su extremo izquierdo una carga de 750 daN, como se muestra en la Figura 2.47.

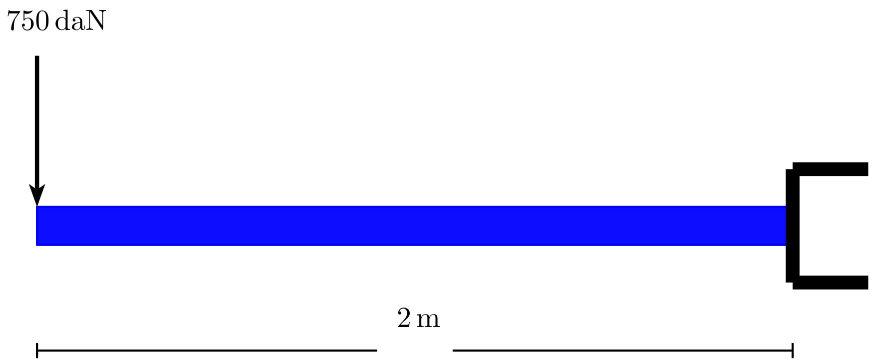


Figura 2.47

Supondremos que el empotramiento es capaz de producir las reacciones necesarias para que todo esté en equilibrio. Es decir, el empotramiento está ejerciendo sobre la barra una fuerza horizontal R_H y una fuerza vertical R_V que compensan las fuerzas aplicadas sobre la barra, y un momento R_M que evita que la fuerza aplicada en el extremo haga girar la barra en sentido antihorario.

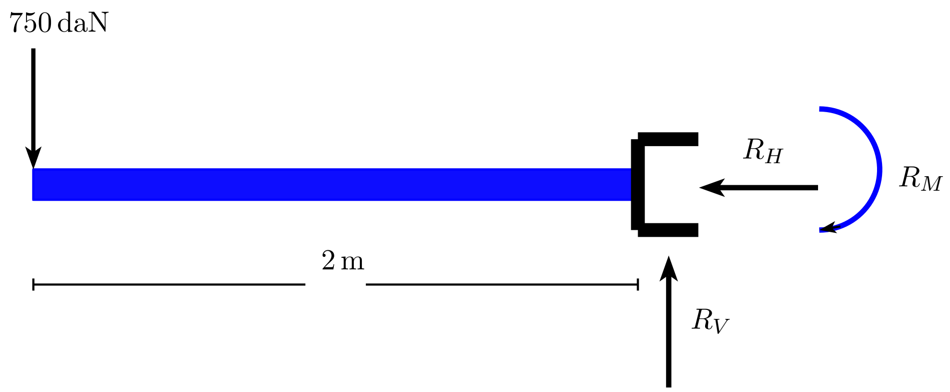


Figura 2.48

La reacción horizontal R_H es fácil de calcular: como las fuerzas aplicadas tienen componente nula en la dirección horizontal la reacción horizontal es nula. La reacción vertical R_V debe equilibrar la carga de 750 daN, por lo que $R_V = 750\,\mathrm{daN}$. Asignamos a R_V signo positivo porque su sentido tiene que ser hacia arriba. Por último, el momento respecto al punto en que está el empotramiento de la fuerza aplicada sobre la barra es

$$M = -750\,\mathrm{daN} \times 2\,\mathrm{m} = -1500\,\mathrm{daNm}.$$

Recordemos que el momento, o torque, de una fuerza respecto a un punto es igual al producto del módulo de la fuerza por la distancia del punto a la línea de aplicación de la fuerza. Hemos asignado además signo negativo a este momento, porque tiene a hacer girar la pieza en sentido antihorario respecto al punto de referencia, que para nosotros es el punto en que está el empotramiento (las convenciones de signo que emplearemos a lo largo de este capítulo están resumidas en la observación 12). Para que la barra esté en equilibrio la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas sobre ella debe ser nula, de modo que

$$-1500\,\mathrm{daNm} + R_M = 0,$$

de donde despejamos

$$R_M = 1500\,\mathrm{daNm}.$$

Vemos entonces que cuando el sistema de cargas es conocido, la condición de que toda la barra esté en equilibrio permite determinar completamente la resultante y el momento del sistema de fuerzas que el empotramiento ejerce sobre la pieza:

$$R_H = 0\,\mathrm{daN}, \quad R_V = 750\,\mathrm{daN}, \quad R_M = 1500\,\mathrm{daNm}.$$

A lo largo del capítulo iremos aplicando sucesivos refinamientos de esta idea, para determinar a partir del conocimiento de las cargas las solicitaciones en diferentes puntos de una pieza en equilibrio.

Observación 12 CONVENCIONES DE SIGNOS PARA FUERZAS Y MOMENTOS. Vale la pena resumir aquí las convenciones de signos que usaremos para las fuerzas y momentos.

- Consideraremos las fuerzas horizontales positivas cuando su sentido es el sentido positivo del eje Ox, hacia la derecha del observador. Esta convención no tendrá mayor importancia para nosotros, porque solo trabajaremos con cargas verticales.

- Consideraremos las fuerzas verticales positivas cuando su sentido es el sentido positivo del eje Oy, hacia arriba.

- Consideraremos positivo el momento de una fuerza respecto a un punto cuando la fuerza tienda a producir alrededor del punto un giro en sentido horario. Cuando la tendencia al giro sea en sentido antihorario asignaremos al momento signo negativo.

Ejemplo 22 Vamos a considerar ahora una modificación de la situación anterior, en la que la fuerza de 750 daN se distribuye en una fuerzas de 350 daN aplicada en el extremo y otra de 400 daN en el punto medio de la barra. Ver la Figura 2.49.

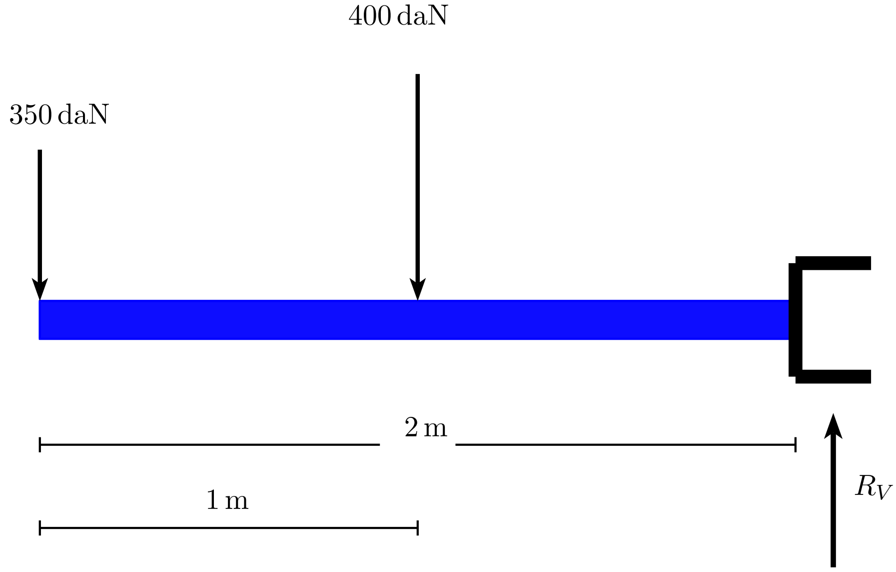


Figura 2.49

No prestaremos atención a la reacción horizontal R_H, porque no hay cargas aplicadas en el sentido horizontal. La condición de equilibrio implica que la resultante de las componentes verticales de todas las fuerzas aplicadas debe ser nula. Teniendo en cuanta que las cargas están aplicadas en el sentido al que hemos asignado signo negativo, la ecuación que describe el equilibrio es

$$-350\,\text{daN} - 400\,\text{daN} + R_V = 0. \tag{2.1}$$

Despejamos

$$R_V = 750\,\text{daN}.$$

El resultado no es para nada sorprendente. Dado que solo hemos redistribuido el mismo total de carga, la componente vertical de la reacción es igual a la de nuestro primer ejemplo.

La ecuación de equilibrio de los momentos respecto al empotramiento, análoga a (2.2) pero para los momentos y no para las componentes verticales de las fuerzas, es

$$-350\,\text{daN} \times 2\,\text{m} - 400\,\text{daN} \times 1\,\text{m} + R_M = 0. \tag{2.2}$$

Haciendo las cuentas y despejando R_M resulta

$$R_M = 1100\,\text{daNm}.$$

El momento en el empotramiento es menor que el que habíamos encontrado para la situación en que toda la carga estaba apoyada en el extremo.

Observación 13 Nuestra experiencia seguramente indique que es más fácil doblar una varilla haciendo fuerza lejos del punto en que está sujeta. Es una situación típica cuando se quiere quebrar una rama: buscamos poner la mano lo más lejos posible del pie que sujeta la rama y la misma fuerza que puede quebrar una rama larga no logra hacerlo con una rama corta. En el ejemplo, acercar parte de la carga al punto del empotramiento produjo una disminución del momento flector en el empotramiento. ♠♣

Ejercicio 2.1.1 Calcular las reacciones en el empotramiento para barras de 1, 2 y 3 metros de longitud que soportan en su extremo cargas de 300 daN y 600 daN. Hacer el cálculo en general, para una barra de longitud l que soporta en su extremos una carga de Q daN.

Ejercicio 2.1.2 Calcular las reacciones en el empotramiento para una barras de 2 metros de longitud sometida al esquema de cargas que se representa en la figura 2.50.

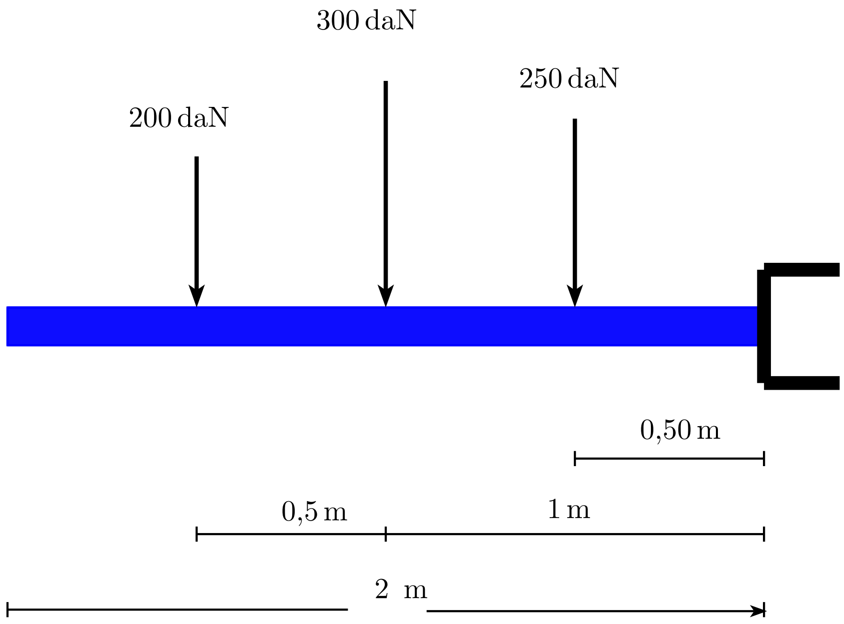


Figura 2.50

2.1.2. Solicitaciones al interior de la pieza

A modo de introducción al siguiente paso en nuestro camino, proponemos al lector un texto de Julio Cortázar.

Posibilidades de la abstracción

Trabajo desde hace años en la Unesco y otros organismos internacionales, pese a lo cual conservo algún sentido del humor y especialmente una notable capacidad de abstracción, es decir, que si no me gusta un tipo lo borro del mapa con sólo decidirlo, y mientras él habla y habla yo me paso a Melville y el pobre cree que lo estoy escuchando. De la misma manera, si me gusta una chica puedo abstraerle la ropa apenas entra en mi campo visual, y mientras me habla de lo fría que está la mañana yo me paso largos minutos admirándole el ombliguito. A veces es casi malsana esta facilidad que tengo.

El lunes pasado fueron las orejas. A la hora de le entrada era extraordinario el número de orejas que se desplazaban en la galería de entrada. En mi oficina encontré seis orejas; en la cantina, a *mediodía, había más de quinientas, simétricamente ordenadas en dobles filas. Era divertido ver de cuando en cuando dos orejas que remontaban, salían de la fila y se alejaban. Parecían alas.*

El martes elegí algo que creía menos frecuente: los relojes de pulsera. Me engañé, porque a la hora del almuerzo pude ver cerca de doscientos que sobrevolaban las mesas en movimiento hacia atrás y adelante, que recordaba particularmente la acción de seccionar un biftec. El miércoles preferí (con cierto embarazo) algo más fundamental, y elegí los botones. ¡Oh espectáculo! El aire de la galería lleno de cardúmenes de ojos opacos que se desplazabn horizontalmente, mientras a los lados de cada pequeño batallón horizontal se balanceaban pendularmente dos, tres o cuatro botones. En el ascensor la saturación era indescriptible: centenares de botones inmóviles, o moviéndose apenas, en un asombroso cubo cristalográfico. Recuerdo especialmente una ventana (era por la tarde) contra el cielo azul. Ocho botones rojos dibujaban una delicada vertical, y aquí y allá se movían suavemente unos pequeños discos nacarados y secretos. Esa mujer debía ser tan hermosa.

El miércoles era de ceniza, día en que los procesos digestivos me parecieron ilustración adecuada a la circunstancia, por lo cual a las nueve y media fui mohino espectador de la llegada de centenares de bolsas llenas de papilla grisácea, resultante de la mezcla de corn-flakes, café con leche y medialunas. En la cantina vi cómo una naranja se dividía en prolijos gajos, que en un momento dado perdían su forma a cierta altura de un depósito blanquecino. En este estado la naranja recorrió el pasillo, bajó cuatro pisos y luego de entrar en una oficina, fue a inmovilizarse en un punto situado entre los dos brazos de un sillón. Algo más lejos se veían en análogo reposo un cuarto de litro de té cargado. Con curioso paréntesis (mi facultad de abstracción suele ejercerse arbitrariamente) podía ver además una bocanada de humo que se entubaba verticalmente, se dividía en dos translúcidas vejigas, subía otra vez por el tubo y luego de una graciosa voluta se disersaba en barrocos resultados. Más tarde (yo estaba en otra oficina) encontré un pretexto para volver a visitar la naranja, el té y el humo. Pero el humo había desaparecido, y en vez de la naranja y el té había dos desagradables tubos retorcidos.

Hasta la abstracción tiene su lado penoso; saludé a los tubos y me volví a mi despacho. Mi secretaria lloraba, leyendo el decreto por el cual me dejaban cesante. Para consolarme decidí abstraer sus lágrimas, y por un rato me deleité con esas diminutas fuentes cristalinas que nacían en el aire y se aplastaban en los biblioratos, el secante y el boletín oficial. La vida esta llena de hermosuras así.

El texto de Cortázar ilustra una inusual capacidad de ver fragmentos del mundo, haciendo abstracción de todo lo demás. Necesitaremos esta habilidad para analizar cómo se distribuyen los esfuerzos al interior de las piezas. En particular, al interior de las barras que estamos considerando. En la sección 2.1.1 considerábamos el equilibrio de **toda** la barra, y el análisis del equilibrio nos permitió calcular las reacciones en el empotramiento. En esta sección vamos a aislar un **tramo** de la barra para calcular los esfuerzos que se trasmiten al resto de la barra a través de la sección que separa ese tramo del resto de la pieza. Nuestro primer ejemplo hace este análisis para el primer tramo de 80 centímetros de la barra de la figura 2.51 y nos permitirá analizar los esfuerzos que se transmiten a través de la sección que eslotá a una distancia de 80 cm del extremo y 120 cm del empotramiento.

Ejemplo 23 Siguiendo al personaje de Cortázar, aislaremos los primeros 0,8 metros de la barra para analizar su equilibrio bajo la acción de las siguientes fuerzas aplicadas sobre él: en el extremo izquierdo actúa la carga de 750 daN; en el extremo derecho hay un sistema de fuerzas que el tramo a la derecha de la sección S ubicada a 0,8 m del extremo ejerce sobre el tramo que estamos analizando. Igual que hicimos antes con las reacciones, este sistema de fuerzas puede resumirse en una resultante horizontal H_D, una resultante vertical V_D y un momento flector resultante M_D.

Utilizamos el subíndice D para enfatizar que son los esfuerzos que el tramo de la derecha ejerce sobre el de la izquierda.

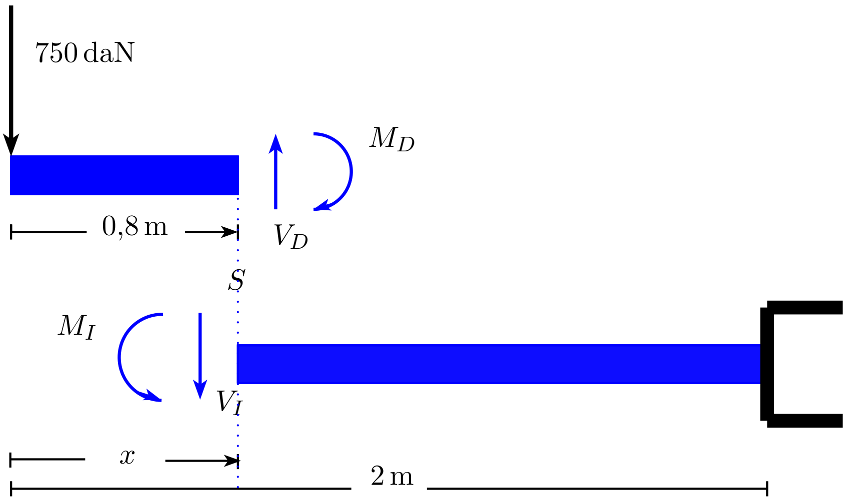


Figura 2.51

La componente H_D es nula porque no hay fuerzas horizontales aplicadas, de modo que a través de la sección S no puede transmitirse ninguna fuerza neta en el sentido horizontal. La componente vertical V_D debe satisfacer la condición de equilibrio

$$-750\,\text{daN} + V_D = 0, \tag{2.3}$$

de la que podemos despejar

$$V_D = 750\,\text{daN}.$$

El equilibrio de los momentos implica

$$-750\,\text{daN} \times 0{,}8\text{m} + M_D = 0, \tag{2.4}$$

por lo que

$$M_D = 600\,\text{daNm}.$$

La condición de equilibrio sumada a nuestra capacidad de abstraer cualquier porción de materia del resto del universo nos ha permitido determinar las resultantes de los esfuerzos que se trasmiten de un tramo a otro de la viga a través de la sección S. ♣

Así como hay un esfuerzo que el tramo a la derecha de la sección S trasmite sobre el que está a la izquierda, hay esfuerzos que el tramo a la derecha trasmite sobre el tramo a la izquierda. Podemos caracterizar el efecto total de estos esfuerzos por una resultante horizontal H_I, una resultante V_I y un momento neto M_I. El principio de acción y reacción implica que las fuerzas que el tramo izquierdo hace sobre el derecho son exactamente las opuestas a las que el derecho hace sobre el izquierdo. Por lo tanto

$$V_I = -V_D, \quad M_I = -M_D. \tag{2.5}$$

Naturalmente, hay una ecuación análoga para las resultantes horizontales, pero no la escribimos porque a partir de este momento nos vamos a desentender de los esfuerzos horizontales, porque trabajaremos con cargas que solo tienen componentes no nulas en la dirección vertical.

A continuación, enfocaremos nuestra atención en las resultantes izquierda que hemos dado en llamar V_I y M_I.

Definición 5 CORTANTE Y MOMENTO.

1. *El cortante en la sección S de una barra es la resultante de los esfuerzos verticales que el tramo de la barra a la izquierda de S trasmite al tramo de la barra a la derecha de S.*

2. *El momento flector en la sección S de una barra es el momento respecto al centro de la sección S resultante de los esfuerzos que el tramo de la barra a la izquierda de S trasmite al tramo de la barra a la derecha de S.*

La mayor parte del tiempo vamos a llamar simplemente *momento* al momento flector que acabamos de introducir. Aunque usual, es un término que puede generar cierta confusión, porque el momento de un sistema de fuerzas solo está definido cuando está claramente especificado cuál es el sistema de fuerzas y respecto a qué punto se está calculando el momento. En las aplicaciones al cálculo de estructuras, el contexto permitirá eliminar la ambigüedad que introduce el empleo de la palabra “momento”.

Observación 14 NOTACIÓN PARA LOS CORTANTES Y MOMENTOS. Dado que de las dos posibles resultantes de esfuerzos verticales V_I y V_D vamos a enfatizar V_I, en lo sucesivos eliminaremos el subíndice I y escribiremos simplemente V para designar el cortante. Análogamente, indicaremos con M el momento flector, o momento. Tanto el cortante como el momento están referido a **una** sección de la pieza, por lo que es conveniente incluir en la notación la referencia a la sección. La manera usual de hacerlo es identificar la sección por una coordenada x que determina su ubicación en la barra y referirse al cortante y el momento en la sección que ocupa la posición x como $V(x)$ y $M(x)$ respectivamente.

En el ejemplo que estamos considerando introducimos una coordenada x que mide en metros la distancias desde el extremo de la barra, por lo que la sección que hemos considerado corresponde a $x = 0{,}8$. ♠

Ejemplo 24 Vamos a cerrar ahora los cálculos que comenzamos en el ejemplo 23, poniéndolos en el contexto que introdujimos a través de la definición 5 y empleando la notación de la obsevación 14.

De acuerdo a la ecuación (2.5) el cortante $V(0{,}8)$ es igual al opuesto $-V_D$ de los esfuerzos que el tramo de la derecha descarga sobre el de la izquierda, algo que escribimos como

$$V(0{,}8) = -V_D. \tag{2.6}$$

Usando (2.6) en la ecuación de equilibrio (2.3) obtenemos

$$-750 - V(0{,}8) = 0,$$

de la que inmediatamente despejamos

$$V(0{,}8) = -750\,\mathrm{daN}. \tag{2.7}$$

El cortante $V(0,8)$ en $x = 0{,}8$ es exactamente igual a la carga aplicada en el tramo a la izquierda de $x = 0{,}8$ de ese punto.

Un análisis similar puede hacerse para los momentos. El momento $M(0{,}8)$ es igual al opuesto $-M_D$ del momento neto que el tramo de la derecha ejerce sobre el de la izquierda, de modo que

$$M(0{,}8) = -M_D. \tag{2.8}$$

Combinamos ahora (2.8) con la ecuación de equilibrio (2.4) y obtenemos

$$-600\, daN - M(0{,}8) = 0,$$

que implica

$$M(0{,}8) = -600\,\mathrm{daNm}. \tag{2.9}$$

Podemos hacer una observación similar a la que cierra nuestro cálculo del cortante $V(0{,}8)$: el momento en 0,8 es exactamente igual al momento respecto a $x = 0{,}8$ de las carga aplicadas en el tramo a la izquierda de $x = 0{,}8$. ♣

2.1.3. El cálculo del cortante $V(x)$ y el momento flector $M(x)$

Las observaciones que cierran los cálculos del cortante y el momento para $x = 0{,}8$ en el ejemplo 24 responden a algo completamente general: al aislar el tramo de la viga que está a la izquierda de una cierta sección S y concentrarnos en los esfuerzos que se trasmiten a través de $\mathcal{S}$, encontramos que la única forma de equilibrar las cargas que recibe el tramo a la izquierda de $\mathcal{S}$ es descargarlas hacia la derecha a través de $\mathcal{S}$.

Esta observación es el núcleo conceptual de la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 9 *Consideremos la sección S de una viga ubicada en la posición definida por la coordenada x. Entonces el cortante $V(x)$ es igual a la resultante de todos los esfuerzos verticales aplicados sobre la viga a la izquierda de x y el momento flector $M(x)$ es igual a la suma de los momentos respecto a x de todas las cargas aplicadas a la izquierda de x.*

Esta proposición nos permite calcular cortantes y momentos simplemente evaluando resultantes de sistemas de fuerzas aplicados sobre la parte de la barra que nos interese aislar.

Ejemplo 25 En este ejemplo vamos a calcular los valores $V(0{,}5)$, $M(0{,}5)$, $V(1{,}5)$ y $M(1{,}5)$ de los cortantes y momentos a medio metro y a un metro y medio del extremo de la viga, para la viga del ejemplo 22.

A la izquierda de $x = 0{,}5$ solo está aplicada la carga de 350 daN en el extremo. Tenemos entonces que

$$V(0{,}5) = -350\,\mathrm{daN}.$$

El signo de menos es porque la carga actúa en el sentido negativo de la dirección vertical. Para el cálculo del momento tenemos que tener en cuenta la distancia de 0,5 m que hay entre la sección en la que estamos trabajando y el punto de aplicación de la carga. El resultado es

$$M(0{,}5) = -350\,\mathrm{daN} \times 0{,}5\,\mathrm{m} = -175\,\mathrm{daNm}.$$

El cálculo para $x = 1{,}5$ requiere considerar las dos cargas aplicadas sobre la barra. El cortante es

$$V(1{,}5) = -350\,\mathrm{daN} - 400\,\mathrm{daN} = -750\,\mathrm{daN},$$

la suma de ambas cargas. El cálculo del momento requiere considerar para cada una de ellas la distancia de la sección en $x = 1{,}5$ al punto de aplicación de cada carga:

$$M(1{,}5) = -350\,\mathrm{daN} \times (1{,}5 - 0)\,\mathrm{m} - 400\,\mathrm{daN} \times (1{,}5 - 1)\,\mathrm{m} = -725\,\mathrm{daNm}.$$

En el cálculo hemos hecho explícito que la distancia de la sección al punto de aplicación es la diferencia entre la coordenada de la sección y el punto en que está aplicada cada fuerza. Esta expresión reaparecerá en el siguiente ejemplo. ♣

Ejemplo 26 En este ejemplo vamos a generalizar lo que hicimos en el anterior, calculando los valores de los cortantes $V(x)$ y $M(x)$ para un punto genérico de la viga del ejemplo 22. Para los valores de x entre 0 y 1 solo tendremos que considerar la carga de 350 daN aplicada en el extremo de la viga. Cuando x esté entre 1 y 2 la sección en x debe transmitir hacia la derecha los esfuerzos resultantes de ambas cargas. Tenemos entonces que

$$V(x) = -350\,\mathrm{daN}, \quad 0 < x < 1.$$

Para el momento resulta

$$M(x) = -350\,\mathrm{daN} \times (x - 0)\mathrm{m} = -350x\,\mathrm{daNm}, \quad 0 < x < 1.$$

Cuando pasamos al otro intervalo encontramos

$$V(x) = -350\,\mathrm{daN} - 400\,\mathrm{daN} = -750\,\mathrm{daN}, \quad 1 < x < 2,$$

y

$$M(x) = -350\,\mathrm{daN} \times (x - 0)\,\mathrm{m} - 400\,\mathrm{daN} \times (x - 1)\,\mathrm{m} = -750x + 400\,\mathrm{daNm}.$$

En resumen, las fórmulas para el cortante $V(x)$ son

$$V(x) = \begin{cases} -350, & 0 < x < 1, \\ -750, & 1 < x < 2, \end{cases} \tag{2.10}$$

y para el momento flector $M(x)$ son

$$M(x) = \begin{cases} -350x, & 0 < x < 1, \\ -750x + 400, & 1 < x < 2, \end{cases} \tag{2.11}$$

No hemos puesto las unidades en las fórmulas, pero hemos seguido el uso que será habitual en el resto del curso, las longitudes se expresarán en metros, las fuerzas en decanewton y los momentos en decanewton×metro, a menos que se explicite lo contrario.

En la figura 1 graficamos las funciones $V(x)$ y $M(x)$.

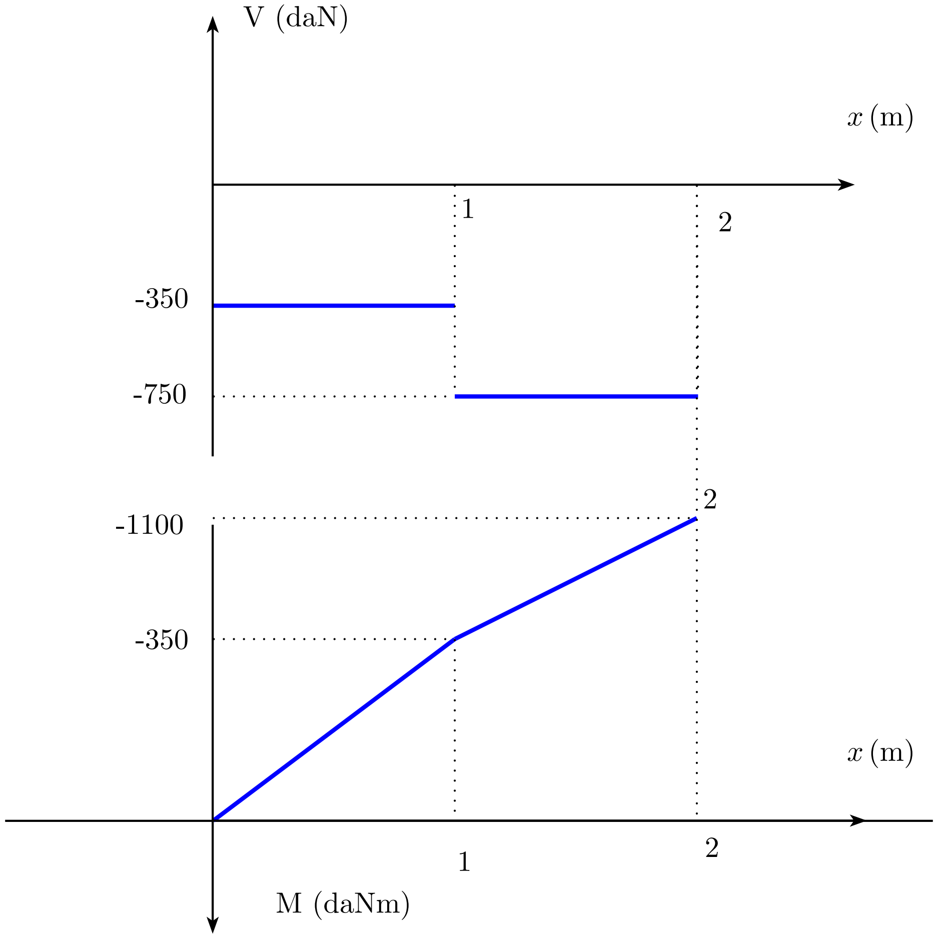


Figura 2.52

Estos gráficos son lo que en la jerga de los cursos de Estabilidad se llaman *diagrama de cortantes* y *diagrama de momentos*. El diagrama de momentos está dibujado con la peculiaridad de que el sentido negativo del eje vertical fue representado hacia arriba. Con está convención, el diagrama de momentos genera un dibujo que cualitativamente reproduce las deformaciones que tendrá la viga al ser sometida a la carga que originó el diagrama y explicita de qué lado de la viga estarán las fibras traccionadas. Dado que los materiales de construcción no resisten del mismo modo las tracciones que las compresiones, es importante para el diseño distinguir una situación de la otra. ♣

Observación 15 No hemos definido el cortante y el momento en los puntos de aplicación de las cargas. Para el momento podríamos hacerlo, porque la carga puntual aplicada en un punto tiene momento nulo respecto a ese punto y no genera ninguna discontinuidad en las fórmulas ni en el gráfico. Las fórmulas y gráficos de los cortante sí exhiben un punto de discontinuidad, que genera cierta ambigüedad para la definición del cortante en el punto en que está aplicada la carga. Lo habitual en los cursos de Estabilidad es adoptar como valor el de mayor valor absoluto, porque es el que pone en evidencia los esfuerzos a los que estará sometida la pieza en ese punto. Esto todavía tiene el problema de decidir qué hacer cuando hay un valor negativo y otro positivo con igual valor absoluto. La matemática resuelve este problema con una convención ligeramente diferente. La realidad es que no es demasiado importante tener una definición del cortante en esos puntos así que nos limitaremos a dar fórmulas para los cortantes fuera de los puntos de aplicación de cargas puntuales.♠

Observación 16 El cortante $V(x)$ y el momento $M(x)$ llegan a $x = 2$ con un valor contrario al de las reacciones en el empotramiento. Este hecho es una expresión de que el equilibrio de la viga requiere que las reacciones en el empotramiento compensen los esfuerzos que la sección en $x = 2$ transmite hacia los anclajes. Si al calcular un diagrama de cortantes o momentos no se observa esta relación con las reacciones, es señal de que hay algún error en alguna parte.♠

Observación 17 VERIFICACIONES. El ejemplo 26 generaliza los cálculos del ejemplo 25. Por lo tanto, las fórmulas (2.10)-(2.11) para el cortante y el momento deberían reproducir los valores que ya teníamos al ser evaluadas en $x = 0{,}5$ y $x = 1{,}5$. Para los valores del cortante una simple inspección muestra que así es. Para el momento calculamos

$$M(0{,}5) = -350 \times 0{,}5 = -175, \qquad M(1{,}5) = -750 \times 1{,}5 + 400 = -725.$$

Ambos concuerdan con lo que habíamos calculado antes.

Aprovechamos para reiterar aquí un principio general: verificar cuando se tiene la oportunidad de hacerlo hace a la responsabilidad con la que se encara cualquier trabajo. ♠

Ejercicio 2.1.3 Calcular los cortantes $V(x)$ y $M(x)$ y representar los diagramas de cortantes y momentos para las vigas de los ejercicio 2.1.1 y 2.1.2.

2.2. Cortantes: el caso de cargas distribuidas

Las nociones de cortante y momento que discutimos en la sección 2.1 pueden aplicarse en presencia de cargas distribuidas o de una combinación de cargas distribuidas y cargas puntuales. En esta sección discutiremos cómo calcular los cortantes. Comenzaremos con el caso más sencillo, cuando las cargas que soporta una ménsula están uniformemente distribuidas, o al menos uniformemente distribuidas sobre partes de la ménsula.

2.2.1. Cortante en una ménsula sometida a cargas distribuida constantes

En nuestro dos primeros ejemplos analizaremos una carga distribuida constante y una carga distribuida constante a trozos sobre una ménsula. En esta situación sencilla reconoceremos que el cortante puede calcularse como una integral de las cargas distribuidas, hecho que se generaliza a cargas cualesquiera.

Ejemplo 27 La viga de la Figura 2.53 tiene 2 metros de longitud, está empotrada en su extremo derecho y soporta una carga distribuida constante de de 100 daN/m.

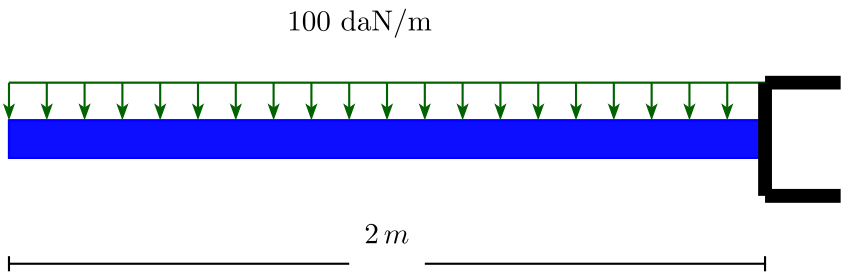


Figura 2.53

En esta situación, no hay ninguna carga concentrada en ningún punto, pero la carga sobre cada tramo de la viga es proporcional a la longitud. Cada tramo de un metro está cargado con 100 daN, entre el extremo izquierdo de la viga y el punto que está a 30 cm del extremo izquierdo hay una carga de

$$0{,}3\,\text{m} \times 100\,\text{daN/m} = 30\,\text{daN}.$$

En general, si un tramo de la viga tiene longitud l, medida en metros, estará recibiendo una carga de $100 \times l$ daN. Un tramo de 1,5 m recibe una carga total de 150 daN, un tramo de medio metro recibe 50 daN y uno de 25 cm recibe 25 daN.

Luego de esta discusión estamos en condiciones de determinar el cortante en una sección cualquiera de la viga. Para identificar las secciones utilizaremos una coordenada x, que mide en metros la distancia de cada sección al extremo izquierdo de la barra.

Escogeremos $x = 0,8$ y determinaremos el cortante $V(0{,}8)$ en ese punto. De acuerdo a la discusión que presentamos en la sección 2.1 y que culminó en la proposición 9, página 81, el cortante en $V(0{,}8)$ es igual al total de las cargas verticales sobre la barra en el tramo entre $x = 0$ y $x = 0{,}8$. Este tramo tiene una longitud de 0,8 m, por lo que

$$V(0{,}8) = -100\,\mathrm{daN/m} \times 0,8\,\mathrm{m} = -80\,\mathrm{daN}. \tag{2.12}$$

El signo de menos es porque la carga actúa hacia abajo, el sentido negativo del eje vertical.

Ejercicio 2.2.1 Calcular $V(0,1)$, el cortante en $x = 0,1$, a diez centímetros de distancia del extremo izquierdo de la viga, y $V(1,5)$, el cortante a un metro y medio de distancia.

El cálculo del cortante $V(x)$ para una sección cualquiera con $0 \leq x < 2$ no reviste ninguna dificultad adicional: el tramo de barra entre 0 y x tiene longitud x, por lo que el cortante es

$$V(x) = -100\,\mathrm{daN/m} \times x\,\mathrm{m} = -100x\,\mathrm{daN}.$$

Como era previsible, el cortante va variando con x. En la Figura 2.54, aparecen los gráficos de la densidad de carga q y el cortante V para este ejemplo.

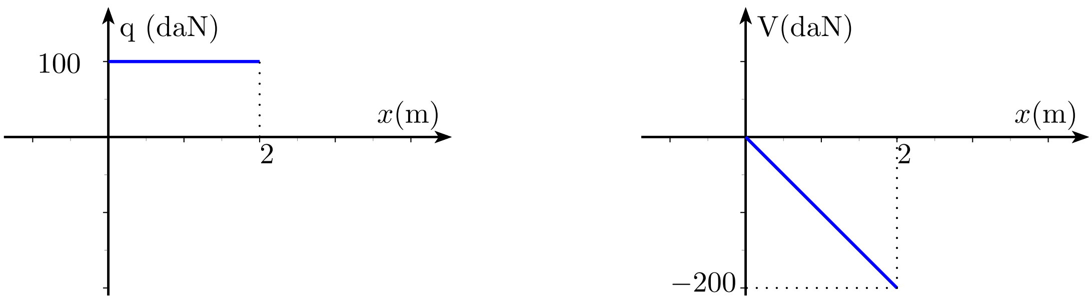


Figura 2.54.

La fórmula

$$V(x) = -100 \times x$$

responde al hecho de que el total de carga en cada tramo de la barra es igual al producto

$$\text{intensidad de la carga distribuida} \times \text{longitud del tramo}$$

y a la convención de signos para los sentidos de las fuerzas. Para cada x el cortante $V(x)$ coincide con el opuesto del área encerrada bajo el gráfico de la Figura 2.54 entre 0 y x. Por lo tanto, podemos escribir

$$V(x) = -\int_0^x 100ds. \tag{2.13}$$

La integral realiza entonces la tarea de acumular el total de las cargas aplicadas en ese tramo y sustituye, para este caso continuo, la operación de sumar que se utiliza para calcular la resultante de varias cargas puntuales.

Ejemplo 28 Introduciremos una ligera variación a la situación que estudiamos en el ejemplo anterior. Supondremos la viga cargada con una carga distribuida q que tiene un valor constante de 100 daN/m en el primer metro y medio de la barra y de 300 daN/m en el último tramo de medio metro.

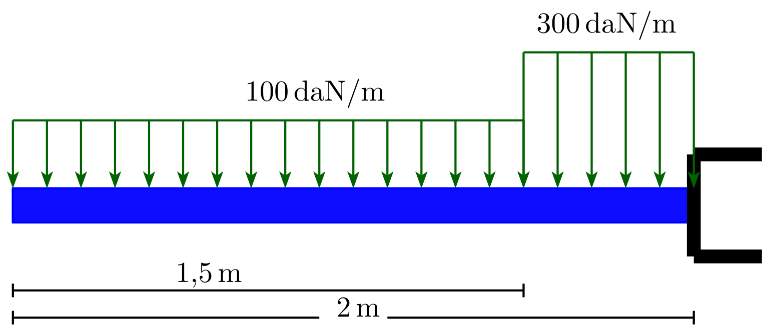


Figura 2.55

El cortante $V(x)$ para $1{,}5 \leq x < 2$ es igual al total de carga acumulada entre 0 y x. Debemos contar el primer tramo, que tiene una carga total de

$$100\,\text{daN/m} \times 1{,}5\,\text{m} = 150\,\text{daN}.$$

más lo que aporta el tramo entre 1,5 y x, que es

$$300\,\text{daN/m} \times (x - 1{,}5)\,\text{m} = 300x - 450\,\text{daN}.$$

El cortante en el tramo que estamos considerando es entonces igual al opuesto de la suma de estas dos contribuciones, de modo que

$$V(x) = -(150 + 300x - 450) = -300x + 300\,\text{daN}, \quad 1{,}5 \leq x < 2.$$

Ejercicio 2.2.2 Mostrar que para $0 \leq x \leq 1{,}5$ el cortante vale

$$V(x) = -100x.$$

En resumen las fórmulas para la distribución de carga $q(x)$ y el cortante $V(x)$ son, en este ejemplo

$$q(x) = \begin{cases} 100, & 0 \leq x < 1{,}5, \\ 300, & 1{,}5 \leq x < 2, \end{cases} \qquad V(x) = \begin{cases} -100x, & 0 \leq x \leq 1{,}5, \\ -300x + 300, & 1{,}5 \leq x < 2, \end{cases}$$

Los gráficos de la carga y el cortante se muestran en la Figura 2.56.

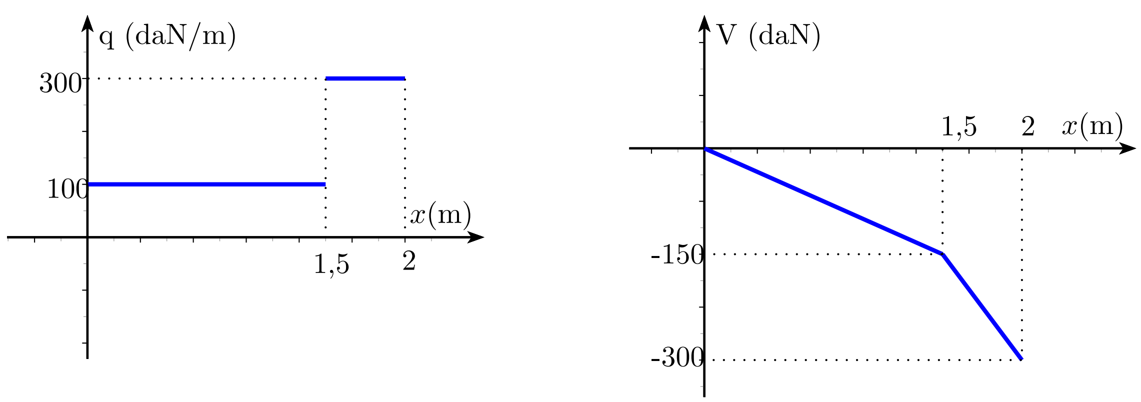


Figura 2.56.

Encontramos nuevamente que podemos expresar el cortante como el opuesto de una integral de la carga, en la forma

$$V(x) = -\int_0^x q(s)ds.$$

Esta fórmula es una expresión de que el cortante es igual a la resultante de las componentes verticales aplicadas a la izquierda de la sección en x. Nuevamente, la integral sustituye en este caso continuo a la operación de suma que permite calcular resultantes en los casos discretos en que hay fuerzas puntuales aplicadas. ♣

Ejercicio 2.2.3 Para la viga de la Figura 2.57:

1. hallar el cortante $V(x)$ en $x = 0,5$,
2. hallar el cortante $V(x)$, para cada $x \in (0,\ 1,5)$,
3. verificar que la fórmula hallada en la parte (2) predice correctamente el valor hallado en 1.

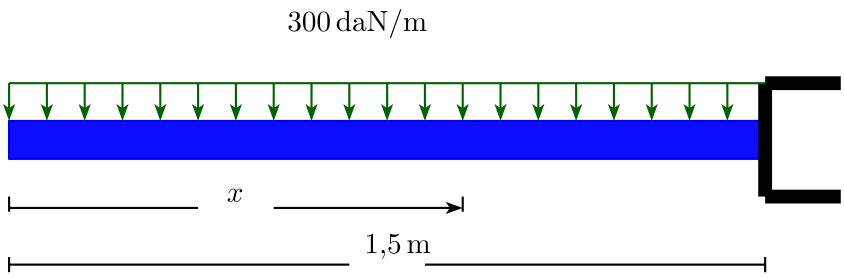


Figura 2.57

Ejercicio 2.2.4 Para la barra de la Figura 2.58 calcular:

1. el cortante en el punto medio;
2. el cortante $V(x)$ para cada x en el intervalo (1,4, 2);
3. la componente vertical R_V de la reacción en el empotramiento.

Graficar el cortante.

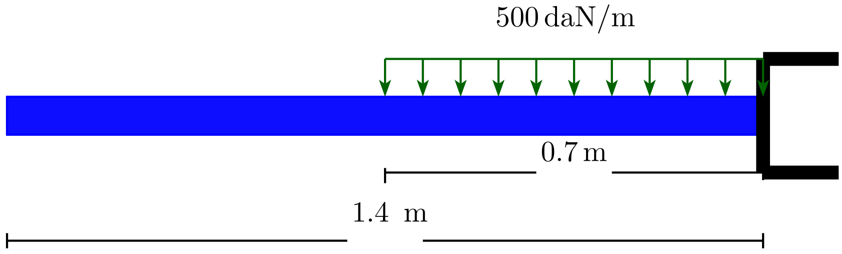


Figura 2.58

Ejercicio 2.2.5 Una viga de 1, 20 m de longitud empotrada en su extremo de la derecha soporta en sus primeros 40 cm (contados desde su extremo izquierdo) una carga distribuida de 300 daN/m y en sus último 80 cm una carga distribuida de 500 daN/m.

1. Calcular el cortante en $x = 0,4$ y $x = 0,8$.
2. Calcular el cortante para cada $x \in (0,\ 1,2)$.
3. Hacer los gráficos de la carga aplicada $q(x)$ y el cortante $V(x)$.
4. Hallar la componente vertical R_V de la reacción en el empotramiento.

Ejercicio 2.2.6 Crear un ejercicio en el que solicite el cálculo y gráfico de cortantes para una viga empotrada en su extremo derecho que esté sometida en distintos tramos a cargas distribuidas constantes, con diferentes intensidades en los distintos tramos. Intercambiar el ejercicio creado con el de otro compañero, resolverlos y comentar los resultados.

2.2.2. Cargas distribuidas cualesquiera

Cuando una carga se distribuye sobre una estructura no tiene por qué hacerlo de manera uniforme. Por ejemplo, cuando estamos de pie, nuestro peso se distribuye sobre la planta de los pies, generando una cierta presión sobre el suelo. Esta presión varía de un punto a otro, e incluso podemos modificarla intencionalmente balanceándonos ligeramente o modificando la configuración de los pies o las piernas. Este comentario general se aplica también a las descargas sobre vigas. Un tramo de viga de cierta longitud (que mediremos en metros) recibirá una cierta carga (que mediremos en Newton) que cambiará de un tramo a otro, pero no será necesariamente proporcional a la longitud del tramo. Si la variable x identifica cada punto de la viga, la distribución de carga quedará caracterizada entonces por una función $q(x)$, que tendrá unidad de `fuerza/distancia`, que, en general, ya no será constante.

El ejemplo de una persona de pie sobre el suelo puede adaptarse para pensar en una situación de este tipo: imaginémosnos acostados sobre una viga. Nuestro peso no se distribuirá uniformemente sobre los diferentes tramos de la viga (de hecho, raramente se distribuye uniformemente: tanto las sensaciones de nuestro cuerpo tendido como la huella irregular que dejamos en la arena luego de estar tumbados un rato, nos lo advierten), y además podemos elegir que se distribuya de diferentes maneras, empujando aquí y allá con distintas partes del cuerpo.

Trabajaremos entonces con una viga de cualquier longitud l empotrada en su extremo derecho, y una carga distribuida que en el punto x (donde x mide la distancia en metros desde el extremo izquierdo de la viga) toma el valor $q(x)$.

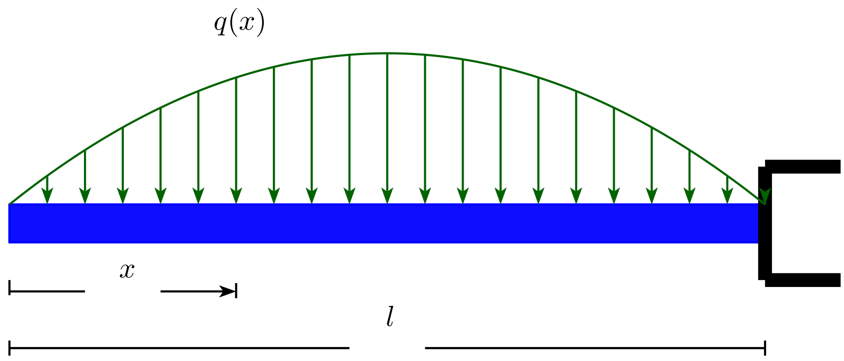


Figura 2.59.

La figura 2.59 muestra una ménsula sometida a una carga distribuida variable, que tiene mayor intensidad hacia el centro de la viga. Supondremos que el empotramiento es capaz de producir las reacciones que compensan la carga sobre la viga, de modo que todo permanezca en equilibrio. En esta situación, podemos repetir el análisis que presentamos en la sección 2.2.1, para estudiar el cortante $V(x)$. Es decir, el esfuerzo vertical que el tramo de la viga entre el extremo izquierdo y la sección ubicada en x descarga sobre el tramo de la viga a la derecha de x.

La figura 2.60 muestra el tramo de la izquierda separado del resto, para poner en evidencia que su relación con el de la derecha genera un sistema de fuerzas que puede resumirse en una componente vertical, una componente horizonal y un momento.

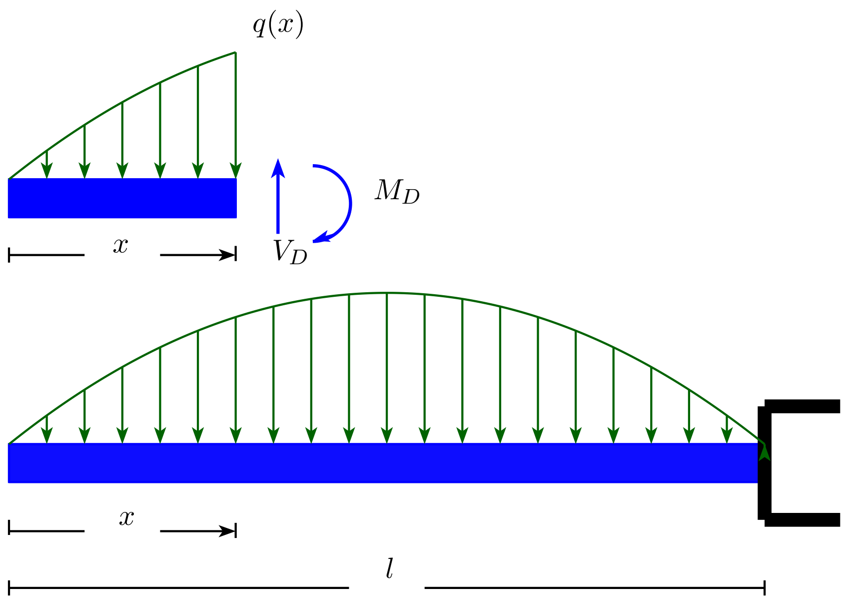


Figura 2.60.

Sobre el tramo de la izquierda actúan la densidad de carga q, un esfuerzo vertical $V_D(x)$ que el tramo de la derecha ejerce sobre él (que evita que la densidad de carga desplace el tramo $[0,x]$ hacia abajo) y un momento flector $M_D(x)$ (que evita que la viga se doble en x, girando en sentido antihorario alrededor de ese punto). Como no hay cargas horizontales aplicadas la resultante de los esfuerzos horizontales en x debe ser nula. El equilibrio de fuerzas en la dirección vertical implica que la suma

$$-Q(x) + V_D(x),$$

debe ser nula. Si tenemos en cuenta además que el principio de acción y reacción implica

$$V(x) = -V_D(x)$$

y expresamos la carga total $Q(x)$ en su forma integral

$$Q(x) = \int_0^x q(s)ds,$$

encontramos que el cortante en x es

$$V(x) = -Q(x) = -\int_0^x q(s)ds. \tag{2.14}$$

Observación 18 Si en vez de una carga distribuida tuviéramos muchas cargas puntuales en el intervalo $[0,x]$, tendríamos que sumarlas para hallar su resultante. En el caso continuo, la integral hace el papel de una suma.

Observemos también que la relación entre la función q que caracteriza una distribución de carga y la carga que soporta cada tramo de viga es análoga a la que tiene la velocidad v y la distancia recorrida en cada intervalo de tiempo. Si q es constante, la carga que soporta cada tramo es proporcional a su longitud; si v es constante el desplazamiento en cada intervalo de tiempo es proporcional al tiempo transcurrido. Cuando q no es constante, tramos de viga de igual longitud pueden soportar cargas diferentes; cuando v no es constante, se pueden recorrer distancias diferentes en intervalos de la misma duración.

En resumen, desde el punto de vista del formalismo matemática, la relación entre las cargas distribuidas y los cortantes es -a menos de un signo- la misma relación que existe entre las velocidades y los desplazamientos en el marco de la cinemática. ♠

Ejemplo 29 Consideraremos la viga de dos metros de longitud, con la distribución de carga triangular

$$q(x) = 100x \,\mathrm{daN/m}$$

que se muestra en la Figura 2.61.

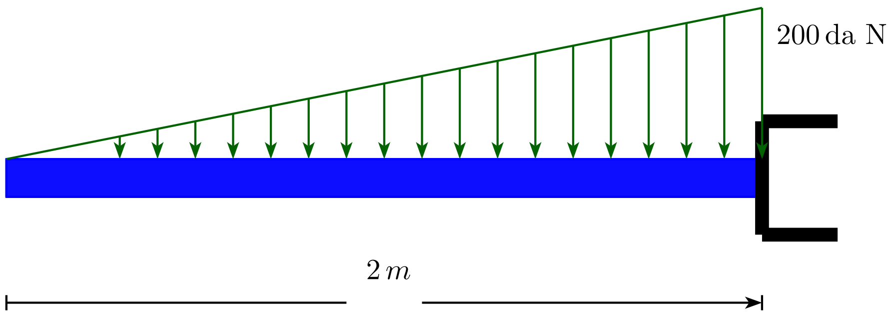


Figura 2.61.

La carga total que soporta la viga es

$$Q = \int_0^2 q(x)dx = \int_0^2 100x dx.$$

Esta integral es igual al área de un triángulo de base igual a 2 m y altura 200 daN/m, de modo que

$$Q = \frac{2\,\mathrm{m} \times 200\,\mathrm{daN/m}}{2} = 200\,\mathrm{daN}.$$

Este valor debe ser también el valor de R_V, la componente vertical de la reacción en el apoyo, que debe equilibrar Q.

Con el mismo tipo de argumentos podemos calcular el cortante en cualquier punto. Por ejemplo, el cortante en $x = 0{,}5$ es

$$V(0{,}5) = -\int_0^{0{,}5} q(x)dx = -\int_0^{0{,}5} 100x dx.$$

El signo de menos aparece ahora porque el cortante $V(x)$ es el esfuerzo que el tramo de la barra a la izquierda de x descarga sobre el tramo a la derecha, no la reacción que lo equilibra. La integral es ahora el área de un triángulo de base igual a 0,5 m y altura

$$q(0{,}5) = 100 \times 0{,}5\,\mathrm{daN/m} = 50\,\mathrm{daN/m},$$

de modo que

$$V(0{,}5) = -\frac{0{,}5\,\mathrm{m} \times 50\,\mathrm{daN/m}}{2} = 12{,}5\,\mathrm{daN}.$$

El caso de un valor genérico de x entre 0 y 2 se calcula con las mismas ideas:

$$V(0{,}5) = -\int_0^x q(s)ds = -\int_0^x 100s ds.$$

La integral es el área de un triángulo de base x m y altura

$$q(x) = 100x,$$

por lo tanto

$$V(x) = -\frac{x \times 100x}{2} = 50x^2. \tag{2.15}$$

En 2.15 la variable m está en m y el cortante $V(x)$ en daN. Observemos que cuando x se aproxima a 2 m el cortante en (2.15) aproxima a -200. Esto es consistente el valor que habíamos encontrado antes para la reacción R_V.

Ejercicio 2.2.7 Verificar que el cálculo de $V(0{,}5)$ que habíamos hecho antes directamente, es consistente con la fórmula (2.15). ♣

Ejercicio 2.2.8 Considerar una viga de dos metros de longitud empotrada en su extremo derecho y sometida a una carga vertical distribuida

$$q(x) = 200(200 - x)\,\text{daN/m}.$$

Calcular la reacción vertical R_V en el empotramiento y el cortante $V(x)$ para $0 \leq x < 2$.

Ejemplo 30 Una viga de seis metros de longitud empotrada en su extremo derecho soporta una carga distribuida

$$q(x) = 800 - 100x - |400 - 100x|\,\text{daN/m}, \tag{2.16}$$

donde x es la distancia al punto izquierdo de la viga, medida en metros. Vamos a calcular primero el cortante en los puntos $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$ y la reacción en el empotramiento (ubicado en $x = 6$).

Para graficar la carga distribuida q comenzaremos por buscar fórmulas lineales, sin el valor absoluto que aparece en su definición. Sabemos que

$$|400 - 100x| = \begin{cases} 400 - 100x\ , & 400 - 100x \geq 0, \\ -(400 - 100x), & 400 - 100x \leq 0. \end{cases}$$

La condición $400 - 100x \geq 0$ es equivalente a $x \leq 4$. Análogamente, $400 - 100x \leq 0$ cuando $x \geq 4$. Por lo tanto,

$$|400 - 100x| = \begin{cases} 400 - 100x, & x \leq 4, \\ -400 + 100x, & x \geq 4. \end{cases}$$

Sustituyendo estas expresiones en la definición de q y haciendo los cálculos obtenemos

$$q(x) = \begin{cases} 400, & x \leq 4, \\ 1200 - 200x, & x \geq 4. \end{cases} \tag{2.17}$$

Observación 19 ¡A VERIFICAR SE HA DICHO! Es conveniente verificar antes de seguir adelante. Evaluamos

$$q(4) = 800 - 100 \times 4 - |400 - 100 \times 4| = 400,$$

valor que está en acuerdo con el que las dos fórmulas en (2.17) predicen: la primera directamente devuelve la constante 400 en todo el intervalo $[0, 4]$; la segunda es

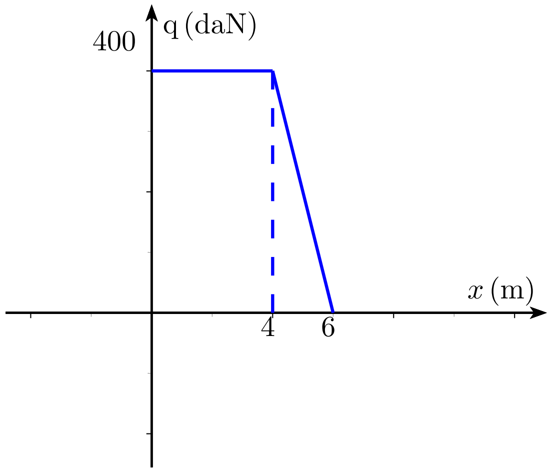
$$1200 - 200 \times 4 = 400.$$

Completamos la verificación calculando $q(0)$ a partir de la expresión (2.16), que da 400. La segunda fórmula en (2.17) sugiere que q debe anularse en $x = 6$. Evaluamos allí

$$q(6) = 800 - 100 \times 6 - |400 - 100 \times 6| = 200 - |-200| = 200 - 200 = 0.$$

Dada la forma que tiene q, la coincidencia de estos tres valores nos permite estar seguros de que hemos calculado correctamente las fórmulas para q en (2.17). ♠

Con esta información, procedemos a graficar q.



Sabemos que para $1 \leq x < 2$ se satisface

$$V(x) = \int_0^x q(t)dt.$$

Para $x = 1$ la integral es igual al área de un rectángulo de base 1 y altura 400, de modo que

$$V(1) = -Q(1) = -400\,\text{daN}.$$

Para $x = 2$, 3 y 4 la situación es análoga, y los valores del cortante son, expresados en daN,

$$V(2) = -2 \times 400 = -800, \quad V(3) = -3 \times 400 = -1200, \quad V(4) = -4 \times 400 = -1600. \tag{2.18}$$

Para $x = 5$ hay que sumar a los 1600 daN acumulados entre 0 y 4 el efecto de la carga en el tramo de viga entre $x = 4$ y $x = 5$. Esto es

$$Q(5) = 1600\,\text{daN} + \int_4^5 q(s)ds = 1600\,\text{daN} + (5-4)\,\text{m} \times \frac{400+200}{2}\,\text{daN/m} = 1900\,\text{daN}. \tag{2.19}$$

Concluimos que

$$V(5) = -1900\,\text{daN}$$

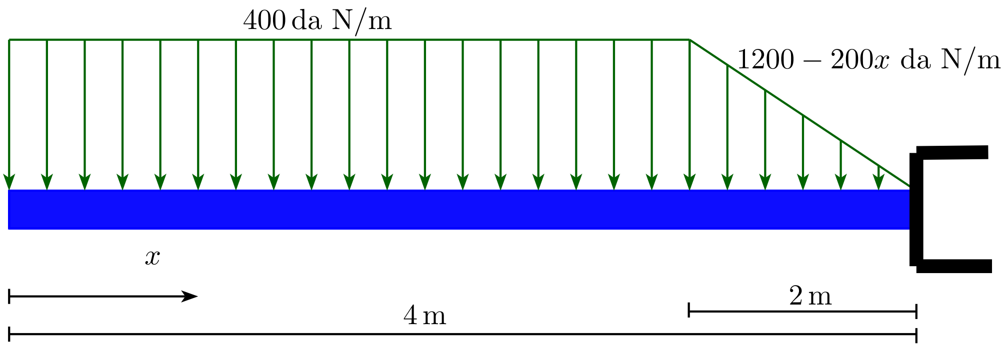
La reacción vertical en el empotramiento debe compensar todo el efecto de la distribución de carga, por lo que tenemos

$$R_V = \int_0^6 q(s)ds.$$

Recordemos que en este caso no aparece el signo de menos que afecta a los cortantes, porque la reacción es la fuerza que el empotramiento (a la derecha de la viga) ejerce sobre la viga que está a su izquierda. El cortante $V(x)$ es la fuerza vertical que la parte de la viga a la izquierda de x ejerce sobre la parte a la derecha, que es exactamente la opuesta de la reacción de la derecha sobre la izquierda, de ahí el cambio de signo.

La estrategia de cálculo para evaluar R_V es similar a la que empleamos a la hora de calcular $V(5)$ y consiste en descomponer la integral en dos tramos:

$$R_V = \int_0^4 q(s)ds + \int_4^6 q(s)ds = 4\,\text{m} \times 400\,\text{daN/m} + \frac{(6-4)\,\text{m} \times 400\,\text{daN/m}}{2} = 2000\,\text{daN}.$$



Podemos pasar ahora al cálculo del cortante $V(x)$ con x variable.

Para $x \leq 4$ es una generalización inmediata de los casos particulares que aparecen en la fórmula (2.18): la integral que hay que calcular para evaluar $Q(x)$ corresponde al área de un rectángulo de base x y altura 400, expresado en daN. Por lo tanto,

$$V(x) = -Q(x) = -400x, \quad x \leq 4.$$

Para $x \geq 4$ volvemos a utilizar la estrategia de escribir la integral como la suma de la integral hasta 4, más la integral entre 4 y x. Para esta segunda integral, es necesario usar que la altura del trapecio que está sobre x vale

$$q(x) = 1200 - 200x, \quad x \in [4, 6].$$

y generalizar adecuadamente la fórmula (2.19). El resultado en daN es

$$Q(x) = 1600 + (x - 4) \times \frac{400 + 1200 - 200x}{2}, \quad x \leq 4.$$

Luego de operar, y tener en cuenta que $V(x)$ es el opuesto de $Q(x)$, concluimos

$$V(x) = 100x^2 - 1200x + 1600, \quad 4 \leq x \leq 6. \tag{2.20}$$

Observación 20 Tenemos información para verificar la fórmula (2.20), porque ya hemos calculado los cortantes en 4 y 5 y la reacción en el empotramiento. La fórmula predice el valor

$$V(4) = 100 \times 4^2 - 1200 \times 4 + 1600 = -1600\text{daN},$$

que es correcto.

Ejercicio 2.2.9 Completar la verificación cuando $x = 5$ y $x = 6$. ♠

En conclusión

$$V(x) = \begin{cases} -400x, & x \leq 4, \\ 100x^2 - 1200x + 1600, & x \geq 4, \end{cases}$$

donde V está expresado en daN. La Figura 2.62 muestra el gráfico de $V(x)$.

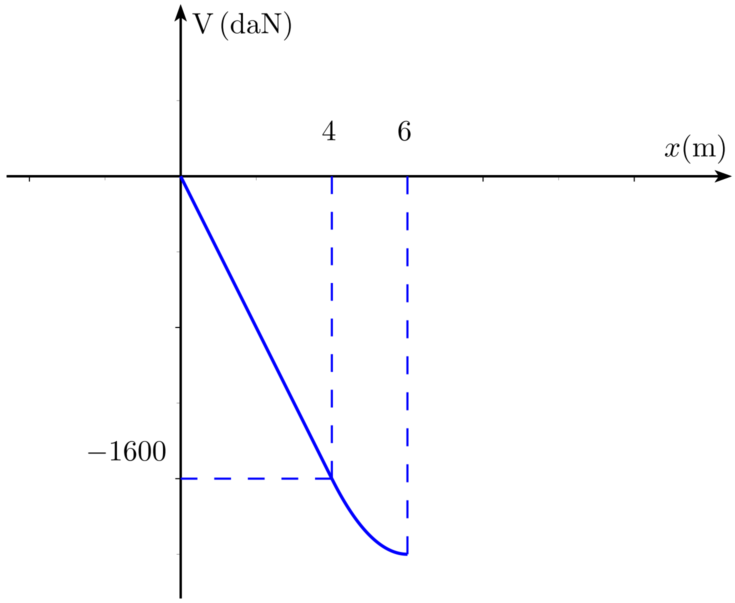


Figura 2.62.

Tal como es de prever, el punto más exigido de la estructura es el que está en el empotramiento. Observemos además que en $x = 4$ la curva es suave: no aparece en el gráfico una discontinuidad ni un punto anguloso. ♣

Ejercicio 2.2.10 La viga de la figura está empotrada en su extremos de la derecha y soporta una carga distribuida triangular, como se muestra en la Figura2.63. Hallar el valor del cortante en el punto de la viga que está a 1,80 metros de su extremo izquierdo.

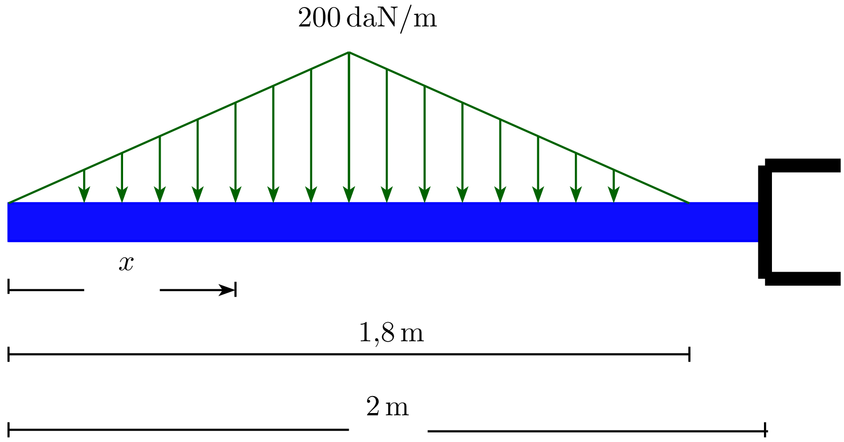


Figura 2.63.

A. 0 daN

B. -180 daN

C. -200 daN

D. -324 daN

Ejercicio 2.2.11 Crear un ejercicio en el que solicite el cálculo y gráfico de cortantes para una viga empotrada en su extremo derecho que esté sometida en distintos tramos a cargas distribuidas lineales a trozos. Intercambiar el ejercicio creado con el de otro compañeros, resolverlos y comentar los resultados.

2.2.3. Cargas distribuidas y cargas puntuales

En nuestro primer ejemplo de cálculo de cortantes (ver el ejemplo 23, en la página 78 de la sección 2.1) estudiamos el cortante de una viga sometida a una carga puntual. En nuestro segundo ejemplo (ejemplo 22, página 75) la viga soportaba dos cargas puntuales, pero en lo conceptual no se modificaba la definición ni el momento del cortante: también podemos hallarlo como la resultante de las cargas aplicadas sobre la pieza a la izquierda del a sección. El mismo sentido tiene la fórmula

$$V(x) = -\int_0^x q(s)ds.$$

La integral acumula el efecto de toda la carga en el intervalo $[0, x]$.

Cuando la carga sobre la pieza se modela como una superposición de cargas puntuales y distribuidas, el cortante en una sección x también se calcula como la resultante de todas las fuerzas aplicadas a la izquierda de x. Simplemente hay que sumar todas las cargas puntuales, integrar las distribuidas y luego sumar ambas cosas.

Ejemplo 31 Una situación bastante típica es la de una viga apoyada en sus extremos que soporta una carga distribuida constante. En la Figura 2.64 presentamos esta situación para una viga de 3 metros que soporta una carga

$$q(x) = 500\,\mathrm{daN/m}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

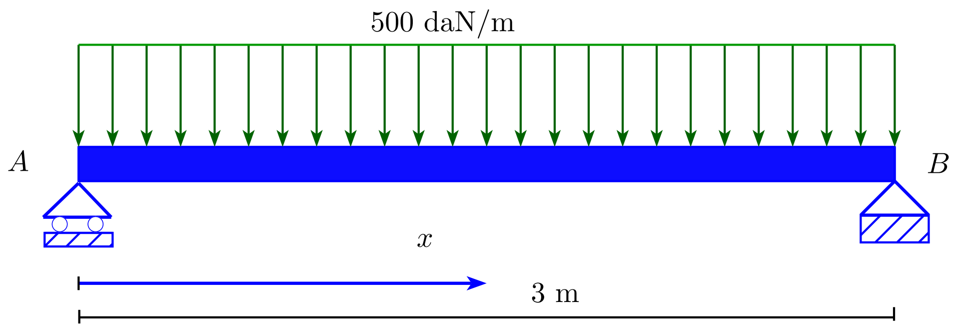


Figura 2.64

La carga total es de

$$1500\,\mathrm{daN} = 500\,\mathrm{daN/m} \times 3\,\mathrm{m}.$$

La simetría de la situación implica que en cada apoyo habrá una reacción vertical de 750 daN. Si el argumento de simetría no resulta convincente para el lector, puede hacer el experimento cargando una viga o adelantarse unas páginas hasta la sección 2.4.1, en la que se explica como modelar el cálculo de reacciones en vigas apoyadas.

Abstrayendo los apoyos y sustituyéndolos por las fuerzas puntuales con las que estamos modelando su acción sobre la viga, el esquema de fuerzas al que está sometida la pieza se muestra en la Figura 2.65

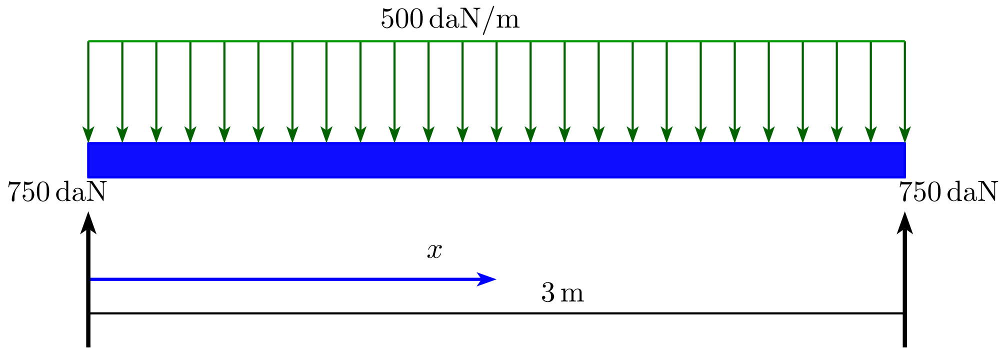


Figura 2.65

El cortante $V(x)$ se calcula para cada $0 < x < 3$ como la resultante de las cargas aplicadas a la izquierda de x. Por lo tanto

$$V(x) = 750 - 500x\,\text{daN}.$$

Ejercicio 2.2.12 Generalizar el resultado de este ejemplo para una viga de longitud cualquiera l cargada con una densidad de carga constante q. Determinar en qué punto de la viga se anula el cortante. ♣

Ejercicio 2.2.13

1. Calcular el cortante y dibujar el diagrama de cortantes para una viga de longitud cualquiera l cargada en su punto medio con una fuerza puntual de módulo Q.

2. Repetir el cálculo para la misma viga, cuando además de la fuerza puntual de módulo Q soporta una carga distribuida constante q.

Ejercicio 2.2.14 La pieza de la figura 2.66 tiene una longitud de 2 m, está en equilibrio bajo la acción de una carga distribuida constante de 100 daN/m y las dos fuerzas de 1000 daN que actúan a 0,5 m de cada uno de sus extremos.

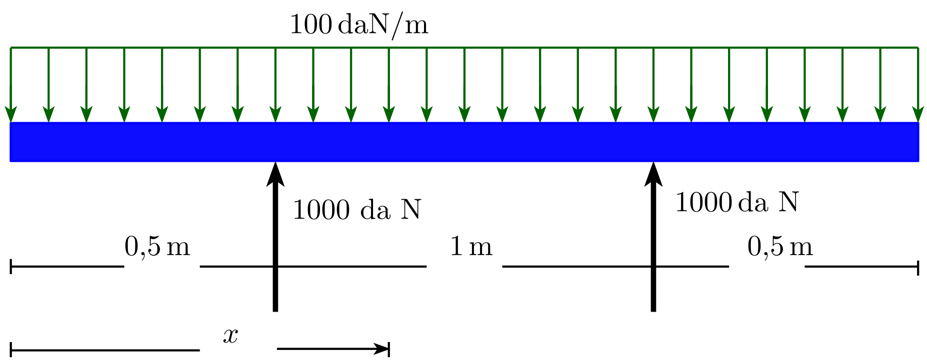


Figura 2.66.

Dibujar los diagramas de cortantes.

Ejercicio 2.2.15 Considerar una viga de dos metros de longitud empotrada en su extremo derecho y sometida a una carga vertical distribuida

$$q(x) = 200(200 - x)\,\mathrm{daN/m}.$$

y a una carga puntual Q de $300\,\mathrm{daN}$ en su punto medio. Calcular la reacción vertical R_V en el empotramiento y el cortante $V(x)$ para $0 \leq x < 1$ y para $1 < x < 2$.

2.3. Momentos flectores: expresión integral

En esta sección vamos a analizar cómo calcular el momento flector en cada punto de una barra sometida a cargas distribuidas, o a una combinación de cargas puntuales y cargas distribuidas. Es una cuestión importante para el diseño de estructuras, porque una evaluación adecuada de los esfuerzos debidos a los momentos flectores suele ser crítica para dimensionar adecuadamente cada una de sus piezas. También es útil presentarla en un curso de matemática, porque al abordar este tipo de problemas se ponen en juego conceptos importantes del cálculo.

2.3.1. La analogía entre sumas e integrales

Para encontrar la fórmula adecuada para calcular los momentos en presencia de cargas distribuidas, vamos a revisitar el ejemplo 22, en la página 75 de la sección 2.1.1, y compararlo con la situación en que la misma viga debe soportar la misma carga, pero uniformemente distribuida.

Ejemplo 32 En el ejemplo 22 estudiábamos una viga de dos metros que sostenía dos cargas puntuales, como se muestra en la Figura 2.67

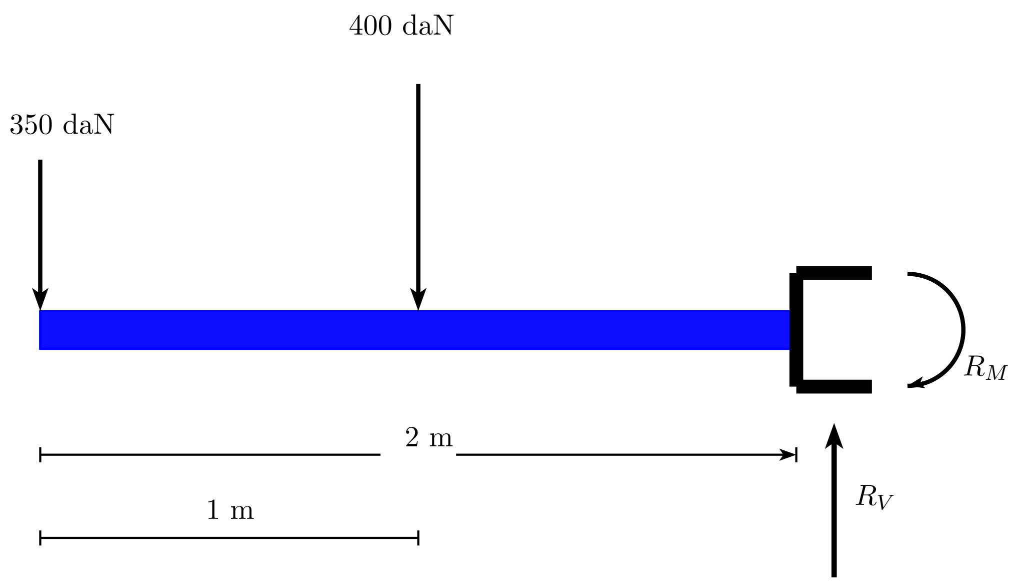


Figura 2.67.

En esa situación, podíamos calcular la reacción vertical en el empotramiento hallando la resultante R de las fuerzas verticales que actúan sobre la vida. Este cálculo se reduce a la suma

$$R = -350\,\text{daN} - 400\,\text{daN} = -750\,\text{daN}. \tag{2.21}$$

La condición de equilibrio implica que la suma de la reacción y la resultante vertical debe ser nula. Por lo tanto

$$R_V = 750\,\text{daN}.$$

El cálculo del momento que ejerce el empotramiento sobre la barra es conceptualmente similar. El momento total que ejercen las fuerzas sobre el punto del empotramiento, en el que la coordenada x es igual a 2, es

$$M = -350\,\text{daN} \times 2\,\text{m} - 400\,\text{daN} \times 1\,\text{m}. \tag{2.22}$$

Por lo tanto el momento con el que reacciona el empotramiento es

$$R_M = 1100\,\text{daNm}.$$

Veamos ahora el caso de la viga bajo una carga distribuida, tal como se muestra en la Figura 2.68

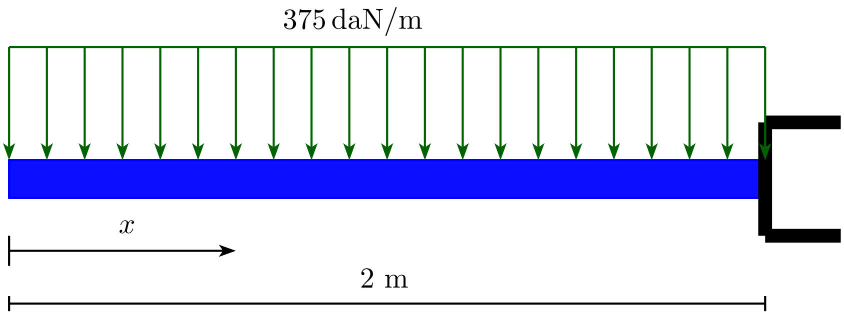


Figura 2.68.

En este caso la resultante de los esfuerzos verticales sobre la viga se puede calcular por medio de la integral

$$R = -\int_0^2 375dx, \tag{2.23}$$

que nos permite evaluar el efecto acumulado de la carga distribuida continua: la integración hace en este caso el papel de la suma.

Para calcular el momento respecto al punto del empotramiento la situación es análoga: en el caso continuo una integral sustituirá a la suma. La contribución al momento respecto al punto $x = 2$ de la carga ubicada en un punto x es proporcional al producto

$$-(2 - x) \times 375, \tag{2.24}$$

de la distancia del punto x al empotramiento, por la intensidad que tiene la distribución de carga en el punto x. El signo es negativo porque la carga tiene a producir un giro en sentido antihorario. El momento total se obtiene integrando (2.24) y asignando el signo correcto. Es

$$M = -\int_0^2 (2 - x) \times 375dx. \tag{2.25}$$

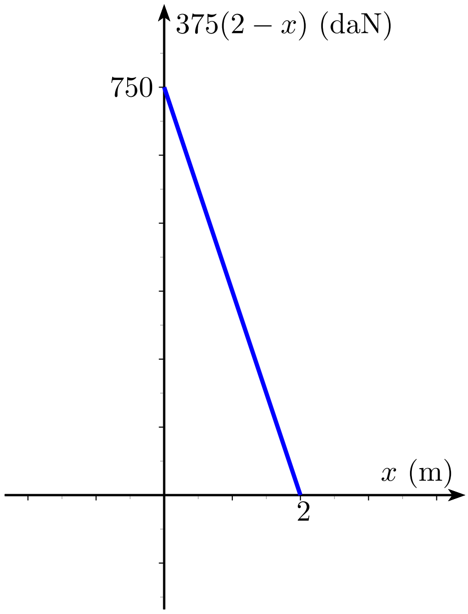


Figura 2.69.

En la Figura 2.69 hemos graficado el integrando de (2.25). De ella se deduce que la integral es el opuesto del área de un triángulo de base 2 y altura 750. Entonces

$$M = -\frac{750 \times 2}{2} = -750\,\mathrm{daNm}.$$

La reacción R_M del empotramiento debe compensar este momento. Por lo tanto

$$R_M = 750\mathrm{daNm} = \int_0^2 (2-x) \times 375 dx. \qquad (2.26)$$

Observemos que el momento total arroja un valor menor que el que corresponde a las dos fuerzas puntuales. Este efecto era previsible, ya que cuando pasamos de las cargas puntuales a las distribuidas "acercamos" la carga al empotramiento. El valor del momento de la carga distribuida es igual al que tendría una carga puntual de 750 daN, la resultante de toda la carga distribuida, ubicada en el punto medio de viga. Este punto medio es justamente el centro geométrico de la distribución, que para distribuciones uniformes coincide con el *baricentro* o *centro de masas* de la distribución. Notemos que, idealmente, una única fuerza vertical de 750 daN actuando en el punto medio de la viga, podría equilibrar toda la distribución de carga. ♣

La situación que presentamos en el ejemplo 32 se generaliza para una ménsula de longitud l sometida a una distribución de carga $q(x)$ cualquiera.

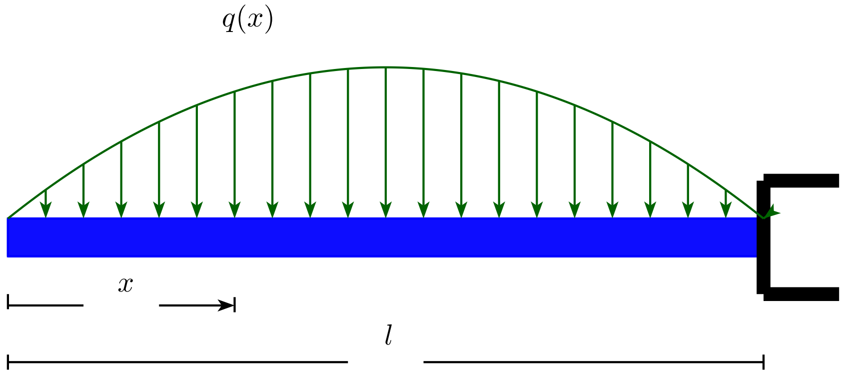


Figura 2.70.

El momento R_M que ejercen las reacciones en el apoyo debe ser

$$R_M = \int_0^l (l - x) \times q(x)\, dx. \tag{2.27}$$

La integral es el opuesto del momento respecto al punto $x = l$ de toda la distribución de carga q.

La analogía entre sumas e integrales también puede emplearse para calcular el momento flector $M(x)$ en cada punto de la viga. Antes de pasar al caso continuo, recordemos la expresión de los momentos flectores $M(x)$ para la viga con dos cargas puntuales que aparece en la Figura 2.67 y que fue analizada en el ejemplo 26, página 82 de la sección 2.1.3.

$$M(x) = \begin{cases} -350(x - 0), & 0 \leq x \leq 1, \\ -350(x - 0) - 400(x - 1), & 1 \leq x < 2. \end{cases} \tag{2.28}$$

La longitud está expresada en m y los momentos en daN/m. La forma en que está escrita (2.28) destaca la contribución de cada fuerza puntual al total del momento flector $M(x)$. Es útil a los efectos de comprender la estructura conceptual del cálculo y volveremos sobre ella más adelante. Si se desean expresiones fáciles de manejar, tan concisas como sea posible, un poco de aritmética básica las transforma en

$$M(x) = \begin{cases} -350x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -750x + 400, & 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

que es como están presentadas en la página 82, fórmula 2.11, sobre el cierre del ejemplo 26.

Ejemplo 33 Calcularemos ahora los momentos flectores $M(x)$ para la viga de la Figura 2.68. Para empezar vamos a elegir un punto de la viga, por ejemplo el que corresponde a $x = 1{,}5$ para calcular allí el momento flector.

Ya habíamos visto que el momento flector en 1,5 es exactamente igual al momento respecto a 1,5 de todas las cargas aplicadas a la izquierda de 1,5. Por lo tanto

$$M(1{,}5) = -\int_0^{1{,}5} 375(1{,}5 - x) dx. \tag{2.29}$$

El gráfico del integrando en (2.29) aparece en la Figura 2.71.

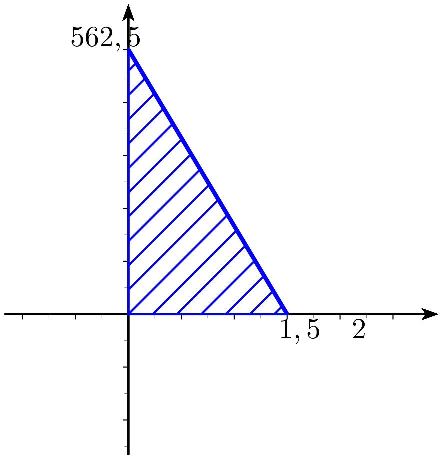


Figura 2.71

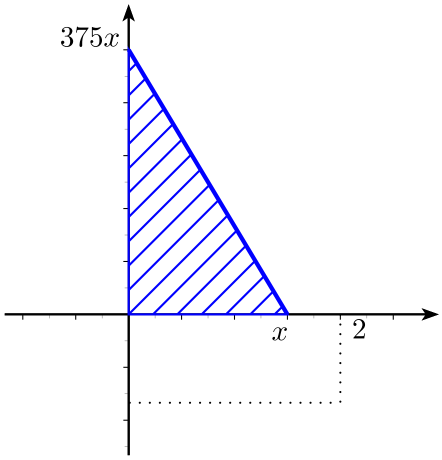


Figura 2.72

Evaluando el área encerrada bajo el gráfico y asignando luego el signo de menos que corresponde al sentido antihorario del momento que ejercen estas fuerzas, encontramos

$$M(1{,}5) = -\frac{1{,}5 \times 562{,}5}{2} = -421{,}875\,\mathrm{daNm}.$$

El cálculo del momento flector en 1,5 no tiene nada de especial. La generalización a un punto x cualquiera sobre la viga es

$$M(x) = -\int_0^x 375(x-s)ds, \quad 0 \le x < 2. \tag{2.30}$$

El cambio de nombre en la variable dentro de la integral se debe a la decisión de usar x para designar al punto en el que estamos calculando el momento flector. El gráfico del integrando en (2.30) aparece en la Figura 2.72.

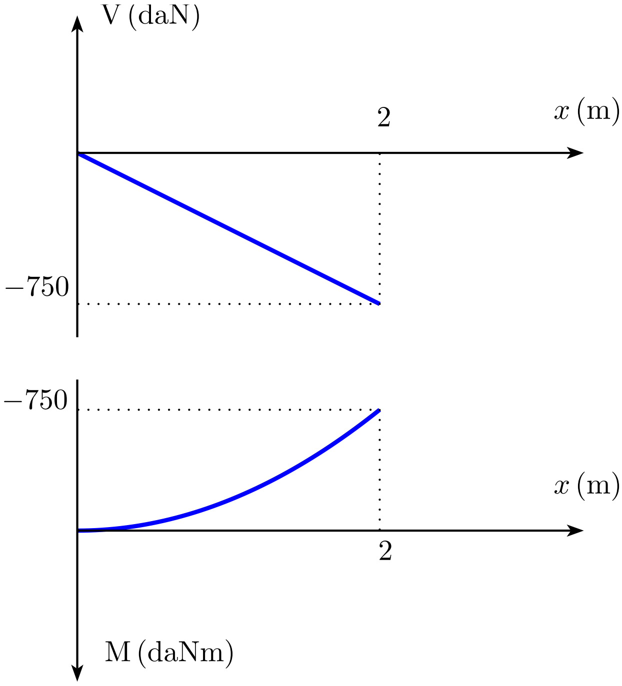


Figura 2.73.

El momento $M(x)$ es entonces

$$M(x) = -\frac{375x \times x}{2} = -187{,}5x^2, \quad 0 \leq x < 2. \tag{2.31}$$

En la Figura 2.73 aparecen los diagramas de cortantes y momentos para la viga que estamos considerando.

Hemos mantenido la convención habitual en los cursos de Estabilidad, de dibujar el eje de momentos con el sentido negativo del eje hacia arriba. De este modo el gráfico queda dibujado del lado de la barra en que el material está sufriendo tracciones.

Ejercicio 2.3.1 Verificar que la fórmula (2.31) es consistente con el valor que habíamos encontrado antes para el momento flector en $x = 1{,}5$.

♣

El cálculo del momento flector en presencia de cargas distribuidas cualesquiera generaliza lo que hemos hecho en este ejemplo, de una manera análoga a la que la fórmula (2.27) generaliza el cálculo de la reacción (2.26). El momento flector para un punto x genérico de una ménsula de longitud l sometida a una carga distribuida q es

$$M(x) = -\int_0^x (x-s)q(s)ds, \quad 0 \leq x < l. \tag{2.32}$$

Esta fórmula también puede verse como una versión continua de las fórmulas para cargas puntuales, como es la fórmula (2.28). La estructura básica del cálculo es la misma, pero la integral sustituye a las sumas.

Ejemplo 34 Analizaremos la reacción en el empotramiento y el momento flector que una carga distribuida produce sobre una barra de dos metros de longitud. Consideraremos una carga distribuida uniforme de 50 daN/m.

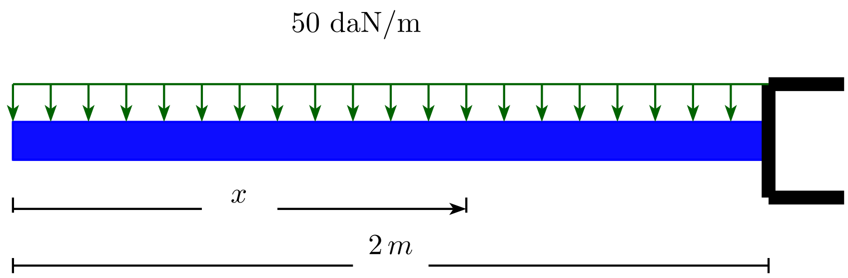


Figura 2.74.

El valor del momento de toda la carga respecto al punto $x = 2$ es

$$-\int_0^2 50(2-s)ds = -\int_0^2 (100-50s)ds.$$

El gráfico de $100 - 50s$ entres $s = 0$ y $s = 2$ delimita sobre el eje horizontal un triángulo de altura 100 y base 2, de modo que su área es 100. El resultado es $-100\,$daNm. El momento R_M de las reacciones en el empotramiento debe compensar este momento, por lo que

$$R_M = 100\,\text{daNm}.$$

El momento flector para una sección cualquiera x es

$$M(x) = -\int_0^x 50(x-s)ds = -\int_0^x (50x - 50s)ds.$$

En la Figura 2.75, representamos el gráfico de $50x - 50s$ entre $s = 0$ y $s = x$. Delimita sobre el eje horizontal un triángulo de altura $50x$ y base x, cuya área es $25x^2$.

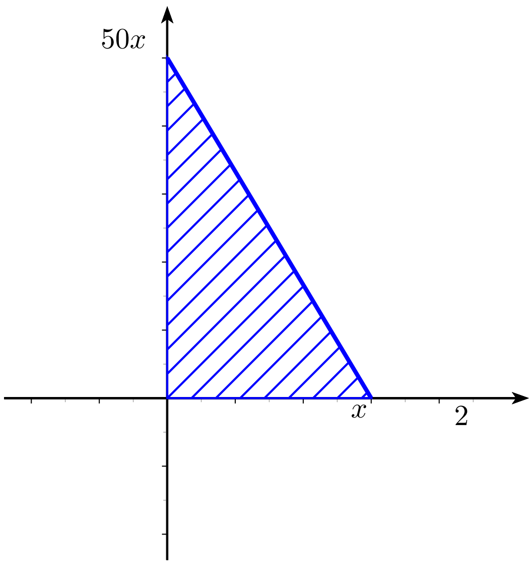


Figura 2.75

El resultado para el momento flector es entonces

$$M(x) = -25x^2\,\text{daN m}. \tag{2.33}$$

Observemos que cuando x se aproxima a 2 m el momento $M(x)$ aproxima a $-100\,$daNm, lo que es consistente con el cálculo que habíamos hecho para determinar el momento de las reacciones en el anclaje. ♣

Ejercicio 2.3.2 Calcular los momentos flectores $M(x)$ y dibujar los diagramas de momentos para las vigas de los ejercicios 2.2.4 , 2.2.5 y 2.2.6 de la sección 2.2.1.

Ejercicio 2.3.3 Consideremos una barra de 4 m de longitud empotrada en su extremo derecho, sometida en su primer metro a una carga distribuida constante de 100 daN/m, entre el primer metro y su extremo derecho a una carga distribuida constante de 300 daN/m y a una carga puntual de 500 daN en su punto medio, como se muestra en la Figura 2.76

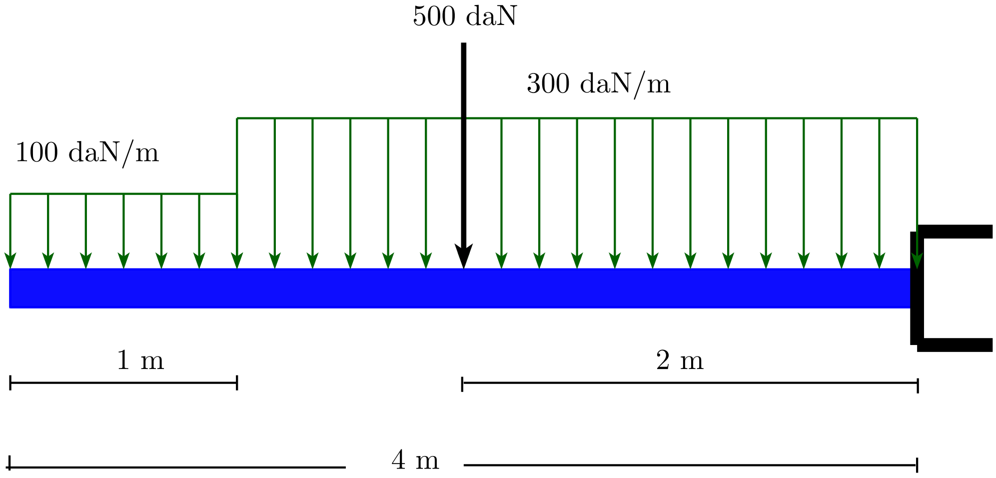


Figura 2.76

Calcular las reacciones en el empotramiento, los cortantes $V(x)$ y los momentos flectores $M(x)$ y dibujar los diagramas de cortantes y momentos.

Ejercicio 2.3.4 Plantear las integrales necesarias para calcular el momento en el empotramiento y los momentos flectores para la viga del Ejemplo 29 de la página 92. Comparando esta integral con los demás ejemplos de esta sección, ¿qué nueva dificultad aparece a la hora de calcularla?

2.4. Momentos flectores: reacciones en vigas apoyadas y baricentros

En esta sección vamos a trabajar con el cálculo de momentos en dos direcciones diferentes. La primera, que desarrollaremos en la sección 2.4.1, tiene que ver con el cálculo de las reacciones en vigas apoyadas. La segunda, con la introducción del concepto de *baricentro* o *centro de masa*, que a su vez nos permitirá cierta simplificación del cálculo de momentos en presencia de cargas distribuidas constantes.

2.4.1. Vigas apoyadas, cargas distribuidas y puntuales

Hasta ahora hemos considerado fundamentalmente ménsulas empotradas en su extremo derecho, situación que de algún modo simplifica el cálculo de cortantes y momentos porque las reacciones del anclaje están a la derecha de todas las secciones y no afectan el cálculo. En esta sección vamos considerar vigas apoyadas, en los que al menos una de las reacciones sí interviene en el cálculo. Esto nos hará resolver dos tipos de tareas nuevas: calcular todas las reacciones antes de pasar a hacer los diagramas de cortantes y momentos y sistemáticamente manejar situaciones en las que se combinan cargas puntuales con cargas distribuidas.

Ejemplo 35 La situación más sencilla que podemos imaginar para una viga apoyada que está sometida a algún tipo de carga es la de una viga que soporta una carga puntual en su punto medio, o una carga distribuida uniforme en toda su longitud, como en las Figuras 2.77 y 2.78.

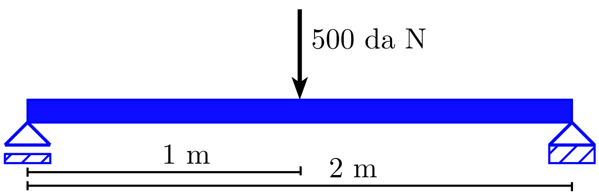


Figura 2.77

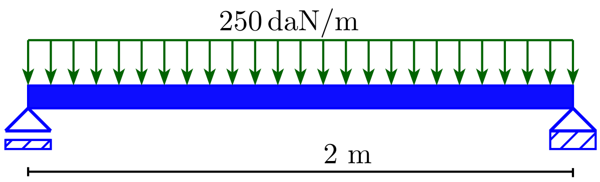


Figura 2.78

En este caso, la simetría de la situación implica que la viga quedará equilibrada si en cada apoyo aparece una reacción vertical de 250 daN.

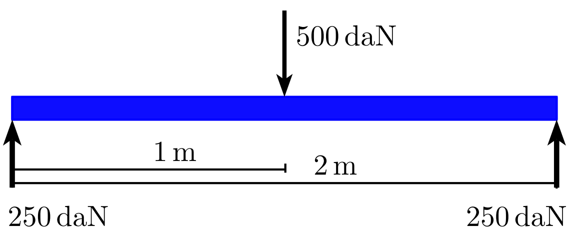


Figura 2.79

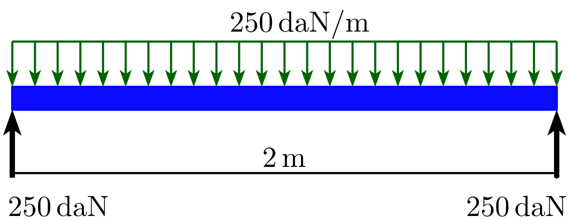


Figura 2.80

En las figuras 2.79 y 2.80 aparece la misma viga, pero hemos sustituido los apoyos por sus reacciones, para poner en evidencia el sistema de fuerzas bajo el que la viga está equilibrada.

Una vez que conocemos todas las fuerzas aplicadas, podemos calcular los cortantes y momentos, y representar los correspondientes diagramas. Lo hacemos para el caso de la viga con la carga puntual.

$$V(x) = \begin{cases} 250\,\text{daN}, & 0 < x < 1, \\ -250\,\text{daN}, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Para cualquier valor de x entre 0 y 1 la única fuerza aplicada a la izquierda de la sección en x es la reacción en el apoyo de la izquierda, que tiene respecto a la sección en x un momento de $250x$ daNm.

Cuando x está entre 1 y 2 deja a su izquierda tanto la reacción en el apoyo como la carga aplicada en el punto medio. El momento de este sistema de fuerzas respecto a x es

$$250x - 500(x-1) = -250x + 500\,\text{daNm}.$$

En resumen, el momento flector $M(x)$ en cada punto de la viga es

$$M(x) = \begin{cases} 250x, & 0 < x < 1, \\ -250x + 500, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

Los diagramas de cortantes y momentos para esta viga aparecen en la Figura 2.81.

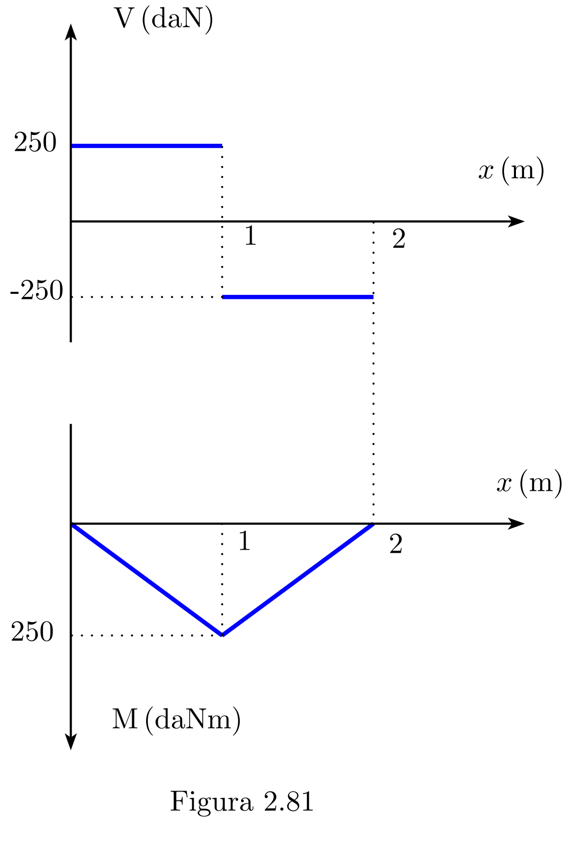


Figura 2.81

Observación 21 Más posibilidades de verificación. Observemos que el valor con el que el cortante $V(x)$ llega a $x = 2$ es justamente el contrario al de la reacción en el apoyo. También para el momento $M(x)$ observamos algo similar: el momento flector aproxima a 0 daNm a medida que x aproxima a 2 m. La razón es que el apoyo es un tipo de vínculo que cuya reacción tiene momento nulo respecto al punto de apoyo. Por lo tanto, para que la viga esté equilibrada es necesario que el momento flector en la sección sobre el apoyo sea nulo. Esta relación se traduce también en los gráficos: si se siguen los gráficos y los valores de las reacciones, en $x = 2$ el dibujo debe terminar sobre el eje. En el caso del momento $M(x)$ esto es ya evidente en el gráfico del momento; para el cortante, en $x = 2$, tenemos que “subir” desde el gráfico del cortante 250 daN con la reacción en el apoyo. ♠

Ejercicio 2.4.1 Calcular los cortantes y momentos flectores y dibujar los diagramas de cortantes y momentos para el caso de la viga de 2 m apoyada en sus extremos, con la carga total de 500 daN uniformemente distribuida a lo largo de toda su longitud. ♣

Ejemplo 36 Cuando la carga sobre la viga no es simétrica, entonces descarga de manera diferente sobre los apoyos. En este ejemplo analizaremos la misma viga de 2 m del ejemplo 35, pero con la carga ubicada a 50 cm del apoyo izquierdo, como se muestra en la Figura 2.82.

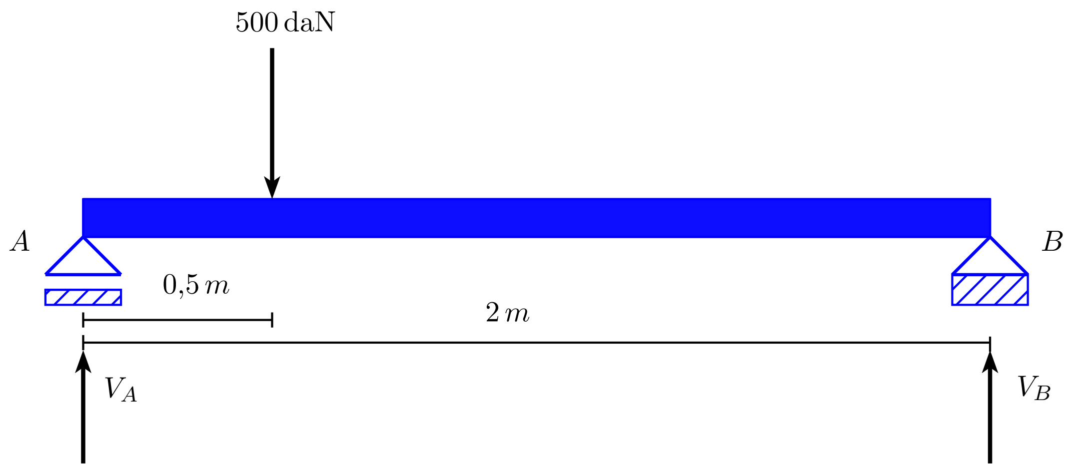


Figura 2.82

Los apoyos reaccionarán con fuerzas verticales V_A y V_B, de las que esperamos que V_A tenga un módulo mayor. El valor preciso de V_A y V_B puede calcularse a partir de la condición de equilibrio global de la viga, aplicada al momento de todo el sistema de fuerzas que actúa sobre ella: la suma de los momentos respecto a cualquier punto de todas las fuerzas aplicadas sobre la viga tiene que ser nula.

Planteamos el equilibrio de momentos respecto al punto A:

$$0 \times V_A + 0{,}5 \times 500 - 2 \times V_B = 0.$$

De allí despejamos

$$V_B = 125\,\text{daN}.$$

La ecuación de equilibrio de momentos respecto a B es

$$2 \times V_A - 1{,}5 \times 500 + 0 \times V_B = 0.$$

Esta igualdad nos permite determinar

$$V_A = 375\,\text{daN}.$$

Todavía podemos verificar que estos valores de V_A y V_B aseguran el equilibrio de fuerzas en la dirección vertical. Debe verificarse

$$V_A + V_B = 500\,\mathrm{daN}, \tag{2.34}$$

que es la condición para que las reacciones equilibren a las cargas. Obviamente, los valores que hemos calculado satisfacen (2.34).

Ejercicio 2.4.2 Calcular los cortantes y momentos flectores y dibujar los diagramas de cortantes y momentos para la viga de este ejemplo. ♣

Ejemplo 37 Vamos a calcular los diagramas de cortantes y momentos para la viga de la Figura 2.83.

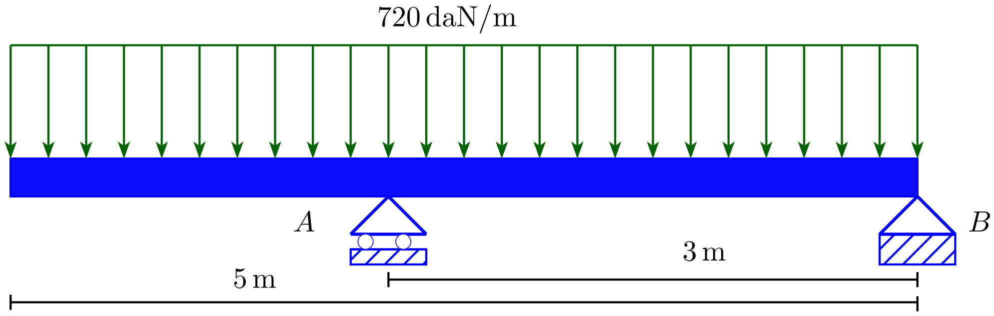


Figura 2.83.

Los anclajes pueden equilibrar las cargas con dos fuerzas verticales V_A y V_B. La carga total que soporta la viga es igual a

$$720\,\mathrm{daN/m} \times 5\,\mathrm{m} = 3600\,\mathrm{daN}.$$

La condición de equilibrio requiere que la resultante de fuerzas en la dirección vertical sea nula. Por lo tanto

$$V_A + V_B = 3600. \tag{2.35}$$

Esta única ecuación no basta para determinar las reacciones. Además de tener una resultante nula, el conjunto de todas las fuerzas aplicadas debe tener un momento nulo respecto a cualquier punto del espacio. Si no fuera así, harían girar la barra. Esta nueva condición permite calcular completamente las reacciones. La mejor forma de usarla es plantear el equilibrio de momentos respecto a los puntos A y B en que están los anclajes. Lo mostramos a continuación.

Para medir longitudes usaremos una coordenada x con origen en el extremo izquierdo de la viga. El momento total de la distribución de carga respecto al punto A es

$$M_A = \int_0^5 -720(2-x)dx = 1800\,\mathrm{daNm}.$$

El momento de la reacción V_A es nulo, porque pasa por el punto A. El momento de la reacción desconocida V_B en B es $-3V_B$. Por lo tanto

$$-3V_B + 1800 = 0,$$

de donde despejamos

$$V_B = 600\,\mathrm{daN}.$$

Los cálculos respecto al punto B arrojan un momento

$$M_B = \int_0^5 -720(5-x)dx = -9000\,\mathrm{daNm},$$

respecto al punto B para toda la carga distribuida. El momento de la reacción en A es $3V_A$. La condición de equilibrio implica

$$3V_A - 9000 = 0,$$

por lo que

$$V_A = 3000\,\mathrm{daN}.$$

Luego de calcular directamente las dos reacciones a partir de la condición de equilibrio de momentos respecto a los dos apoyos, todavía podemos verificar que la suma

$$V_A + V_B = 600 + 3000 = 3600\,\mathrm{daN}$$

efectivamente satisface la ecuación (2.35)

Observación 22 Tal como habíamos adelantado al resolver el ejemplo 36, recomendamos calcular reacciones en los apoyos siguiendo el procedimiento que acabamos de emplear y dejando para verificación la condición de que la resultante de las fuerzas verticales debe ser cero. Con este procedimiento cada reacción puede calcularse directamente a partir de los datos y además tenemos una ecuación sencilla para verificar los resultados. ♣

Observación 23 Los momentos de toda la distribución de fuerzas respecto a los anclajes son iguales a los de una única carga puntual de 3600 daN ubicada en el punto $x = 2,5$, que es el punto medio de la distribución de carga.

Ejercicio 2.4.3 Verificar que esta afirmación es cierta. ♠

Ahora que conocemos todas las cargas aplicadas sobre la viga, sabemos que la pieza está en equilibrio bajo la acción del sistema de fuerzas que aparece en la Figura 2.84

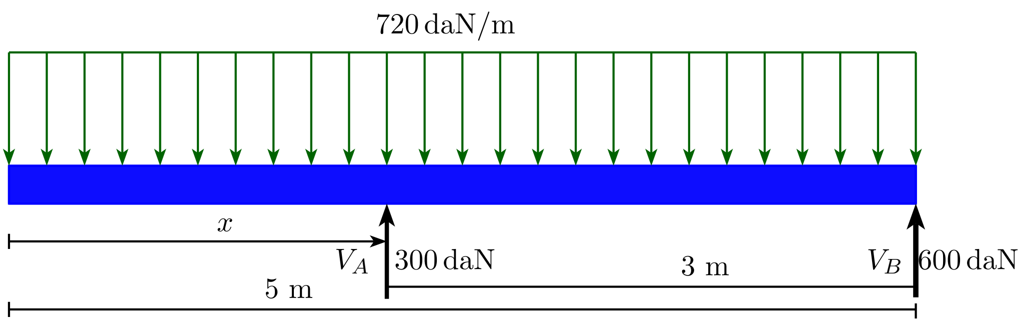


Figura 2.84

A la viga no le importa demasiado si las cargas que recibe se deben a lo que pusimos sobre ella o a lo que el resto de la estructura tiene que hacer para aguantarla, de modo que a los efectos del cálculo de las solicitaciones tanto cargas como reacciones se tratan igual. El cortante $V(x)$ será entonces igual a la resultante de todas las fuerzas que aparecen a la izquierda de la sección

x, independientemente de que sean cargas o reacciones, y el momento $M(x)$ será el momento total respecto a x de todo ese mismo sistema de fuerzas.

Para calcular cortantes hay que calcular integrales de funciones constantes, y tener cuidado de sumar la reacción en el anclaje A ($x = 2$) cuando x es mayor que 2. El resultado es

$$V(x) = \begin{cases} -720x, & 0 \leq x < 2, \\ -720x + 3000, & 2 < x < 5. \end{cases}$$

Observemos que cuando x se aproxima a 5 el cortante se aproxima al valor $-600\,\mathrm{daN}$, que es justamente el esfuerzo que la reacción V_B está compensando.

Los momentos son un poco más laboriosos, al menos con el abordaje de cálculo por medio de integrales. Mientras $x \leq 2$ las únicas fuerzas a la izquierda de x que tienen momento no nulo respecto a la sección x provienen de la carga distribuida. Por lo tanto

$$M(x) = -\int_0^x 720(x-s)ds = -360x^2, \quad 0 \leq x < 2.$$

A la derecha de $x = 2$ ya hay que tomar en cuenta el momento adicional que aporta V_A, de modo que

$$M(x) = -\int_0^x 720(x-s)ds + 3000(x-2) = -360x^2 + 3000x - 6000. \quad 2 < x < 5.$$

Observemos que cuando x se aproxima a 5 el momento flector $M(x)$ se aproxima a 0, lo que es consistente con el hecho de que el apoyo en B no puede absorber ningún momento flector. ♣

Ejercicio 2.4.4 Calcular los cortantes y los momentos flectores para una viga de longitud l apoyada en sus extremos y sometida a una carga distribuida constante q en toda su longitud. Dibujar los diagramas de cortantes y momentos. Determinar, en función de l y q, el máximo momento flector en la viga y el punto en el que se alcanza este máximo.

Ejercicio 2.4.5

1. Calcular el momento flector y dibujar el diagrama de momentos para una viga de longitud cualquiera l cargada en su punto medio con una fuerza puntual de módulo Q.

2. Repetir el cálculo para la misma viga, cuando además de la fuerza puntual de módulo Q soporta una carga distribuida constante q.

Ejercicio 2.4.6 Calcular los cortantes y momentos flectores y dibujar los diagramas de cortantes y momentos para la viga de la Figura 2.85, de 4 metros de longitud, apoyada en sus extremos, que soporta en sus primeros dos metros una carga distribuida de 1000 daN/m y en sus segundos dos metros una carga distribuida de 2000 daN/m.

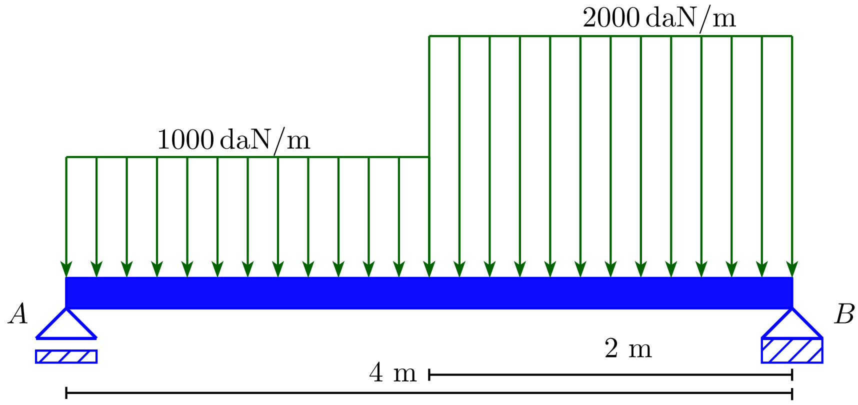


Figura 2.85

Ejercicio 2.4.7 Calcular los cortantes y momentos flectores y dibujar los diagramas de cortantes y momentos para la viga de la Figura 2.86, de 4 metros de longitud, apoyada en su extremo izquierdo A y en el punto B ubicado a 3 metros de A, cuando la viga soporta las mismas cargas que en el ejercicio 2.4.6.

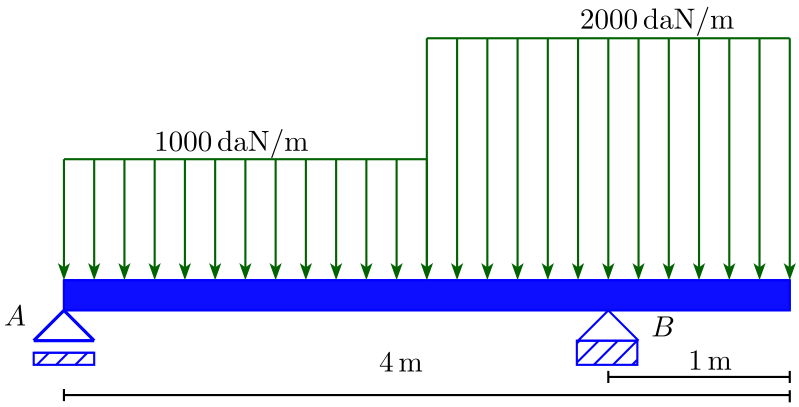


Figura 2.86

Ejercicio 2.4.8 Consideremos una barra de 4 m de longitud con un apoyo A a un metro de su extremo izquierdo y un apoyo B en su extremo derecho. En su primer metro, entre el extremo izquierdo y el apoyo A soporta una carga distribuida constante de 100 daN/m, entre los dos apoyos soporta una carga distribuida constante de 300 daN/m y en su punto medio recibe una carga puntual de 500 daN (es el mismo esquema de cargas del ejercicio 2.3.3, pero con diferentes apoyos) como se muestra en la figura 2.87.

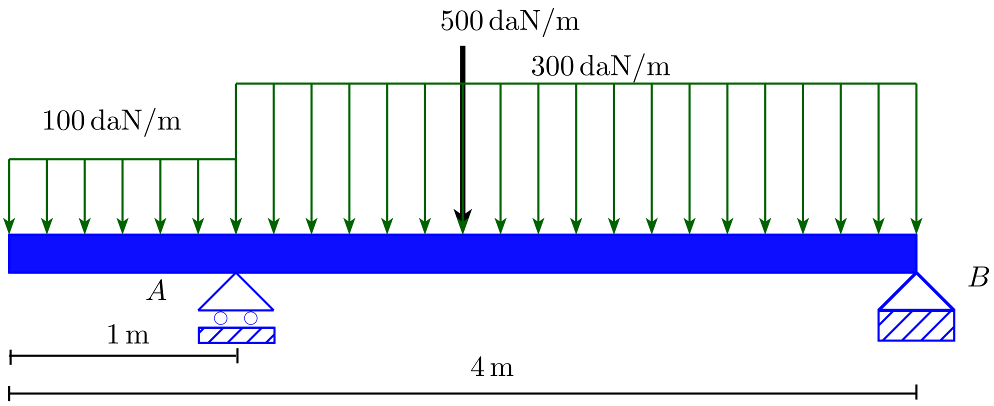


Figura 2.87

Calcular las reacciones en los apoyos, los cortantes $V(x)$ y los momentos flectores $M(x)$ y dibujar los diagramas de cortantes y momentos.

Ejercicio 2.4.9 Una viga de 2 metros de longitud soporta una carga distribuida constante de 1000 daN/m en toda su longitud. Está apoyada en dos puntos A y B simétricos respecto a su centro, a una distancia d del centro de la viga, tal como se muestra en la figura 2.88.

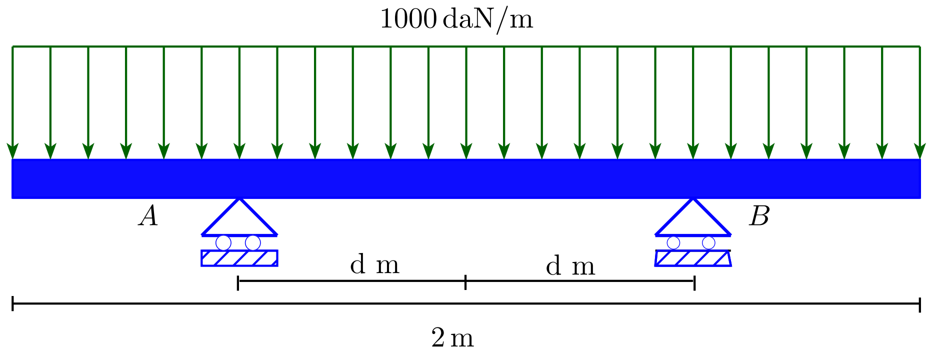


Figura 2.88

Determinar el valor de d que hace que el máximo módulo del momento flector en la viga sea tan bajo como sea posible.

2.4.2. Baricentro de una distribución de carga

En esta sección vamos a sistematizar un fenómeno que ya hemos observado: el momento respecto a un punto cualquiera de toda una distribución de carga constante sobre un cierto intervalo $[a, b]$ es igual al momento de la resultante de la distribución aplicada en su punto medio.

Consideremos entonces una distribución de carga constante q sobre un cierto intervalo $[a, b]$ y un punto cualquiera x_0, como se muestra en la Figura 2.89.

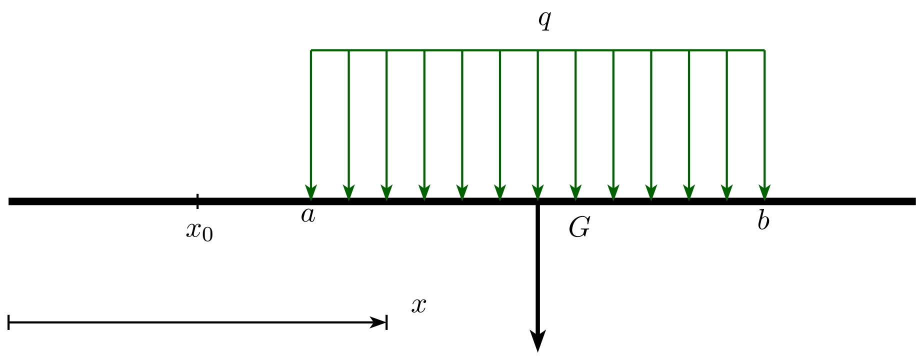


Figura 2.89

El momento de la distribución de carga respecto a x_0 es

$$M = \int_a^b (x - x_0) q \, dx = \frac{q(a - x_0 + b - x_0)}{2}(b - a) = q(b - a) \times \left(\frac{a + b}{2} - x_0 \right).$$

Tal como ha quedado ordenado, el último término de esta cadena de igualdades puede interpretarse como el momento de una única fuerza puntual, igual a la carga total $q(b - a)$ de la distribución de carga, aplicada en el punto medio $\dfrac{(a + b)}{2}$ del intervalo que soporta la carga.

Ejemplo 38 Volveremos sobre el caso que ya vimos en el ejemplo 35 en la página35 de una viga de dos metros de longitud, con una carga distribuida de 250 daN/m sobre toda su longitud. Toda esta carga es equivalente a una única carga puntual de 500 daN ubicada en el punto medio de la viga. El equilibrio de momentos respecto al apoyo A de la izquierda implica la igualdad

$$500\,\mathrm{daN} \times 1\,\mathrm{m} - V_B \times 2\,\mathrm{m} = 0,$$

que permite calcular

$$V_B = 250\,\mathrm{daN}.$$

Análogamente, el equilibrio respecto al apoyo B implica

$$-500\,\mathrm{daN} \times 1\,\mathrm{m} + V_A \times 2\,\mathrm{m} = 0,$$

que determina completamente el valor de V_A como

$$V_A = 250\,\mathrm{daN}.$$

Encontramos que el cálculo confirman los valores que esperábamos, dada la simetría de la situación.

A la izquierda de cada sección x encontramos la reacción en A y el tramo de carga distribuida entre 0 y x. El momento respecto a x de la reacción en A es

$$250 \times (x - 0) = 250x. \tag{2.36}$$

Para calcular el momento respecto a x de la carga distribuida aplicada entre 0 y x podemos sustituirlo por una única carga puntual de $250x$ daN ubicado en $x/2$, su punto medio. El momento respecto a x es

$$-250x \times \left(x - \frac{x}{2}\right) = -125x^2, \quad 0 \leq x \leq 2. \tag{2.37}$$

Sumando las contribuciones de (2.36) y (2.37) concluimos que

$$M(x) = 250x - 125x^2\,\mathrm{daNm}. \tag{2.38}$$

Invitamos al lector a comparar este resultado al que obtuvo cuando resolvió el ejercicio 2.4.1 y a observar que cuando (2.38) se evalúa en $x = 2$ se obtiene el valor 0, en completo acuerdo con la observación 21 y la naturaleza del anclaje en el extremo izquierdo de la viga: un apoyo que no puede generar ningún momento respecto al punto en que está ubicado.

Observación 24 Aunque podemos sustituir toda la distribución de carga por una única fuerza de 500 daN a los efectos de calcular las reacciones, el cortante y el momento flector que uno y otros sistema de fuerzas producen en la pieza son diferentes. En este sentido, la comparación entre los cortantes y momentos flectores para la misma viga de 2 m, cargada con 500 daN, en un caso concentrados en su punto medio y en el otro distribuidos uniformemente, es elocuente. Ver el ejemplo 35.

Si para calcular los diagramas de momentos, queremos usar el método de sustituir tramos de carga constante por su resultante ubicada en el punto medio. tenemos que ser más sutiles. Para cada punto x podemos sustituir por una única carga puntual el tramo de la distribución de carga cuyo momento interviene en el cálculo del momento flector en x, que es solo la parte que está a la izquierda de x, no toda la distribución de carga. ♠♣

Ejemplo 39 En este ejemplo usaremos la técnica de sustituir por su resultante tramos de carga distribuida constante, para la viga del ejemplo 37. La carga completa es equivalente a una única carga puntual de

$$3600\,\mathrm{daN} = 720\,\mathrm{daN/m} \times 5\,\mathrm{m},$$

ubicada en $x = 2{,}5$, el punto medio de la viga. El momento de esta fuerza respecto al anclaje en A es

$$3600\,\mathrm{daN} \times 0{,}5\,\mathrm{m} = 1800\,\mathrm{daNm}.$$

Solo la reacción vertical en B puede equilibrar este momento, de modo que

$$1800\,\mathrm{daNm} - 3\,\mathrm{m} \times V_B\,\mathrm{daN} = 0,$$

de donde despejamos

$$V_B = 600\,\mathrm{daN}.$$

Planteando el equilibrio de momentos respecto al anclaje en B para una carga puntual de $3600\,\mathrm{daN}$ en el punto medio de la viga y la reacción en A encontramos la ecuación

$$-3600\,\mathrm{daN} \times 2{,}5\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m} \times V_A\,\mathrm{daN} = 0,$$

que nos permite determinar

$$V_A = 3000\,\mathrm{daN}.$$

Cuando x está entre 0 y 2 los únicos esfuerzos sobre la barra a la izquierda de x provienen de la carga distribuida. Este tramo de longitud x es equivalente a una única carga puntual de $720x\,\mathrm{daN}$ ubicado en $x/2$, su punto medio. El momento respecto a x es

$$M(x) = -720x \times \left(x - \frac{x}{2}\right) = -360x^2, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Para x entre 2 y 3, además del tramo de carga distribuida entre 0 y x, las secciones tiene a su izquierda la reacción en el apoyo A, con su contribución de

$$3000\,\mathrm{daN} \times (x-2)\,\mathrm{m}.$$

Sumando esta última cantidad cuando corresponde hacerlo, y ordenando toda la información, concluimos

$$M(x) = \begin{cases} -360x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ -360x^2 + 3000x - 6000, & 2 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Naturalmente, estos resultados coinciden completamente con los que habíamos encontrado antes. ♣

Ejercicio 2.4.10 Usando la técnica de sustituir tramos de carga constante por su resultante ubicada en el baricentro, volver a calcular las reacciones y los momentos flectores $M(x)$ para las siguientes vigas:

1. la ménsula empotrada del ejemplo 28, página 86;
2. la barra empotrada del ejercicio 2.3.3, página 106;
3. la barra apoyada del ejercicio 2.4.8, página 114.

Baricentro de una distribución de carga cualquiera

Hemos visto que el momento de un tramo de carga distribuida constante respecto a cualquier punto del espacio es igual al de su resultante (la carga total del tramo) ubicada en el punto medio. El punto medio es justamente el *baricentro* o *centro de masa* o *centro de gravedad* de este sistema de cargas. Esta noción puede extenderse para una distribución cualquiera de carga $q(x)$, definida sobre cualquier intervalo $[a, b]$. La resultante de la distribución es

$$R = \int_a^b xq(x)\,dx.$$

Esta integral simplemente acumula toda la carga. Vamos a tratar de ubicar esta resultante R en un punto x_G tal que produzca respecto a cualquier punto del espacio el mismo momento que la carga total. Este punto x_G será justamente su baricentro. La G en el subíndice proviene de de la palabra *gravedad*, asociada al concepto de centro de gravedad.

El momento de toda la carga distribuida q respecto a un punto x_0 cualquiera es

$$Mq_{x_0} = \int_a^b (x - x_0)q(x)\,dx. \tag{2.39}$$

El momento de la resultante R ubicada en G, respecto al mismo punto x_0, es

$$MR_{x_0} = (x_G - x_0)R \tag{2.40}$$

Nuestro objetivo es determinar x_G para que la igualdad

$$MR_{x_0} = Mq_{x_0}$$

se satisfaga para cualquier elección de x_0. En particular, tiene que satisfacerse para $x_0 = 0$. Cuando usamos este valor de x_0 la ecuación que tenemos que resolver es

$$\int_a^b xq(x)dx = x_G R,$$

que expresa la igualdad de momentos respecto al origen del sistema de coordenadas que estamos usando. Recordando la expresión integral para R, despejamos

$$x_G = \frac{\int_a^b xq(x)\,dx}{\int_a^b q(x)\,dx}.$$

Este punto es el *baricentro* de la carga distribuida.

El baricentro es el punto de la distribución de carga respecto al que la distribución tiene momento nulo. Veremos que esta propiedad se deduce rápidamente de la definición de baricentro una vez que se manejan con cierta soltura las propiedades básicas del calculo integral. En el próximo ejercicio proponemos al lector verificarla para una carga distribuida constante.

Ejercicio 2.4.11 Para una carga distribuida q constante sobre un segmento $[a, b]$, mostrar que el momento total respecto a su baricentro es nulo.

Ejercicio 2.4.12 Ubicar el baricentro de una carga q distribuida sobre el intervalo $[0, 8]$, de la siguiente manera:

$$q(x) = \begin{cases} 100\,\mathrm{daN/m}, & 0 \le x < 4, \\ 300\,\mathrm{daN}, & 4 \le x \le 2, \end{cases}$$

Calcular el momento de toda la distribución de carga respecto a los puntos $x = 0$ y $x = 8$.