Cátedra de Matemática
Facultad de Arquitectura
Universidad de la República

Matemática

Versión: febrero de 2015

Índice general

Capítulo 1

Integrales: definición y primeros ejemplos

El propósito de este capítulo es introducir la noción de *integral* de una función real de variable real y la notación correspondiente. Nos concentraremos en dos aspectos de la integral:

- su significado geométrico como *área signada encerrada bajo el gráfico de una función*;
- sus aplicaciones en diferentes contextos, que tienen el siguiente rasgo en común: la integral es útil en la modelización de un fenómeno, cuando es necesario evaluar el efecto acumulado de una variable continua.

1.1. La definición de integral entre a y b cuando $a \leq b$

El precio total de la compra en el supermercado es la suma del precio de cada artículo; el peso que carga un ascensor es la suma de los pesos de las personas que viajan en él. La suma acumula el efecto de magnitudes discretas.

Estamos acostumbrados también a ver el efecto acumulado de magnitudes continuas: el volumen de agua en un balde es el resultado del flujo de un chorro de agua que por cierto tiempo lo va llenando; el consumo total de electricidad de una casa en un mes es el acumulado de la potencia demandada en cada momento a lo largo del mes; si todo el tiempo conocemos a qué velocidad está viajando un autómovil podemos determinar en cada instante la distancia que lleva recorrida.

El concepto de integral engloba todas estas posibilidades en un único concepto, que vincula la geometría con el cálculo y con una gran diversidad de aplicaciones.

1.1.1. La integral de funciones no negativas

Comenzaremos definiendo la integral para funciones que toman valores mayores o iguales que cero, situación en la que el concepto puede reducirse completamente a la determinación del área de una región del plano.

Definición 1 *Para una función $f \geq 0$ y un intervalo $[a, b]$ con $a \leq b$, definimos la* integral entre a y b de la función f *como el valor del área encerrada bajo el gráfico de f entre a y b. Indicaremos este número con la notación*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

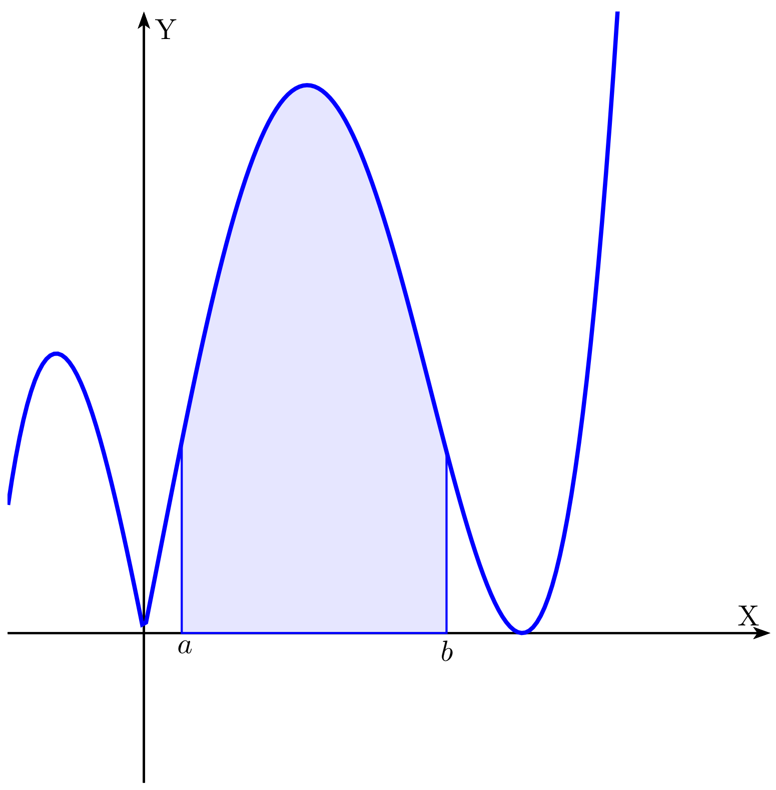

Figura 1.1.Integral de una función no negativa sobre un intervalo.

Observación 1 La integral puede verse como el efecto acumulado de las alturas bajo el gráfico de f en el intervalo $[a, b]$. Piénsese por ejemplo en pintar el área señalada en la figura 1.2 con un lápiz, moviendo el lápiz de arriba a abajo y de abajo a arriba mientras vamos avanzando lentamente de izquierda a derecha:

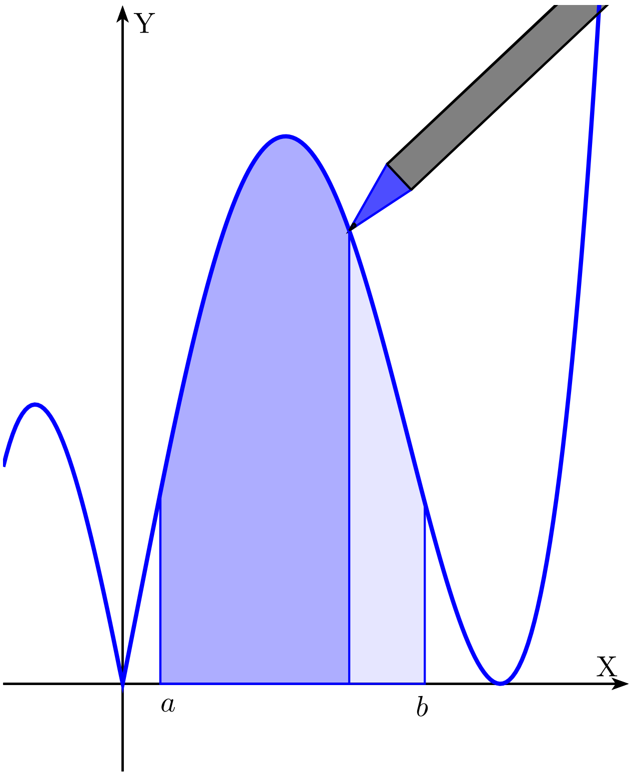

Figura 1.2. El área bajo el gráfico como “acumulado” las alturas.

El desgaste del grafo es proporcional al área a pintar y es, a la vez, el efecto acumulado de ir una y otra vez desde el eje horizontal hasta el borde superior de la figura limitada por el gráfico de f.

Observación 2 La notación

$$\int_a^b f(x)dx$$

es una manera breve de escribir *el área de la región encerrada bajo el gráfico de f entre a y b*. Todos los elementos necesarios para dar sentido a esta frase aparecen en ese símbolo.

- Con $f(x)$ especificamos cuál es la función a integrar. En general, la función aparecerá allí representada por alguna fórmula, como en los ejemplos 1, 2 y 3. Observemos que en el ejemplo 1 la x no aparece explícitamente porque estamos integrando una función constante, pero en los otros dos casos sí aparece. Conocer la función f determina completamente su gráfico en el plano (x, y).

- El símbolo dx nos dice cuál es la variable respecto a la que estamos integrando. En el ejemplo 3 esto es importante, porque sin una indicación explícita de cuál es la variable de integración también podríamos haber considerado a m como variable. Que el nombre de la variable sea x es puramente convencional: cualquier símbolo puede emplearse.

- Los *límites de integración* a y b, que aparecen como subíndice y superíndice, simplemente dicen que estamos empezando a integrar en a y terminando de integrar en b.

Como cualquier notación, se espera de la notación para la integral que sea útil para designar el concepto y trabajar con él, en particular a la hora de los cálculos. Pero mientras no se esté familiarizado con la notación, siempre puede recurrirse a pensar directamente en el área a la que alude la integral.

El signo $\int$ que denota a la integral es una S estilizada. Fue introducido por Gottfried Leibniz (1646-1716), en los albores de la teoría de integración. La razón de usarlo es que la integral puede verse como un paso al límite de la operación de sumar. ♠

Ejemplo 1 La integral entre 2 y 10 de la función constante 7 es el área del rectángulo que se muestra en la figura 1.3, delimitado por el eje horizontal $y = 0$, la recta horizontal $y = 7$ (que es el gráfico de la función constante 7) y las rectas verticales $x = 2$ y $x = 10$ (que están definidas por los límites de integración).

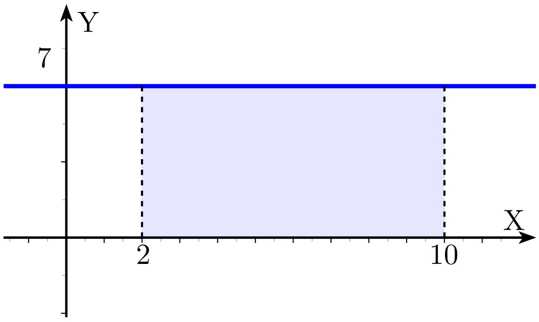

Figura 1.3.

Concluimos entonces que

$$\int_2^{10} 7dx = (10 - 2) \times 7 = 8 \times 7 = 56,$$

el área de un rectángulo de base 8 y altura 7.

Ejemplo 2 Para evaluar la integral entre 0 y 1 de la función

$$f(x) = x,$$

observamos en la figura 1.4 que corresponde el área de un triángulo de altura 1 y base 1.

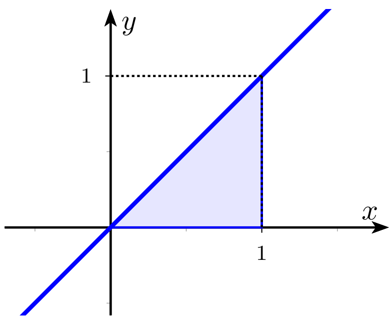

Figura 1.4.

Por lo tanto

$$\int_0^1 xdx = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

En este ejemplo la función que estamos integrando ya no es una constante, pero nuevamente hemos podido calcularlo haciendo uso de la simplicidad de la geometría de la situación. ♠

Ejemplo 3 Consideremos para $m > -1$ la función lineal

$$f(x) = 1 + mx$$

y la integral

$$\int_0^1 (1 + mx)dx.$$

Este ejemplo todavía puede abordarse con métodos elementales de cálculo de áreas. Tenemos que evaluar el área de un trapecio como el que aparece en la Figura 1.5 (en la que hemos representado la situación que corresponde a $m = -1/2$). La base tiene longitud 1. La altura en $x = 0$ mide 1, y la altura en $x = 1$ mide $1 + m$. Haciendo uso de la fórmula para el área de trapecios concluimos

$$\int_0^1 (1 + mx)dx = 1 \times \frac{1 + 1 + m}{2} = \frac{2 + m}{2}. \tag{1.1}$$

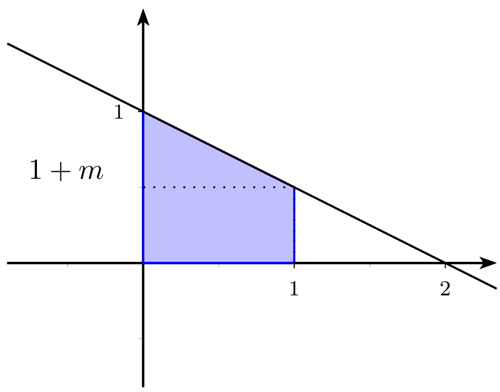

Figura 1.5.

Observemos que cuando $m = 0$ la función f es la constante 1 y el trapecio cuya área estamos calculando se reduce al cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. La fórmula (1.1) predice el valor 1 para la integral, que es justamente el área del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Cuando $m = -1$ el trapecio se reduce a un triángulo rectángulo: la mitad del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, con catetos contenidos en los ejes coordenados. Él área del triángulo es $1/2$, lo que vuelve a estar en acuerdo con la fórmula (1.1). ♠

Ejercicio 1.1.1 Para $0 \leq a \leq 1$, calcular

$$\int_0^a (1 - x)dx.$$

Ejemplo 4 Sea $p(c)$ la función

$$p(c) = \begin{cases} 1, & c \in [0,2]; \\ 2, & c \in (2,4]; \\ 3, & c \in (4,+\infty). \end{cases}$$

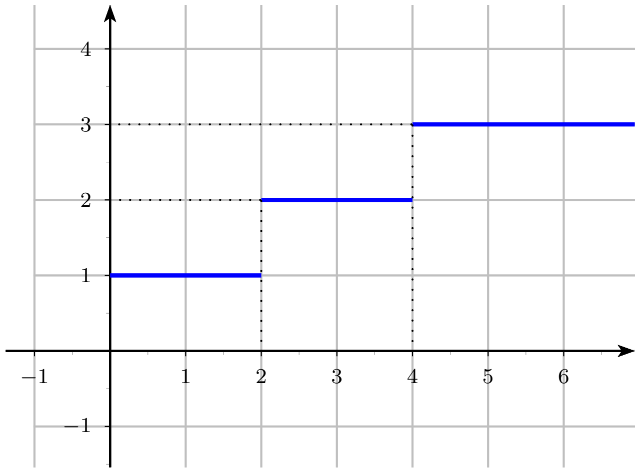

Figura 1.6.

Entonces

$$\int_0^3 p(c)dc = (2-0) \times 1 + (3-2) \times 2 = 4$$

Ejercicio 1.1.2 Calcular

$$\int_0^C p(c)dc$$

para $C = 4$, $C = 5$ y $C = 10$. ♣

Ejemplo 5 Sin importar cuál sea la función

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

porque el intervalo $[a,a]$ se reduce a un punto, y la región encerrada bajo el gráfico de f a un segmento de recta, que no encierra área. *clubsuit*

Ejemplo 6 La ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1.2}$$

define en el plano (x,y) una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1. Si un punto (x,y) con $y \geq 0$ está en la circunferencia, entonces $-1 \leq x \leq 1$ y la variable y queda determinada por x como una función

$$y = f(x)$$

a través de la fórmula

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1. \tag{1.3}$$

En la figura 1.7 aparece representada con trazo fino toda la circunferencia (1.2) y se destaca con trazo grueso la parte de la circunferencia en el semiplano $y \geq 0$, que es el gráfico de la función 1.3.

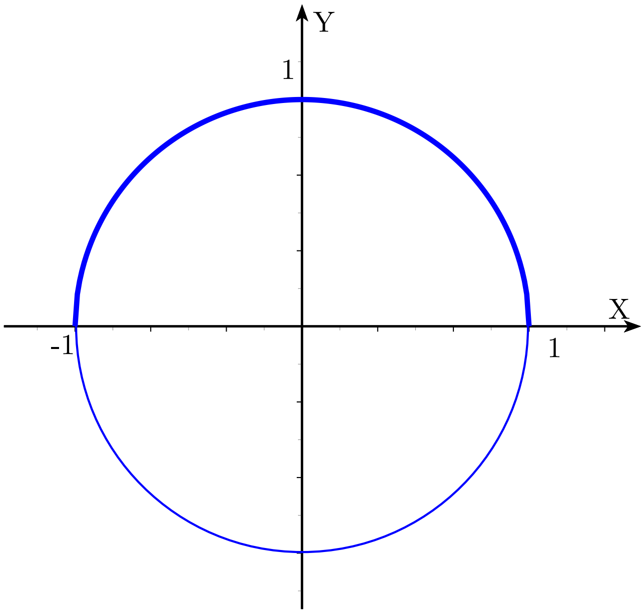

Figura 1.7. La circunferencia de ecuación (1.2) y el gráfico de (1.3).

Entonces

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

La razón es que la región encerrada bajo el gráfico de f en el intervalo $[-1, 1]$ es un semicírculo de radio 1, cuya área es igual a la mitad de π, que es el área del círculo de igual radio.

Ejercicio 1.1.3 Calcular las integrales

$$\int_{0}^{a} \sqrt{1-x^2}dx$$

para $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $a = 1$. ♣

1.1.2. Funciones de cualquier signo

Las variables continuas pueden tanto sumar como restar: el agua puede estar entrando a un tanque en algunos momentos y saliendo en otro; las carreteras tiene dos sentidos, y cuando un coche se desplaza en uno de ellos aumenta su distancia al punto de partida, mientras que disminuye cuando lo hace en el otro; un consumidor de electricidad también puede generar y volcar excedentes a la red. Interesa entonces generar una teoría de la acumulación del efecto de las magnitudes continuas que pueda tener en cuenta estos fenómenos. Ese es el objetivo de esta sección.

Definición 2 *Si A es un conjunto acotado*[1] *del plano (x, y) llamamos*

- *A_+ a la intersección de A con el semiplano $y \geq 0$;*
- *A_- a la intersección de A con el semiplano $y \leq 0$.*

[1] Que el conjunto sea acotado significa que no se escapa al infinito. Esta restricción evita que pueden aparecer conjuntos de área infinita. Notablemente, aunque ningún conjunto acotado puede tener área infinita, existen conjuntos de área finita que no son acotados.

El área signada *de A es la diferencia*

$$\text{área}(A_+) - \text{área}(A_-).$$

En otras palabras, al calcular el área signada de un conjunto, lo que está por encima del eje Ox suma, lo que está por debajo, resta.

Ejemplo 7 En la figura 1.8 hemos representado en el plano (x, y) el gráfico de una cierta función f. Consideremos el conjunto A del plano que queda encerrado entre el gráfico y el eje Ox, para $0 \leq x \leq 9$. Tanto la intersección A_+ del conjunto A con el semiplano superior $y \geq 0$, como la intersección A_- con el semiplano inferior $y \leq 0$, son no vacías.

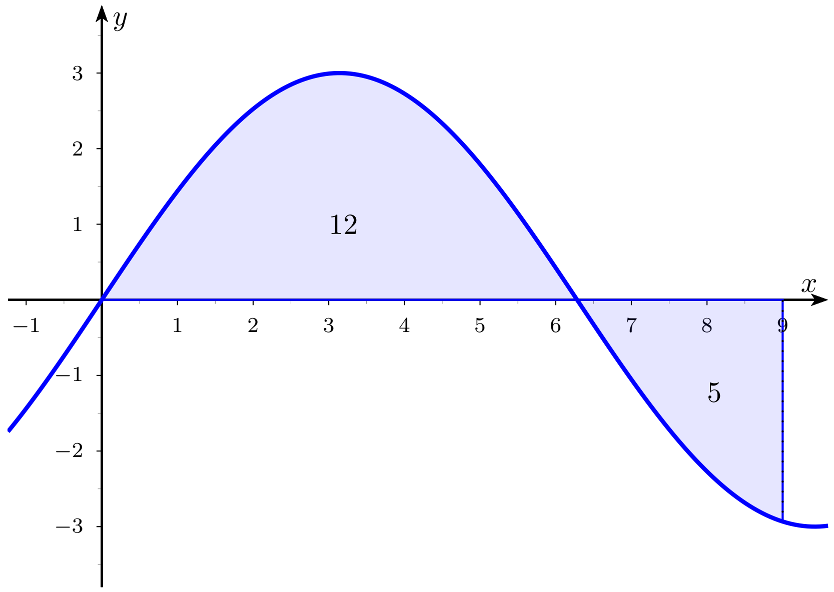

Figura 1.8. Área signada de un conjunto del plano

Supongamos que la región A_+, que en la figura 1.8 está por encima del eje Ox, tiene área 12 y que A_-, la que está por debajo, tiene área 5. El área signada de A es 7. ♣

Ejercicio 1.1.4 Demostrar que si un conjunto tiene área 0 entonces su área signada también es igual a 0. Dar un ejemplo de un conjunto de área mayor que 0 que tenga área signada 0.

Ejercicio 1.1.5 Demostrar que el área signada de la unión de dos conjuntos disjuntos A y B es la suma del área signada de A más el área signada de B.

Definición 3 *Para una función real f definida sobre un intervalo $[a, b]$ con $a \leq b$, definimos la* integral entre a y b de la función f *como el valor del área signada de la región encerrada entre el gráfico de f y el eje Ox, sobre el intervalo $[a, b]$. Indicaremos este número con la notación*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Ejemplo 8 El gráfico de la función constante definida para cualquier $x \in \mathbb{R}$ por la fórmula

$$f(x) = -3$$

es una línea horizontal a la altura $y = -3$ del plano (x, y).

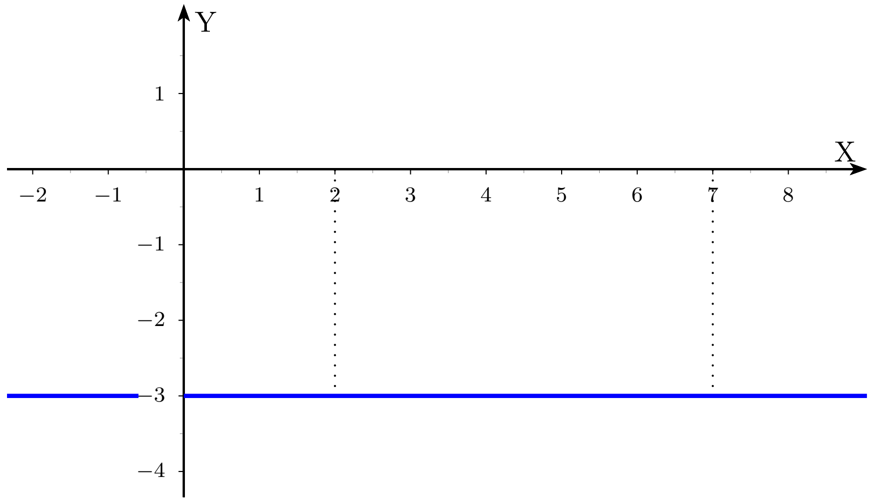

Figura 1.9.Una integral de $f(x) = -3$.

De acuerdo con la convención de signos de la definición 3, la integral

$$\int_2^7 (-3)dx$$

es el opuesto del área del rectángulo encerrado entre el eje O_x, la recta horizontal $y = -3$ y las verticales $x = 2$ y $x = 7$. Por lo tanto esta integral toma el valor

$$-3 \times (7 - 2) = -15.$$

Ejercicio 1.1.6 Mostrar que para $a \leq b$ y cualquier constante c, se satisface la igualdad

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a). \tag{1.4}$$

Observación 3 El ejercicio 1.1.6 nos dice que para cualquier función constante la integral sobre un intervalo $[a, b]$ es el producto del valor de la función por la longitud del intervalo. La convención de signos que hemos tomado hace que cuando la función es negativa la integral toma un valor negativo. Es interesante destacar también que esta convención hace que la fórmula para el cálculo de la integral sea especialmente sencilla, porque la misma fórmula (1.4) vale independientemente de que c sea negativo, positivo o cero. ♠ ♣

Ejemplo 9 Calcularemos la integral

$$\int_0^2 (1 - x)dx.$$

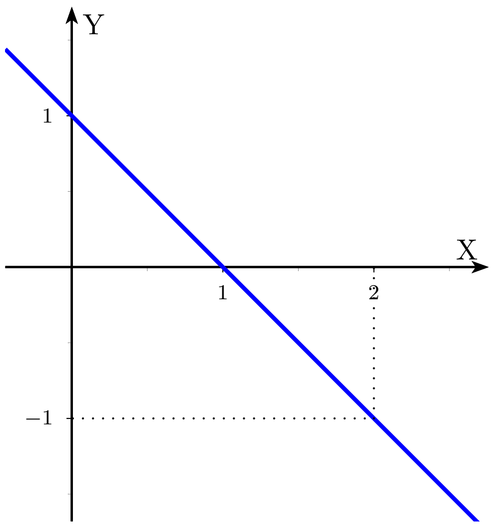

Figura 1.10.Grafico de $f(x) = 1 - x$

El gráfico de $1 - x$ sobre el intervalo $[0, 2]$ encierra dos triángulos: uno por encima del eje Ox, con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$, que tiene área $1/2$; otro por debajo del eje Ox, con vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$ y $(1, -1)$, que también tiene área $1/2$. Esta segunda área se computa con signo de menos para el cálculo de la integral, de modo que la integral vale 0.

Ejercicio 1.1.7 Calcular la integral de $1 - x$ entre 0 y 3. ♣

Ejemplo 10 Consideremos la función

$$q(t) = \begin{cases} -5, & t \in [-120, -109]; \\ 0, & t \in (-109, -60]; \\ 1{,}5, & t \in (-60, 244]; \\ 0, & t \in (244, 360]; \\ -12 & t \in (360, 420]. \end{cases} \tag{1.5}$$

Entonces

$$\int_{360}^{375} q(t)dt = -180.$$

Ejercicio 1.1.8 Completar los detalles del cálculo anterior y calcular también

$$\int_{-120}^{420} q(t)dt.$$

Esta función reaparecerá en el ejemplo **??**, página **??**, en un contexto en el que el signo de q tiene un significado importante.

Ejercicio 1.1.9 La figura 1.11 muestra el gráfico de una función f definida sobre el intervalo $[a, d]$. Los números representan el valor de las áreas de cada región del plano encerrada entre el eje horizontal y el gráfico de f.

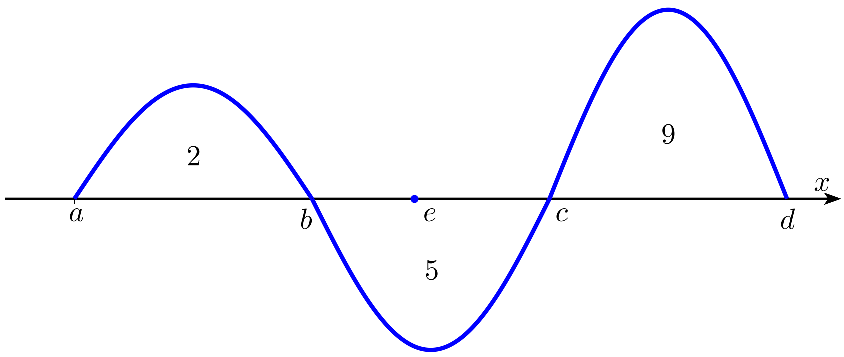

Figura 1.11.

1. Determinar el valor de las integrales

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b (-f(x))\,dx, \qquad \int_a^b 5f(x)\ dx.$$

2. ¿Qué relación puede establecerse entre las integrales

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^e f(x)dx, \qquad \int_a^c f(x)dx.$$

1.1.3. Ejercicios

Ejercicio 1.1.10 Sea

$$f(t) = -t + 5.$$

Calcular las integrales

$$\int_1^5 f(t)dt, \qquad \int_1^5 (f(t)-4)dt, \qquad \int_1^5 (f(t)-2)dt, \qquad \int_1^5 (f(t)+2)dt, \quad \int_1^5 3f(t)dt.$$

Interpretar geométricamente los resultados.

Ejercicio 1.1.11 Calcular

$$\int_0^1 \left(1+\sqrt{1-x^2}\right)dx, \quad \int_{-1}^1 \left(3-\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

Ejercicio 1.1.12 Sea f la función real definida sobre el intervalo $[-1,1]$, cuyo gráfico aparece en la figura 1.12.

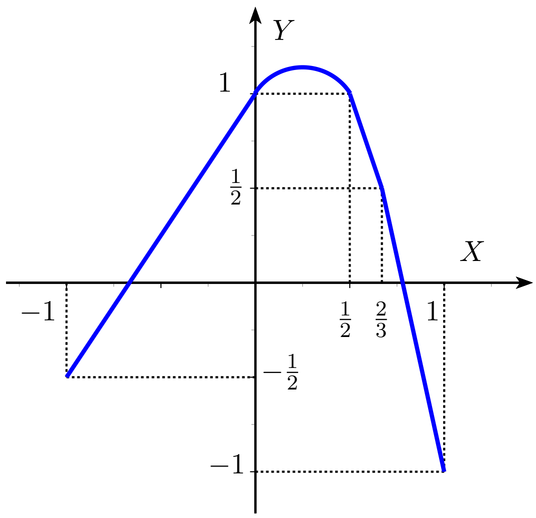

Figura 1.12. Gráfico de una función f definida sobre $[-1, 1]$.

1. Calcular las integrales $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} f(x)\ dx$ y $\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\ dx$.
2. Sabiendo que $\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\ dx = \frac{8}{15}$, hallar $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx$

Ejercicio 1.1.13 Para la función real f cuyo gráfico aparece en la figura 1.12, graficar $f(-x)$. ¿Cuál es la relación entre $\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\ dx$ y $\int_{-1}^{-\frac{2}{3}} f(-x)\ dx$?

Ejercicio 1.1.14 Para x en el intervalo $[1, 3]$ definimos

$$F(x) = \int_{1}^{x} 5dt.$$

1. Hallar $F(1)$, $F(2)$ y $F(3)$.
2. Estudiar el crecimiento de la función F.
3. Determinar los máximos y mínimos de F en el intervalo $[1, 3]$.
4. Bosquejar el gráfico de F sobre el intervalo $[1, 3]$.

Ejercicio 1.1.15 Para x en el intervalo $[1, 3]$ definimos

$$F(x) = \int_{1}^{x} (5t - 10)dt.$$

1. Hallar $F(1)$, $F(2)$ y $F(3)$.
2. Estudiar el crecimiento de la función F.
3. Determinar los máximos y mínimos de F en el intervalo $[1, 3]$.

4. Bosquejar el gráfico de F sobre el intervalo $[1,3]$.

Ejercicio 1.1.16 Para la función f del ejercicio 1.1.12, cuyo gráfico aparece en la figura 1.11, y x en el intervalo $[-1,1]$ se define

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt.$$

1. Hallar $F(-1)$ y $F(1)$.
2. Estudiar el crecimiento de la función F.
3. Determinar máximos y mínimos de F en el intervalo $[-1,1]$. Identificar tanto máximos y mínimos absolutos como relativos.
4. Bosquejar $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$.

1.2. Integrales sobre intervalos cualesquiera y con extremos variables

Para una función real f y números reales a y b con $a \leq b$ hemos definido la integral

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{1.6}$$

que es un número al que hemos dado en llamar la *integral entre a y b de f*. Este número se calcula a partir de a, b y f determinando el área signada que queda encerrada en la región $a \leq x \leq b$ del plano (x, y) entre el gráfico de f y el eje O_x. Este procedimiento es muy general. Para una clase muy amplia de funciones reales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la integral está definida para cualquier pareja de valores a y b. Esta generalidad permite dejar variar a, b o f y estudiar cómo esta variabilidad afecta a (1.6). En esta sección consideraremos el extremo superior b como variable.

Ejemplo 11 Uno de los ejemplos de integral más sencillos es el de la constante

$$f(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que para cualquier elección de a y b, con $a \leq b$ se tiene

$$\int_a^b 1dx = b - a. \tag{1.7}$$

Vamos a considerar ahora $a = 0$ y dejar variar b. Para enfatizar el extremo superior es variable lo llamaremos x en vez de b y cambiaremos la notación para reflejarlo (el nombre de las variables es irrelevante, ver la observación 4 en la página 24, pero es tradicional usar las primeras letras del alfabeto para las constantes y las últimas para las magnitudes que se piensan cómo variables. Naturalmente, qué es constante y qué es variable depende del contexto). Calculamos entonces

$$\int_0^x 1ds = x. \tag{1.8}$$

Integrar hasta un límite variable x produce un resultado variable: cuanto mayor es x mayor es el área que hemos acumulado bajo el gráfico de la función.

Para $x \geq 0$ la integral (1.8) está definida como un área bajo el gráfico de la constante 1. Para $x < 0$ no tenemos todavía una definición de integral, pero observemos que el miembro de la derecha en (1.8) está definido y tiene un sentido geométrico: es el opuesto del valor del área encerrada entre x y 0 bajo el gráfico de la constante 1. ♣

Daremos una definición de integral entre a y b, para $a < b$ que hace que la fórmula 1.8 sea válida también para $x < 0$.

Definición 4 *Para una función f y un intervalo $[a, b]$ con $a > b$, definimos la* integral entre a y b de la función f *como el opuesta de la integral entre b y a:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Ejemplo 12 Para $x < 0$ escribimos

$$\int_0^x 1ds = -\int_x^0 1ds.$$

Tal como vemos en la figura 1.13, la integral del miembro de la derecha es el área del rectángulo de altura 1 y base $[x, 0]$, que es igual a

$$(0 - x) \times 1 = -x.$$

Observemos que como x es un número negativo entonces $-x$ es positivo, lo que está de acuerdo con la interpretación de $-x$ como el área de un rectángulo.

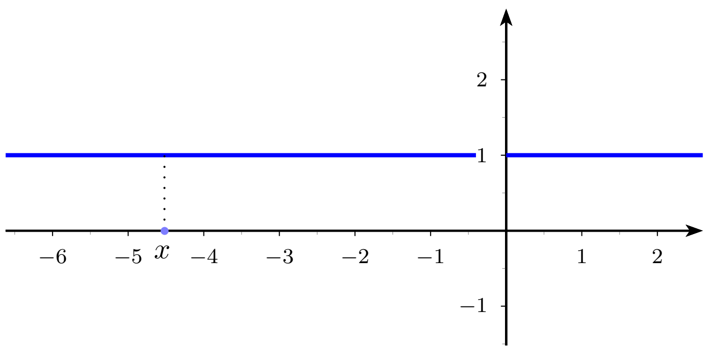

Figura 1.13. La integral entre 0 y x de la constante 1, para $x < 0$.

Concluimos entonces que

$$\int_0^x 1ds = -(-x) = x,$$

lo que implica que, tal como era nuestro propósito al dar la definición 4, la fórmula

$$\int_0^x 1ds = x,$$

es válida para cualquier valor de x. ♣

Ejemplo 13 La integral

$$\int_5^1 (1 + x)dx$$

es igual a

$$-\int_1^5 (1 + x)dx.$$

La integral entre 1 y 5 es es el área

$$(5 - 1) \times \frac{(1 + 1) + (1 + 5)}{2} = 16, \qquad (1.9)$$

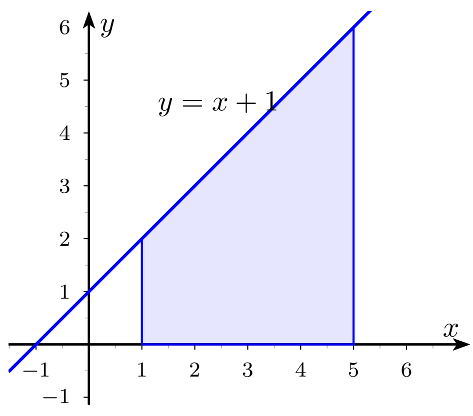

Figura 1.14

del trapecio que aparece en la figura 1.14. El factor $5 - 1$ es la longitud de la base, en tanto que los sumandos $1 + 1$ y $1 + 5$ resultan de evaluar $1 + x$ en $x = 1$ y $x = 5$, y son las alturas del trapecio.

Concluimos que

$$\int_5^1 (1+x)dx = -16,$$

El opuesto del valor del área del trapecio encerrado bajo el gráfico de $1+x$ entre 1 y 5.

Un sencillo truco de cálculo permite asignar directamente el signo correcto a la integral. Si pensamos que en el intervalo $[5,1]$ el punto inicial es 5 y el final es 1, podemos considerar que la longitud de la base es

$$1-5=-4,$$

y tiene un signo que refleja que estamos recorriendo el eje Ox en sentido decreciente. Si usamos esta "longitud" de la base en la fórmula del área del trapecio, obtenemos el valor -8 para su "área". Este cálculo de longitudes con signos según los valores funcionales estén hacia arriba o abajo del eje Ox, o según los intervalos sobre el eje Ox se recorran en sentido creciente o decreciente, es consistente con las convenciones de signo del cálculo de integrales y permite evaluarlas sin tener que estar pensando todo el tiempo en ellas: simplemente las fórmulas "se hacen cargo" de asignar los signos correctamente.

Ejercicio 1.2.1 Calcular

$$\int_a^b (1+x)dx$$

para las siguientes elecciones del intervalo $[a,b]$: $[-2,-6]$, $[1,-1]$, $[1,-2]$, $[1,-6]$. ♣

Ejercicio 1.2.2 Mostrar que para $a \geq b$ y cualquier constante c, se satisface la igualdad

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a). \tag{1.10}$$

Observar que el ejercicio 1.2.2 generaliza el resultado obtenido en el ejercicio 1.1.6 de la página 15 y también muestra que las fórmulas del cálculo en sus versiones más simples dan cuenta correctamente de todas las convenciones de signos del cálculo de integrales.

La definición 4 hace que el formalismo del cálculo integral se adapte a describir fenómenos corrientes, como describir la posición de un móvil hacia el pasado.

Ejemplo 14 Consideremos un móvil que se desplaza con velocidad de $1\,\mathrm{m/s}$. Si en el instante $t=10\,\mathrm{s}$ está en la posición $x=10\,\mathrm{m}$, en un tiempo posterior $t \geq 10$ estará en la posición

$$x(t) = 10 + 1 \times (t-10). \tag{1.11}$$

Si siempre estuvo moviéndose con la misma velocidad, ¿qué posición ocupaba para tiempos t menores que 10? La respuesta también está dada por la fórmula (1.11). Observemos que, por ejemplo, para $t=5$ predice el valor

$$x(5) = 10 + 1 \times (5-10) = 10-5 = 5,$$

que es valor correcto para la posición del móvil. En resumen, cuando nos movemos hacia atrás en el tiempo el efecto de una velocidad positiva es el de hacer "retroceder" algo que seguramente hemos observado alguna vez al pasar hacia atrás una película. El formalismo del cálculo refleja este hecho, asignando signo negativo a las integrales de funciones positivas sobre intervalos que se extienden hacia el "pasado". ♣

Ejemplo 15 Cuando un móvil se desplaza con una velocidad constante v y en el tiempo t_0 está en la posición x_0 del eje O_x, en un tiempo t lo encontraremos en la ubicación

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0). \tag{1.12}$$

Las definiciones que hemos adoptado permiten escribir (1.12) en términos de una integral, como

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v ds.$$

Según que t sea mayor o menor que t_0 el valor de $x(t)$ es mayor o menor que el de x_0. Nuestra convención de signos para el cálculo integral automáticamente asigna el signo correcto al incremento en la variable x. ♣

Ejemplo 16 Para $x > 0$ la integral

$$\int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} \tag{1.13}$$

resulta de evaluar el área de un triángulo con base x y altura x, como se muestra en la figura 1.15.

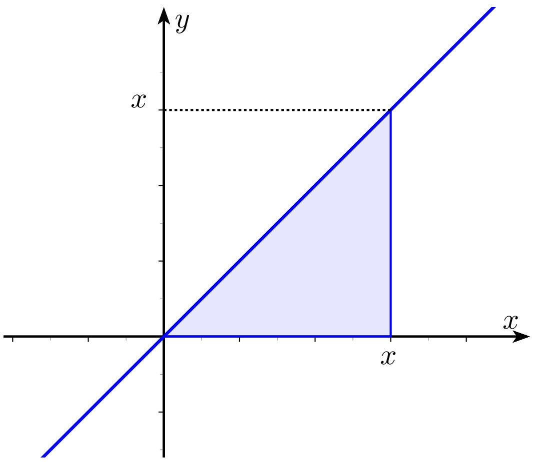

Figura 1.15

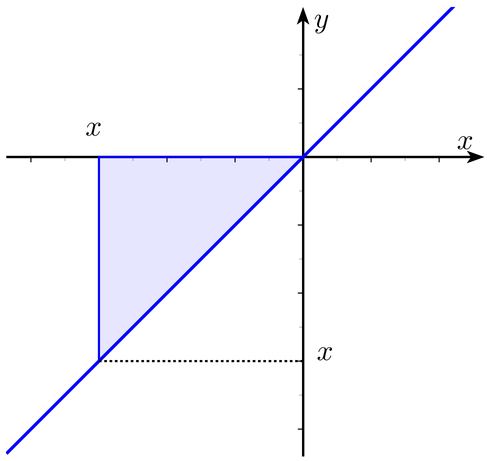

Figura 1.16

Para $x < 0$ escribimos

$$\int_0^x t dt = -\int_x^0 t dt.$$

La integral en el miembro de la derecha resulta de evaluar el área de una región del plano que está por debajo del eje O_x: el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(x, 0)$ y (x, x) que aparece en la figura 1.16. El área del triángulo es $(-x)^2/2 = x^2/2$, por lo que

$$\int_x^0 t dt = -\frac{x^2}{2},$$

cosa que implica

$$\int_0^x t dt = -\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

lo que nos permite concluir inmediatamente que la fórmula (1.13) es válida también para $x < 0$. Una vez más, las fórmulas en su versión más sencilla asignan a las integrales los signos correctos. ♣

Observación 4 Los nombres de las variables.
Quizás haya llamado la atención del lector el hecho de que en muchas fórmulas hemos llamado t o s a la variable de integración, que hasta el momento veníamos designando siempre con la letra x. En realidad el nombre de la variable que se usa dentro de la integral es irrelevante. Lo único importante es no usar en la misma fórmula el mismo símbolo con dos significados diferentes, por lo que, por ejemplo, en (1.13) podríamos haber escrito

$$\int_0^x \diamondsuit^2 d\diamondsuit = \frac{x^2}{2},$$

usado `pepito` como nombre de variable, en vez de la t o de $\diamondsuit$, o haber mantenido la letra b para el extremo superior de integración en vez de decidir adoptar la x.

Aunque desde el punto de vista conceptual el cambio de notación es irrelevante, en la práctica puede resultar incómodo, incluso confuso. Sin embargo, fuera del ámbito de la matemática es algo que las personas manejan sin mayores dificultades: muchos mazos de cartas utilizan la figura de un payaso o bufón como comodín, otras emplean un tatú. Pero nadie que haya aprendido a jugar un juego con un mazo de un tipo tendrá problemas para usar los comodines en el otro mazo; para hablar de personas cualesquiera es frecuente referirse a ellas como `fulano`, `zutano`, `mengano` y `perengano`. Da lo mismo usar uno u otro de estos términos; en el juego de adivinar un verbo escondido haciendo preguntas la variable se llama `tipotear`, pero algunas personas emplean la variante `pipotear`; etcétera. ♣

1.2.1. Ejercicios

Ejercicio 1.2.3 Sea f la función cuyo gráfico aparece en la En la figura 1.17 retomamos el gráfico de la función f que habíamos presentado en la figura 1.12 de la página 18.

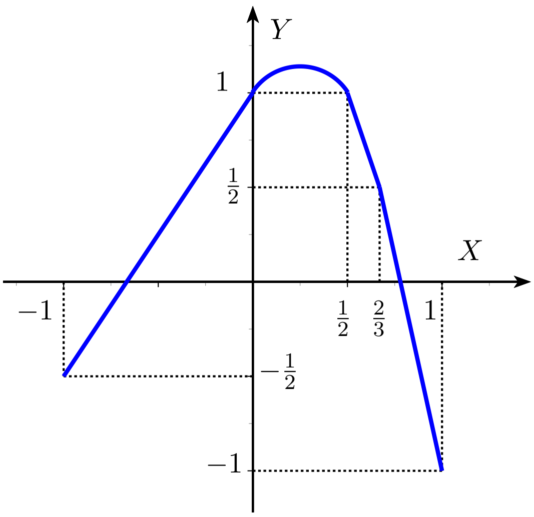

Figura 1.17. Gráfico de una función f definida sobre $[-1, 1]$, revisitado.

Calcular

$$\int_1^{\frac{1}{2}} f(x)dx, \quad \int_{\frac{2}{3}}^{-1} f(x)dx$$

Ejercicio 1.2.4 Para la función f que aparece en la figura 1.17 definimos

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

1. Para $-1 \leq x \leq 0$ calcular $F(x)$;
2. Sabiendo que
$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{8}{15},$$
calcular $F(x)$ para $1/2 \leq x \leq 2/3$;
3. Para $2/3 \leq x \leq 1$ calcular $F(x)$;
4. Graficar $F(x)$. Salvo para el intervalo $(0, 1/2)$ hay fórmulas explícitas para F que se pueden emplear para graficarla. Esbozar el gráfico de F sobre el intervalo $(0, 1/2)$ con la mayor precisión posible.

Ejercicio 1.2.5 Indicamos con $|x|$ el valor absoluto de x, que está definido de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} -x, x \leq 0; \\ x, x \geq 0. \end{cases}$$

1. Graficar $|x|$;
2. Calcular
$$F(x) = \int_0^x |t|\,dt$$
y graficarla.

Ejercicio 1.2.6 Para cada una de las funciones f cuyos gráficos se muestran en las figuras 1.18, 1.19 y 1.20, esbozar con tanto detalle como sea posible el gráfico de

$$F(x) = \int_{-1}^x f(s)ds, \quad G(x) = \int_3^x f(s)ds$$

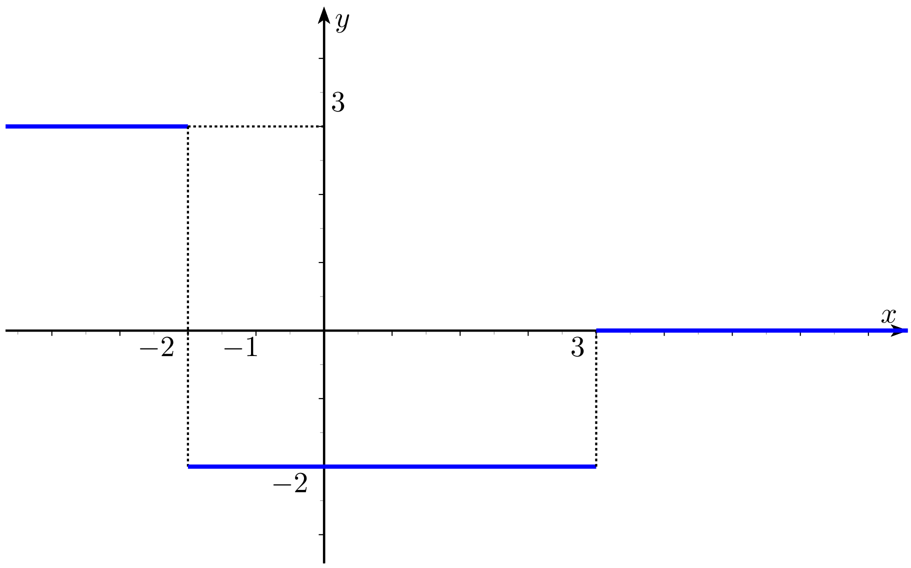

Figura 1.18

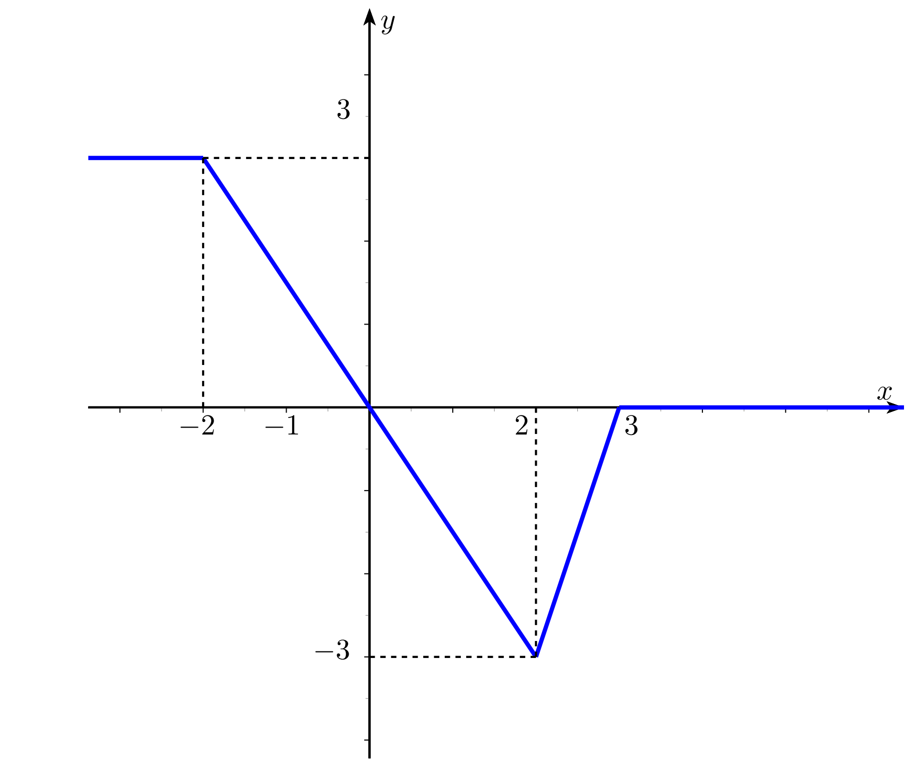

Figura 1.19

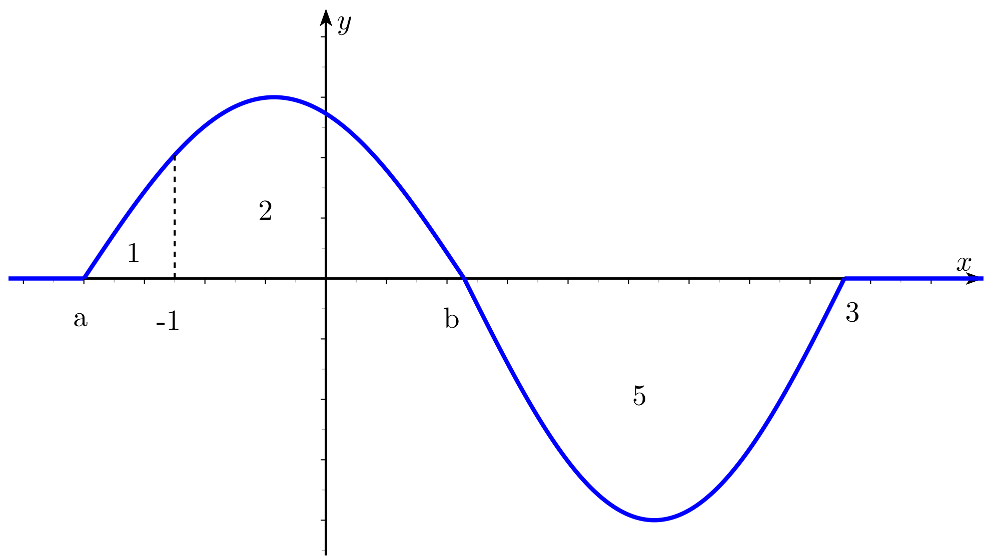

Figura 1.20

En cada caso, bosquejar como serían los gráficos de las funciones

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds,$$

donde x_0 es una constante cualquiera.

Ejercicio 1.2.7 Sea $f(x)$ una función periódica de período T tal que

$$\int_0^T f(s)ds = 0. \tag{1.14}$$

Mostrar que para cualquier elección de x_0 la función

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(s)ds$$

es periódica de período T. ¿Qué ocurre con la función F cuando la condición (1.14) no se satisface?

Ejercicio 1.2.8 Tarifas eléctricas
La tarifa residencial simple de UTE comprende los siguientes cargos[2]:

- Cargo fijo mensual: \$ 137,70.
- Cargo por potencia contratada: \$ 44,50 por kilovatio.
- Cargo por consumo de energia (el costo se expresa en pesos/kilovatio hora):
  - hasta 100 kilovatios hora: 3,5;
  - más de 100 kilovatios hora, hasta 600 kilovatios hora: 4,7;
  - más de 600 kilovatios hora: 5,4.

Estos números no incluyen impuestos.

1. Graficar la función
$$p(c) = \begin{cases} 3{,}5, & c \in [0, 100], \\ 4{,}7, & c \in (100, 600], \\ 5{,}4, & c \in (600, +\infty), \end{cases}$$
que define el preció del kilovatio hora en función de la franja en que cae el consumo.
2. Mostrar que en un hogar con una potencia contratada de 3,3 kilovatios, si el consumo de un mes es de c kilovatios hora, la factura total (antes de sumar los impuestos) asciende, en pesos, a
$$P(c) = 284{,}55 + \int_0^c p(s)ds. \tag{1.15}$$
Graficar la función $P(c)$.

Ejercicio 1.2.9 El tanque de Juan
A la medianoche, el tanque de agua de la casa de Juan contenía 634 litros. A las 11 de la noche Juan había encendido la bomba, que desde ese momento alimentaba el tanque mansamente, a un ritmo de 1 un litro y medio de agua por minuto. La bomba continuó encendida hasta las 4:04 de la mañana, momento en que se detuvo porque el tanque se llenó. Entre las 6 y las 7 de la mañana se encendió el riego, que consumió agua a razón de 12 litros por minuto. Antes de todo esto, entre las 10 y las 10:11 de la noche, Juan se había dado un baño, consumiendo agua a un ritmo constante de 5 litros por minuto.

[2]Los números corresponden a precios del año 2013 y están aproximados al primer decimal. Se obtuvieron del sitio web `www.ute.com.uy` en setiembre de 2013.

1. Graficar el caudal de agua que recibe el tanque, en litros por minuto, entre las 10 de la noche del sábado y las 7 de la mañana del domingo. Medir el tiempo t en minutos. Considerar que el caudal es negativo cuando el agua sale del tanque, y positivo cuando entra. Graficar la función $q(t)$ que representa el caudal.

2. Calcular el volumen $V(t)$ de agua para cada tiempo t entre las 10 de la noche y las 7 de la mañana. Graficar $V(t)$ Determinar una fórmula del tipo de la fórmula (1.15) que relacione $V(t)$ con $q(t)$.

Ejercicio 1.2.10 ¿Para cuáles de las siguientes situaciones el concepto de integral provee una descripción adecuada?

1. La determinación del precio de la nafta súper a partir del precio del crudo y de los costos operativos de la refinería.

2. La lectura del consumo de electricidad de una casa a lo largo de un mes.

3. La medida de la velocidad a la que vamos conduciendo, tal como nos la muestra el velocímetro en el panel del auto.

4. El número que indica el cuentakilómetros del auto, que mientras no ha sido manipulado indica la distancia total que ha recorrido.

5. El peso total que una estructura descarga a sus cimientos.

6. La cota de agua en el lago de la represa de Rincón del Bonete.

7. La concentración de carbono 14 en un resto fósil, cuya medida se usa para datarlo.

1.3. Primeras propiedades de la integral

Hemos definido la integral de una función como el área signada de ciertas regiones del plano. El área signada es un concepto que deriva directamente de la noción de área, por lo que las propiedades del área de los subconjuntos del plano se traducen en propiedades de la integral.

Utilizaremos las siguientes propiedades del área, que enunciamos sin mayor justificación:

1. el área de cualquier[3] conjunto acotado del plano es un número mayor o igual que cero;
2. el área de la unión disjunta de dos conjuntos A y B es la suma del área de A más el área de B. El resultado es cierto también cuando la unión no es disjunta, pero los conjuntos A y B tienen en común una región de área nula (como es el caso de dos polígonos que solo comparten partes de sus bordes);
3. si a un conjunto A se le aplica una isometría el área de su imagen es igual al área original de A. En particular, esto es cierto cuando A sufre una traslación o una simetría axial, que son los casos que más utilizaremos.
4. si A está contenido en B, entonces el área de B es mayor o igual que la de A;
5. si todas las dimensiones de un conjunto A aumentan o disminuyen en un factor α, el área de A aumento o disminuye por un factor de α^2;
6. si en una dirección las longitudes de A aumentan o disminuyen en un factor α, el el área de A aumenta o disminuye por el mismo factor α. En el cálculo de integrales haremos uso de esta propiedad aplicando dilataciones o contracciones en la dirección de alguno de los ejes coordenados Ox y Oy del plano (x, y).

En realidad las propiedades 1, 2 y 3, junto con la especificación de que el área de un cuadrado de lado unidad es igual a 1, determinan completamente al área. Las otras propiedades pueden deducirse de las tres primeras. A modo de ejemplo, dejamos un ejercicio para el lector.

Ejercicio 1.3.1 Mostrar que las propiedades 1 y 2 implican la propiedad 4.

Ya vimos además que el área signada tiene la misma propiedad de aditividad 2 que tiene el área. Ver el ejercicio 1.1.5, en la página 14 de la sección 1.1.

1.3.1. Aditividad de la integral respecto al intervalo

Probaremos en esta sección el resultado de aditividad de la integral respecto a los intervalos de integración que está contenido en la proposición 1.

Proposición 1 *Sean a, b y c tres números reales y f una función definida sobre un intervalo que contiene a, b y c. Entonces*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx. \tag{1.16}$$

[3]En realidad no es posible definir el área para cualquier conjunto del plano y hay que restringirse a una subfamilia adecuada de todos ellos. Obviaremos esta cuestión técnica, porque el área puede definirse sin problemas para todos los conjuntos con los que vamos a trabajar.

Prueba. Comenzamos por el caso $a < b < c$. La integral entre a y c es el área signada de la región R encerrada entre el gráfico de f y el eje Ox sobre el intervalo $[a, c]$. Esta región es la unión de las regiones R_1 y R_2 encerradas entre el gráfico de f y el eje Ox sobre el intervalo $[a, b]$ y $[b, c]$, que solo tienen en común un segmento contenido sobre la línea vertical $x = b$, que encierra área nula. Las regiones R, R_1 y R_2 se muestran en la figura 1.21.

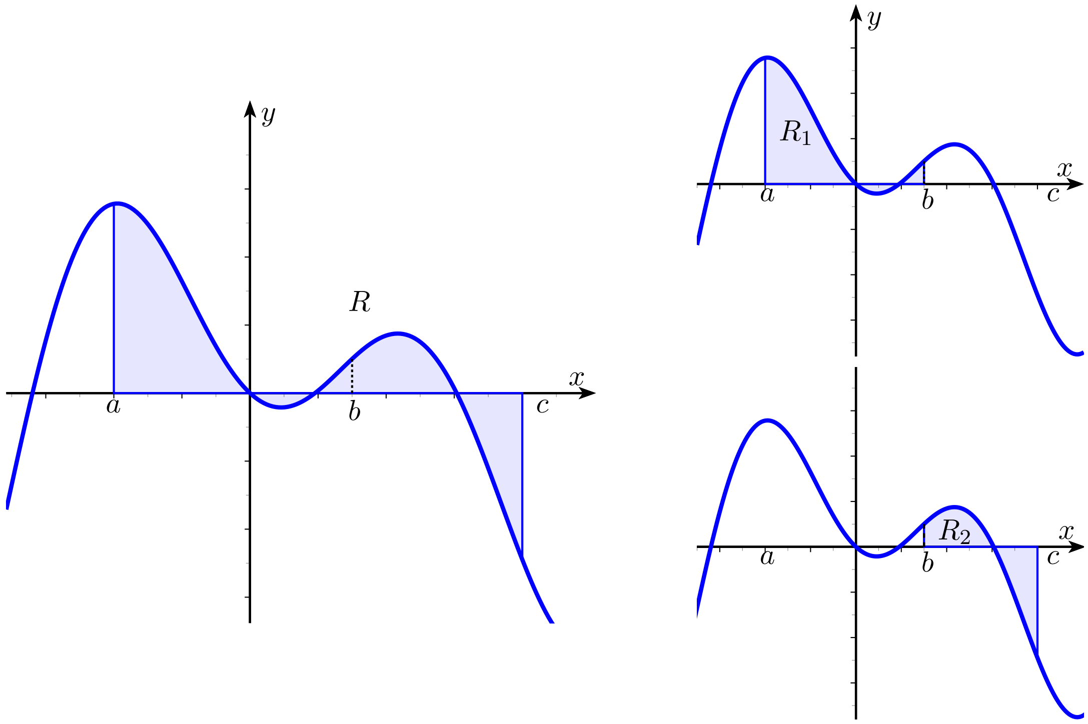

Figura 1.21

La aditividad del área signada respecto a la unión de conjuntos con parte en comjún de área nula, completa la demostración.

Dado que a, b y c pueden guardar entre ellos una relación diferente, estudiaremos ahora el caso $a < c < b$. Las otras posibilidades quedarán como ejercicio para el lector.

Intercambiando los roles de b y c podemos aplicar la fórmula (1.3.3), que ya fue probada para el caso en que todos los límites inferiores de integración son menores que los superiores. Por lo tanto

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

Despejando de esta igualdad la integral entre a y c obtenemos

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx. \tag{1.17}$$

La segunda integral en el miembro de la derecha satisface

$$-\int_c^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx, \tag{1.18}$$

por la definición que hemos dado para la integral cuando se invierte el sentido de integración. Sustituyendo (1.18) en (1.17) se obtiene (1.3.3).

Ejercicio 1.3.2 Completar la demostración de la proposición 1, examinando los posibles ordenamientos de a, b y c que aún no se han analizado. Contemplar también la posibilidad de que algunos de los extremos, o todos ellos, coincidan. □

Ejercicio 1.3.3 Para la función $f(x) = 1 + x$, verificar la igualdad , para $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$.

Ejercicio 1.3.4 Dada una función real f definida sobre $\mathbb{R}$ y un número real x_0 cualquiera definimos una nueva función

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds.$$

Mostrar que para cualquier valor de x y h el incremento

$$\Delta F = F(x+h) - F(x)$$

de la función F puede escribirse como

$$\Delta F = \int_{x}^{x+h} f(s)ds.$$

Interpretar geométricamente este resultado.

1.3.2. Monotonía de la integral

Aunque fuera del ámbito de la Matemática las comparaciones puedan ser odiosas, poder establecer relaciones de tamaño entre magnitudes diferentes es una práctica frecuente y necesaria en el cálculo. En el cálculo de integrales, cuanto más grande es la función que se integra, más grande es la integral.

Proposición 2 *Sean f y g dos funciones definidas sobre el intervalo $[a, b]$, con $a \leq b$. Si*

$$f(x) \leq g(x), \quad x \in [a, b], \tag{1.19}$$

entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{1.20}$$

PRUEBA. Comenzamos por estudiar el caso en que f y g son funciones no negativas. Se satisface entonces

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad x \in [a, b]. \tag{1.21}$$

En esta situación, la región R_f encerrada sobre el intervalo $[a, b]$ entre el gráfico de f y el eje Ox está contenida en la región R_g encerrada entre el gráfico de g y el eje Ox. Da la comparación entre las áreas de R_f y R_g resulta la desigualdad (1.20). Ver la figura 1.22.

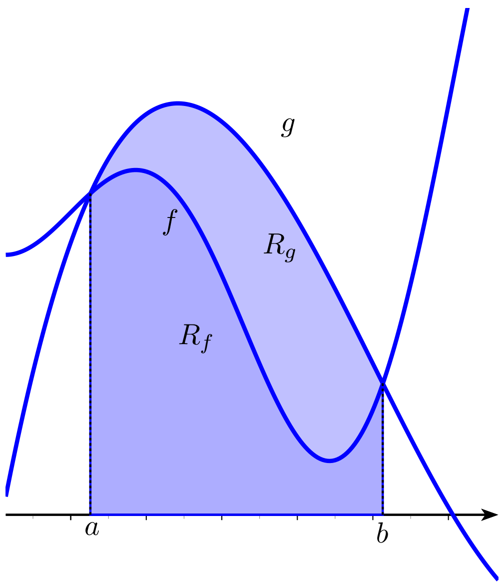

Figura 1.22

Cuando

$$f(x) \leq 0 \leq g(x), \quad x \in [a, b], \tag{1.22}$$

la integral de f es menor e igual que cero, la de g es mayor o igual que cero y la desigualdad (1.20) es obvia.

En la situación en que f y g toman valores menores o iguales que cero, se satisface

$$f(x) \leq g(x) \leq 0, \quad x \in [a, b], \tag{1.23}$$

lo que implica $R_g \subset R_f$ y el área de R_g es menor o igual que el área de R_f. Para funciones menores o iguales que cero la integral es el opuesto de las áreas, por lo tanto también en este caso se satisface (1.20).

En general, cuando sobre un intervalo $[a, b]$ dos funciones f y g satisfacen la relación de orden $f \leq g$, no puede asegurarse que ninguna de las posibilidades (1.21), (1.22) o (1.23) se satisfaga sobre todo $[a, b]$, porque la relación respecto al nivel 0 puede ir variando de un punto a otro. La figura 1.23 ilustra esta posibilidad.

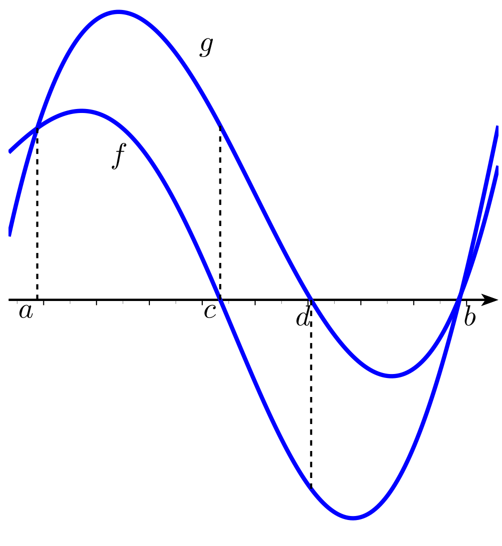

Figura 1.23

En un caso como el que ilustra la figura 1.23 descomponemos, usando la fórmula (1.3.3) de la proposición 1,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx.$$

Cada uno de los tres subintervalos $[a, c]$, $[c, d]$ y $[d, b]$ cae en uno de los casos que ya hemos analizado, por lo que podemos concluir

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx \le \int_a^c g(x)dx + \int_c^d g(x)dx + \int_d^e g(x)dx.$$

Una nueva aplicación de (1.3.3) nos permite reconocer en el segundo miembro la integral de g sobre $[a, b]$, observación que completa la prueba. $\square$.

Ejercicio 1.3.5 Mostrar que

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Determinar en qué casos se satisface la igualdad entre los dos miembros de la desigualdad.

Ejercicio 1.3.6 Dada una función real f definida sobre $\mathbb{R}$ y un número real x_0 cualquiera definimos una nueva función

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(s)ds.$$

1. Mostrar que para cualquier valor de x y $\Delta x > 0$ el incremento

   $$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$$

   de la función F satisface

   $$mh \le \Delta F \le Mh,$$

   donde m y M son, respectivamente, el valor mínimo y el valor máximo que toma f en el intervalo $[x, x + \Delta x]$.

2. Estudiar cómo se transforma el resultado anterior para $\Delta x < 0$ y $\Delta x = 0$.

3. Mostrar que, independientemente del signo de $\Delta x \neq 0$, se satisfacen las desigualdades

   $$m \le \frac{\Delta F}{\Delta x} \le M,$$

   donde m y M son, respectivamente, el valor mínimo y el valor máximo que toma f en el intervalo comprendido entre x y $x + \Delta x$.

4. Aplicar estos resultados al caso

   $$F(x) = \int_0^x f(s)ds,$$

   con $f(s) = s$, $x = 1$ y $\Delta x = \pm 1/4$. Interpretar geométricamente los resultados en los gráficos de f y F.

1.3.3. Homogeneidad y linealidad de la integral

El hecho de que dilatar un conjunto en una dirección por un factor $\alpha \ge 0$ multiplica por α su área, junto con las convenciones de signo para la integral, implica el siguiente resultado de *homogeneidad de la integral.*

Proposición 3 *Si α es un número real cualquiera y f una función, entonces*

$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx. \qquad (1.24)$$

Prueba. Si $a \leq b$ y $\alpha \geq 0$, la región R_f encerrada entre el gráfico de αf y el eje Ox se obtiene dilatando por un factor α en la dirección de Oy la región entre el gráfico de f y el eje Ox. Esta operación multiplica por α todas las áreas. Como $\alpha \geq 0$ la parte de R_f que estaba en el semiplano $y \geq 0$ se mantiene en ese semiplano, lo mismo ocurre con la parte en $y \leq 0$, por lo que también el área signada se ve multiplicada por α.

La figura 1.24 ejemplifica con una función f y su gráfico, y los gráficos de $2f$ y $-2f$.

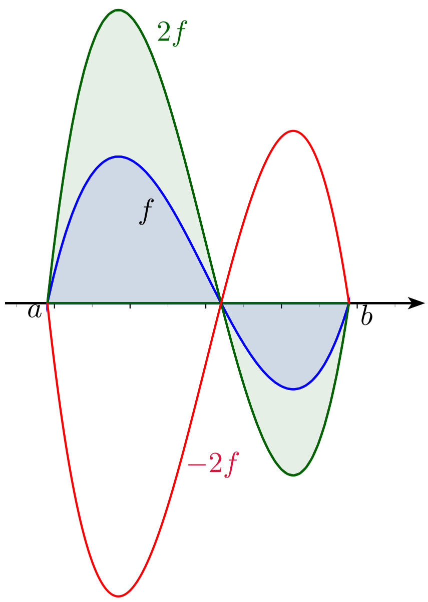

Figura 1.24

Completar la prueba resolviendo el ejercicio 1.3.7

Ejercicio 1.3.7

1. A partir de la definición de integral como área signada, mostrar la igualdad (1.24) cuando $a \leq b$ y $\alpha = -1$.
2. Usar el resultado de la parte anterior y la validez de (1.24) en el caso $\alpha \geq 0$ para mostrar que es válida para cualquier valor de α. Sugerencia, si $\alpha < 0$ entonces $\alpha = -1 \times |\alpha|$.
3. Mostrar que (1.24) es cierta también cuando $b < a$. □

La propiedad de homogeneidad de la integral suele presentarse junto a la siguiente propiedad de *aditividad*.

Proposición 4 *Sean f y g dos funciones, entonces*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \qquad (1.25)$$

No demostraremos aquí esta propiedad de aditividad en general, pero proponemos al lector demostrar que se cumple para las funciones constantes.

Ejercicio 1.3.8 Mostrar que para cualquier valor de los extremos de integración a y b y de las constantes c_1 y c_2 se satisface

$$\int_a^b (c_1 + c_2)dx = \int_a^b c_1 dx + \int_a^b c_2 dx.$$

Interpretar geoméetricamente este resultado.

Es usual combinar las proposiciones 3 y 4 en un único resultado de *linealidad de la integral*.

Proposición 5 *Sean f y g dos funciones definidas sobre el intervalo $[a,b]$ y α y β dos constantes cualesquiera. Entonces*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx. \tag{1.26}$$

Ejercicio 1.3.9 Mostrar la proposición 5 a partir de las proposiciones 3 y 4. Recíprocamente, mostrar que cada una de estas dos proposiciones puede deducirse de la proposición 5.

Ejercicio 1.3.10 Mostrar, haciendo explícitamente los cálculos, que para cualquier elección de los extremos de integración a y b y de las constantes α y β se tiene que

$$\int_a^b (\alpha x+\beta)dx = \alpha\int_a^b xdx + \beta\int_a^b dx.$$

La proposición 4 implica que la integral de una suma de funciones es la suma de las integrales. El resultado análogo para el producto de funciones es falso.

Ejercicio 1.3.11 Sean las funciones

$$f(x)=2, \quad g(x)=x, \quad h(x)=f(x)g(x).$$

Calcular

$$\int_0^3 h(x)dx, \quad \int_0^3 f(x)dx, \quad \int_0^3 g(x)dx$$

y comparar la integral de h con el producto de las integrales de f y g.

1.4. Dilataciones en la variable independiente y cálculo de integrales

En esta sección mostraremos cómo el efecto de la sencilla transformación de cambiar la variable x por la nueva variable ax, donde a es una constante, afecta al cálculo de integrales. El significado geométrico de este cambio es una dilatación del eje Ox cuando a es positivo, y una dilatación seguida de una simetría respecto al origen $x = 0$ cuando a es negativo. El efecto de estas transformaciones sobre las áreas de conjuntos del plano es fácil de evaluar y permite entonces relacionar el valor de las integrales de $g(x) = f(ax)$ con integrales de $f(x)$.

El siguiente ejercicio propone investigar la relación entre los gráficos de dos funciones $f(x)$ y $g(x) = f(cx)$, donde c es una constante.

Ejercicio 1.4.1 La figura 1 representa en el plano $(x.y)$ el gráfico de una función $f(x)$ en el plano (x, y) Identificar cuál de las figuras A, B, C o D representa el grafico de $g(x) = f(2x)$.

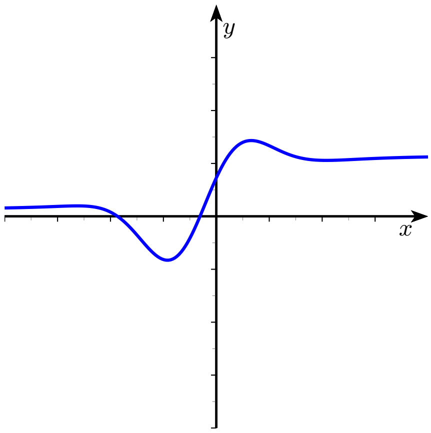

Figura 1

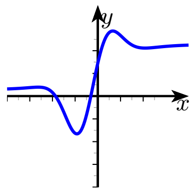

Figura A

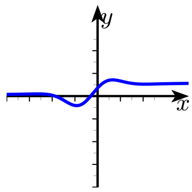

Figura B

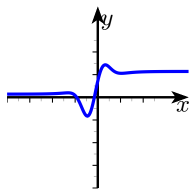

Figura C

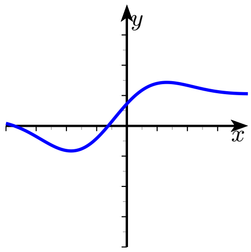

Figura D

Nos planteamos el cálculo de

$$\int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 f(2x)dx.$$

La integral es el área de la región R encerrada bajo el gráfico de g cuando x varía en el intervalo $[1, 2]$.

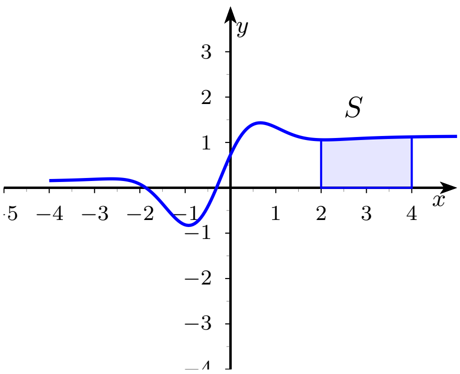

Figura 1.25. Grafica de f

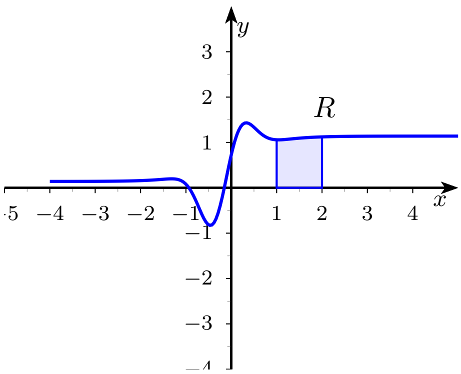

Figura 1.26.Gráfica de g

Por lo tanto $2x$ recorre el intervalo $[2,4]$, y la región encerrada bajo el gráfico de f que corresponde a R es la encerrada sobre el intervalo $[2,4]$, tal como se ilustra en la figura 1.25.

La correspondencia que lleva ahora de S a R es una dilatación por un factor de 2 en la dirección del eje Ox, por lo tanto el área de R es dos veces el área de S.

Concluimos

$$2\int_1^2 g(x)dx = 2\int_1^2 f(2x)dx = \int_2^4 f(x)dx,$$

por lo que

$$\int_1^2 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_2^4 f(x)dx \tag{1.27}$$

La siguiente proposición generaliza este resultado.

Proposición 6 *Si c es un número real cualquiera distinto de 0 y f una función, entonces*

$$\int_a^b f(cx)dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)dx. \tag{1.28}$$

Prueba. Comenzamos por analizar el caso en que c es mayor que 0 y $a \leq b$, en que la integral coincide con el área signada de una región del plano. Un punto (x,y) pertenece a la región R encerrada entre el eje Ox y el gráfico de $f(cx)$ si y sólo y cae en el intervalo entre 0 y $f(cx)$. Esto es equivalente a que (cx,y) pertenezca a la región S encerrada entre el eje Ox y el gráfico de $f(x)$. Por lo tanto, la región S es la que resulta de dilatar por un factor de c la primera coordenada de los puntos de R, y está encerrada bajo el gráfico de f en el intervalo $[ca, cb]$. En consecuencia, el área de S es c veces la de R. Concluimos entonces que

$$c\int_a^b f(cx)dx = \int_{ca}^{cb} f(x)dx.$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad entre c obtenemos (1.28)

Para contemplar los casos en que c es menor que 0 observamos que si $c<0$ entonces

$$c = -1 \times |c|,$$

y todo puede reducirse a una combinación adecuada del caso $c=-1$ con el caso $c>0$.

Ejercicio 1.4.2

1. Mostrar que el gráfico de $f(-x)$ resulta de simetrizar respecto al eje Oy el gráfico de f. Concluir que para cualquier intervalo $[a,b]$ y función f se satisface

$$\int_a^b f(-x)dx = -\int_{-a}^{-b} f(x)dx.$$

   Observar que esta igualdad es el caso particular de (1.28) para $c=-1$.

2. Para $a \leq b$ y $c<0$, combinar la primera parte de este ejercicio con la igualdad (1.28) aplicada a $|c|$ para concluir que (1.28) es válida.

El argumento para $c>0$ y el ejercicio 1.4.2 completan la prueba en el caso $a \leq b$. Si $a>b$ hacemos

$$\int_a^b f(cx)dx = -\int_b^a f(cx)dx = -\frac{1}{c}\int_{cb}^{ca} f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)dx. \qquad \square$$

Ejercicio 1.4.3 Si se sabe que

$$\int_{10}^{20} f(x)dx = 50,$$

entonces:

A. $\int_1^2 f(10x)dx = 50;$

B. $\int_1^2 f(10x)dx = 5;$

C. $\int_{10}^{20} f(10x)dx = 500;$

D. $\int_1^2 f(10x)dx = 500;$

E. $\int_{10}^{20} f(10x)dx = 5;$

Elegir la opción correcta.

Ejercicio 1.4.4 Si conocemos

$$\int_{10}^{20} f(x)\, dx = 1$$

entonces

A. $\int_{10}^{20} f(x/10)\, dx = 10;$

B. $\int_1^2 f(x/10)\, dx = 1;$

C. $\int_1^2 f(x/10)\, dx = 1/10;$

D. $\int_1^2 f(x/10)\, dx = 10;$

E. $\int_1^2 f(x/10)\, dx = 1.$

Pregunta 1 Para qué valor de a puede calcularse la integral

$$\int_0^a f(x)\, dx,$$

a partir del conocimiento de

$$\int_0^{12} f(3x)\, dx.$$

Si el valor de la primera integral es 1, ¿cuánto vale la segunda?

Ejercicio 1.4.5 Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *par* cuando se satisface

$$f(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mostrar que para cualquier número $a \geq 0$ se tiene que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Ejercicio 1.4.6 Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *impar* cuando se satisface

$$f(x) = -f(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para un número $a \geq 0$, ¿qué puede afirmarse de

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

cuando f es impar?

Ejercicio 1.4.7 La función $f(x)$ es par y

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2.$$

La función $g(x)$ es impar y

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 3.$$

Determinar el valor de

$$\int_{-1}^{1} (f(x) + g(x))\,dx.$$

Ejercicio 1.4.8 Sea f una función que verifica

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 8, \qquad \int_{-1}^{1} f(|x|)dx = 2.$$

Entonces, la integral

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx$$

toma el valor

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Ejercicio 1.4.9 Sea f una función par que satisface

$$\int_0^1 f(5x)dx = 3.$$

Determinar el valor de

$$\int_{-5}^{5} f(x)dx.$$

A. 0;

B. 6/5;

C. 6;

D. 15;

E. 30.

1.5. Traslaciones y cambios de variable lineales en las integrales

En esta sección mostraremos cómo el efecto de algunas transformaciones geométricas sencillas sobre las áreas de los conjuntos del plano permite deducir resultados interesantes para el cálculo de integrales.

1.5.1. Traslaciones en la variable independiente

Hay una relación geométrica muy sencilla entre el gráfico de una función f y el gráfico de una nueva función

$$g(x) = f(x + c),$$

que se obtiene a partir de f haciendo una traslación en la variable independiente. El siguiente ejercicio propone al lector explorar esta relación.

Ejercicio 1.5.1 La figura 1 representa en el plano (x, y) el gráfico de una función $y = f(x)$. Identificar cuál de las figuras A, B, C o D representa el grafico de $g(x) = f(x + 2)$.

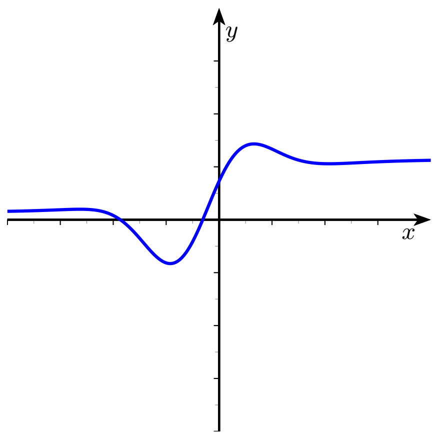

Figura 1

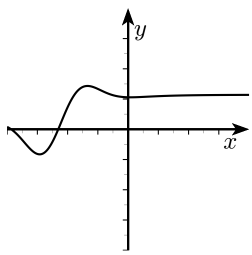

Figura A

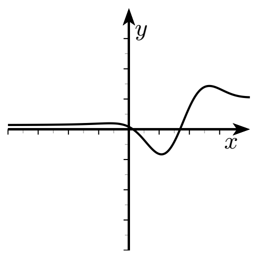

Figura B

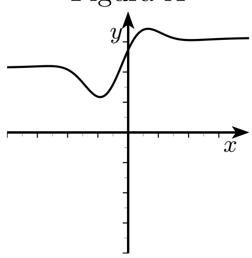

Figura C

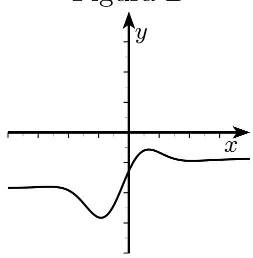

Figura D

Consideremos la el efecto que la traslación del ejercicio 1.5.1 produce en el cálculo de integrales. Nos planteamos el cálculo de

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x + 2)dx.$$

La integral es el área de la región R encerrada bajo el gráfico de g cuando la x varía en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto $x + 2$ recorre el intervalo $[2, 3]$, y la región encerrada bajo el gráfico de f que corresponde a R es la encerrada sobre el intervalo $[2, 3]$, tal como se ilustra en la figura1.27. Como R y S son regiones correspondientes en una traslación, tienen áreas iguales.

Concluimos entonces que

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x + 2)dx = \int_2^3 f(x)dx. \tag{1.29}$$

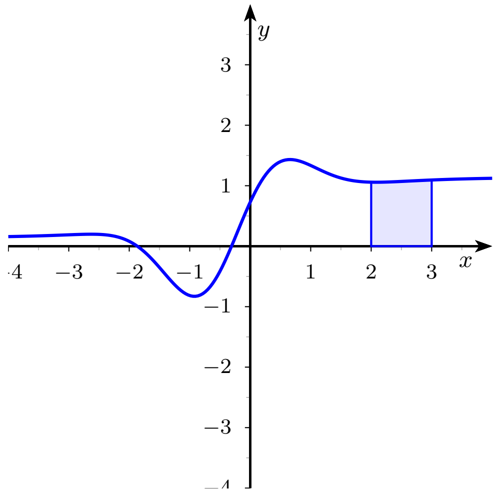

Figura 1.27. gráfico de f

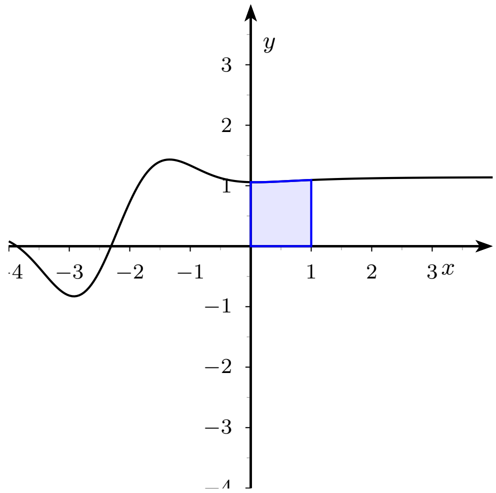

Figura 1.28. gráfico de g

El resultado anterior es un caso particular de nuestra próxima proposición.

Proposición 7 *Si c es un número real cualquiera y f una función, entonces*

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx. \tag{1.30}$$

Prueba. Un punto (x, y) pertenece a la región R encerrada entre el eje Ox y el gráfico de $f(x+c)$ si y sólo y cae en el intervalo entre 0 y $f(x+c)$. Esto es equivalente a que $(x+c, y)$ pertenezca a la región S encerrada entre el eje Ox y el gráfico de $f(x)$. Por lo tanto, la región S es la que resulta de trasladar c unidades R, en dirección horizontal, y está encerrada bajo el gráfico de f en el intervalo $[a+c, b+c]$. Las regiones R y S tienen igual área, porque se pasa de una a otra por medio de una traslación en el plano. □

Ejercicio 1.5.2 Si se sabe que

$$\int_1^2 f(x)dx = 5, \tag{1.31}$$

entonces puede concluirse que

1. $\int_1^2 f(x+7)dx = 5$;
2. $\int_8^9 f(x+7)dx = 5$;
3. $\int_{-6}^{-5} f(x+7)dx = 5$;
4. $\int_{-6}^{-5} f(x+7)dx = -5$;

Para cada una de las opciones falsas, dar un ejemplo en que no se cumpla la igualdad y uno en que sí se satisfaga.

Ejercicio 1.5.3 Una función f es periódica con período T si la igualdad

$$f(x+T) = f(x)$$

se satisface para todo x. Supondremos que f es una función periódica de período $T > 0$.

1. Mostrar que para cualquier elección de a y b se cumple

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Mostrar que para cualquier elección de a se cumple

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

   Concluir que entonces

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$$

   se satisface para cualquier elección de a y b.

Ejercicio 1.5.4 Sea f una función periódica de período T tal que

$$\int_0^T f(x))dx = 3.$$

Calcular

$$\int_T^{3T} f(x)dx.$$

Pregunta 2 Sea f una función periódica de período 2 tal que

$$\int_0^2 f(x)dx = -5$$

y g una función periódica de período 3 tal que

$$\int_0^3 g(x)dx = 7.$$

Calcular el valor de la integral

$$\int_0^{24} (f(x) + g(x))\, dx.$$

1.5.2. Transformaciones lineales en la variable independiente

De las proposiciones 7 y 6 se desprende directamente nuestra siguiente proposición.

Proposición 8 *Si $c \neq 0$ y d son dos números reales cualesquiera,*

$$\int_a^b f(cx+d)dx = \frac{1}{c}\int_{ca+d}^{cb+d} f(x)dx. \tag{1.32}$$

Ejercicio 1.5.5 Demostrar la proposición 8 combinando adecuadamente las proposiciones 7 y 6.

Observación 5 La fórmula (1.32) puede verse como una fórmula de cambio de variable en la integral del miembro de la izquierda, en términos de una nueva variable

$$y = cx + d.$$

Observemos que cuando x varía entre a y b la variable y lo hace entre $ca + d$ y $cb + d$, según el siguiente esquema

x	y
a	$ca + d$
b	$cb + d.$

Es sugerente entonces escribir (1.32) en la forma más sugerente

$$\int_a^b f(cx + d)dx = \frac{1}{c}\int_{ca+d}^{cb+d} f(y)dy.$$

El cambio de notación en el miembro de la derecha es irrelevante, pero pretende captar la idea de pensar en esta fórmula como una fórmula de cambio de variable. El factor de c que aparece dividiendo en el miembro de la derecha puede verse como el efecto de la variación relativa de la variable x respecto a la variable y. Una teoría general de este tipo de cambios de variable se presentará en la sección PONER REFERENCIA del capítulo PONER REFERENCIA. Allí se muestra desde otro ángulo la justificación de ese factor $1/c$. ♣

Ejemplo 17 Podemos calcular directamente la integral

$$\int_0^3 (2x + 1)dx, \tag{1.33}$$

como el área de un trapecio de base 3 y alturas 1 y 7, sobre $x = 0$ y $x = 3$, respectivamente. El resultado es

$$3 \times \frac{1 + 7}{2} = 12.$$

Podemos introducir la variable $y = 2x + 1$ y usar aplicar la fórmula (1.32) para escribir

$$\int_0^3 (2x + 1)dx = \frac{1}{2}\int_1^7 ydy.$$

Evaluamos la integral en el miembro de la derecha como

$$(7 - 1) \times \frac{1 + 7}{2} = 24.$$

El factor $1/2$ delante de la integral hace que volvamos a obtener para la integral (1.33) el mismo resultado 12 que ya conocíamos. ♣

Esta posibilidad de hacer cambios de variable es útil para el cálculo de integrales algo más complejas.

Ejemplo 18 Para calcular

$$\int_3^6 e^{\frac{x}{3}-1}dx, \tag{1.34}$$

introducimos

$$y = \frac{x}{3} - 1$$

y hacemos
$$\int_3^6 e^{\frac{x}{3}-1}dx = 3\int_0^1 e^y dy = 3e - 3.$$
La operación reduce el cálculo al de una integral en la que aparece la función exponencial en su forma más sencilla. Para la última igualdad usamos resultados de la sección 3.3 del capítulo 3. ♣

Ejercicio 1.5.6 Expresar la integral
$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi - 3\pi x)dx$$
como una integral de la forma
$$c\int_a^b \operatorname{sen} y dy$$
para una elección adecuada de las constantes a, b y c.

Ejercicio 1.5.7 Sabiendo que f es una función periódica de período 4 tal que $\displaystyle\int_{-2}^{10} f(x)\,dx = 15$, determine el valor de la integral
$$\int_1^9 (f(x+1) + f(2x))\,dx.$$

A. 20.

B. 25.

C. 30.

D. 50.

1.5.3. Ejercicios

Ejercicio 1.5.8 Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $f(x+4) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se sabe que
$$\int_0^{99} f(x)\,dx = 7 \qquad \text{y} \qquad \int_0^{499} f(x)\,dx = 32.$$
Entonces el valor de la integral
$$\int_0^4 f(x)\,dx$$
es igual a:

A. 1.

B. $\dfrac{1}{4}$.

C. $-\dfrac{1}{4}$.

D. $-\dfrac{3}{4}$.

Ejercicio 1.5.9 Sea f una función periódica de período 2 tal que

$$\int_0^2 f(x)dx = -5$$

y g una función periódica de período 3 tal que

$$\int_0^3 g(x)dx = 7.$$

Determinar el valor de la integral

$$\int_0^{24} (f(x) + g(x))\, dx.$$

Ejercicio 1.5.10 Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ tal que

$$f\,(x+3) = f\,(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se sabe que

$$\int_0^{400} f\,(x)\, dx = 200 \qquad \text{y} \qquad \int_{297}^{397} f\,(x)\, dx = 100.$$

Entonces el valor de la integral

$$\int_0^3 f\,(x)\, dx$$

es igual a:

A. $\frac{3}{4}$.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 3.

Ejercicio 1.5.11

1. ¿Qué valor toma la integral

$$\int_a^b f(cx)dx$$

cuando $c = 0$?

2. ¿Es cierto que cuando c se aproxima a 0 las expresiones

$$\frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)dx.$$

aproximan el valor hallado en la parte 1?

Ejercicio 1.5.12 Sean f y g dos funciones periódicas de período 2, tales que f es par, g es impar y satisfacen

$$\int_0^1 f(x)dx = -7 \qquad \int_0^1 g(x)dx = 11.$$

Determinar el valor de

$$\int_{-1}^{2} (5f(x) - 2g(x))\, dx.$$

A. -83;

B. -61;

C. -105;

D. -12;

E. -32.

Pregunta 3

1. Indicar cuál de las siguientes igualdades es necesariamente correcta para cualquier función f y cualquier elección de a y b.

   a) $\int_a^b f(-x)dx = \int_b^a f(x)dx$

   b) $\int_a^b f(-x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

   c) $\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$

   d) $\int_a^b f(-x)dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)dx$

   e) $\int_a^b f(-x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

2. Para las igualdades restantes, dar ejemplos de elecciones de f, a y b, para las que se satisfagan (elegir ejemplos tan generales y sofisticados como sea posible).

Ejercicio 1.5.13 Se sabe que

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 8. \tag{1.35}$$

Hallar el valor de a para el que

$$I = \int_0^3 f(ax)\,dx$$

puede determinarse a partir del dato (1.35). Para ese valor de a calcular la integral I.

Ejercicio 1.5.14 Sean f y g dos funciones periódicas de período 2, tales que f es par, g es impar y satisfacen

$$\int_0^1 f(x)dx = 7 \qquad \int_0^1 g(x)dx = -11.$$

Determinar el valor de

$$\int_{-1}^2 (5f(x) - 2g(x))\,dx.$$

A. 83;

B. 61;

C. 105;

D. 12;

E. 32.

Ejercicio 1.5.15 Si f es una función impar, identificar cuáles de las siguientes igualdades son correctas.

-
- $\int_a^b f(-x)dx = \int_b^a f(x)dx$;
- $\int_a^b f(-x)dx = \int_a^b f(x)dx$;
- $\int_a^b f(-x)dx = 0$;
- $\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$;
- $\int_a^b f(-x)dx = \int_{-a}^{-b} f(x)dx$;
- $\int_a^b f(-x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Los siguientes dos ejercicios exploran cómo el estudio de nuevas transformaciones del plano permite extraer conclusiones sobre las integrales de funciones en la forma de potencia

$$f(x) = x^\alpha,$$

donde α es un exponente positivo. Comenzamos explorando el caso $\alpha = 2$ en el ejercicio 1.5.16. En el ejercicio 1.5.17 exploramos la generalización a otros valores de α.

Ejercicio 1.5.16 Para un número $a > 0$ consideramos la transformación del plano (x, y) en sí mismo definida por

$$T_a(x, y) = (ax, a^2 y).$$

1. Para a igual a $1/2$, 2 y 4 dibujar la imagen por T_a del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, del rectánculo $[1, 2] \times [1, 3]$ y del círculo definido por $(x - 2)^2 - (y - 3)^2 \leq 1$.
2. Si una región R del plano (x, y) tiene área A, Â¿cuál es el área de la imagen de R por T_a?
3. Mostrar que la imagen por T_a del gráfico de la función $f(x) = x^2$ es el propio gráfico. Â¿Significa esto que T_a transforma cada punto del gráfico en sí mismo?
4. Mostrar que para cualquier valor de $x > 0$ se tiene
$$\int_0^x t^2\,dt = x^{2+1} \int_0^1 t^2\,dt. \tag{1.36}$$
Sugerencia: para $a = x$, transformar usando T_a la región
$$\left\{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\right\}.$$
5. Investigar si la fórmula (1.36) es válida también para $a \leq 0$. Si no lo es, hacer las adaptaciones necesarias al miembro de la derecha para conseguir una expresión correcta de la integral.
6. Obtener la fórmula (1.36) como una consecuencia de la proposición **??**.

Ejercicio 1.5.17 Generalizar el ejercicio 1.5.16 para cualquier valor positivo de α.

El cálculo de integrales de la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

conduce a los logaritmos neperianos. Los próximos dos ejercicios exploran con argumentos geométricos la relación entre ambas funciones. La presentación tiene algunos puntos de contacto con algunos hitos del desarrollo histórico del cálculo a lo largo del siglo XVII.

Ejercicio 1.5.18 Para un número $a > 0$ consideramos la transformación del semiplano

$$S = \{(x, y); x > 0\}$$

del plano (x, y) en sí mismo, definida por

$$T_a(x, y) = (ax, y/a).$$

1. Para a igual a 1/2, 2 y 4 dibujar la imagen por T_a del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, del rectánculo $[1, 2] \times [1, 3]$ y del círculo definido por $(x - 2)^2 - (y - 3)^2 \leq 1$.
2. Si una región R de S tiene área A, Â¿cuál es el área de la imagen de R por T_a?
3. Mostrar que la imagen por T_a del gráfico de la función

   $$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

   es el propio gráfico. Â¿Significa esto que T_a transforma cada punto del gráfico en sí mismo?
4. Concluir de las partes anteriores que para cualquier valor de $a > 0$ se tiene

   $$\int_1^b \frac{dx}{x} = \int_a^{ab} \frac{dx}{x}. \tag{1.37}$$

5. Volver a obtener la igualdad (1.37), ahora como una consecuencia de la proposicion **??**.
6. Usar la fórmula (1.37) para mostrar que para cualquier pareja de números $a > 0$ y $b > 0$, se tiene que

   $$\int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^b \frac{dx}{x}.$$

7. Para $x > 0$ definimos

   $$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

   Mostrar que F tiene las siguientes dos propiedades:

   a) $F(xy) = F(x) + F(y)$;

   b) $F(1) = 0$.

   Â¿Qué tipo de funciones tienen esta propiedad?

Ejercicio 1.5.19 Consideremos la función F del ejercicio anterior. Mostrar que

1. F es estrictamente creciente;

2. $\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$ (sugerencia: considerar las áreas de los rectángulos $[1,2]\times[0,1/2]$, $[2,4]\times[0,1/4]$, $[4,8]\times[0,1/8]$, etcétera);

3. $\lim_{x\to 0} F(x) = -\infty$ (sugerencia: adaptar la elección de los rectángulos sugerida para la parte anterior);

4. Si $y = F(x)$ definimos la función G por la igualdad $x = G(y)$. Mostrar que esta operación de “despejar la x” define una función

$$G : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

tal que

   a) $G(x+y) = G(x)G(y)$;
   b) $G(0) = 1$.

5. Hallar los límites de G cuando $x \to \pm\infty$.

1.6. Integrales de funciones lineales

Con la expresión *funciones lineales* nos referimos a funciones de la forma

$$f(x) = ax + b, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.38}$$

donde a y b son dos constantes. La denominación para este tipo de funciones está justificado porque su gráfico es una línea recta en el plano (x, y). La sencilla geometría que tiene el gráfico de estas funciones permite abordar el cálculo de sus integrales con métodos de la geometría elemental. Al mismo tiempo, ofrecen suficiente variedad de comportamientos como para que su estudio sea interesante y puedan modelar una cierta variedad de situaciones.

1.6.1. Estudio de un ejemplo particular

Nuestra estrategia para abordar el estudio de las integrales de funciones lineales será comenzar por un ejemplo, para luego generalizar sus características más importante. Para distintos valores de x calcularemos

$$F(x) = \int_2^x \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt. \tag{1.39}$$

El integrando en (1.39) es la función

$$f(t) = \frac{5}{2} - \frac{t}{2} \tag{1.40}$$

cuyo gráfico aparece en la Figura 1.29.

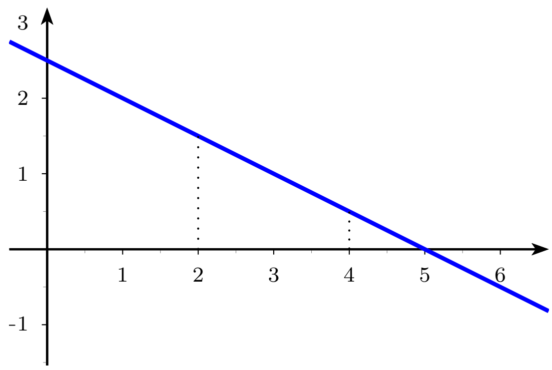

Figura 1.29.El gráfico de $\frac{5}{2} - \frac{t}{2}$

Ejemplo 19 Comenzamos por evaluar la integral

$$\int_2^5 \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt.$$

El integrando es positivo en el intervalo $[2, 5]$ y se anula en $t = 5$, de modo que esta integral es simplemente igual al área del triángulo que aparece destacado en la Figura 1.30.

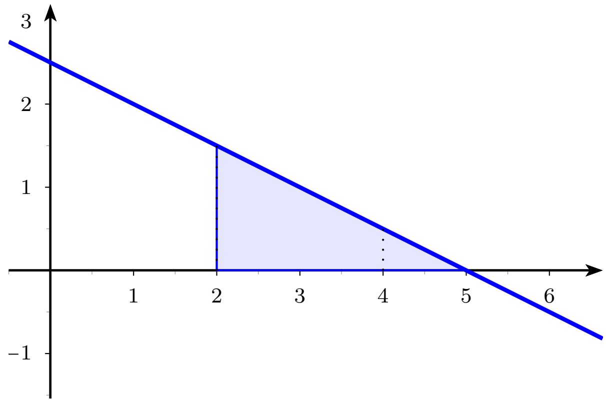

Figura 1.30.El triángulo definido por f sobre el intervalo $[2, 5]$

La base del triángulo tiene longitud

$$5 - 2 = 3$$

y su altura es

$$f(2) = \frac{5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto

$$\int_2^5 \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

Observación 6 Si pensamos la integral (1.39) como una función de su extremos superior de integración, el valor que acabamos de calcular es $F(5)$. Lo usaremos más adelante como verificación de un cálculo general. ♠♣

Ejemplo 20 Algo más interesante es el cálculo de

$$\int_2^4 \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt.$$

En este caso hay que evaluar el área del trapecio que mostramos en la Figura 1.31.

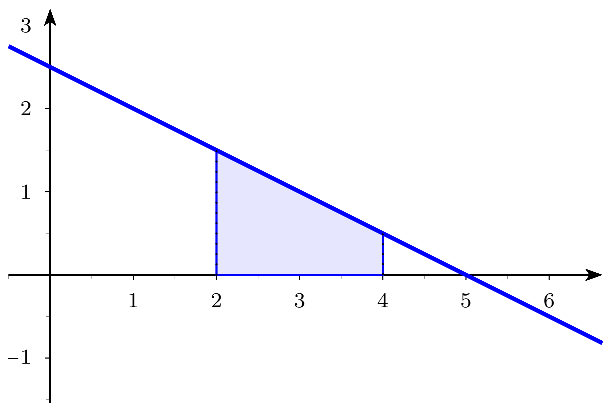

Figura 1.31.El trapecio definido por f sobre el intervalo $[2, 4]$

La base del trapecio mide

$$4 - 2 = 2,$$

en tanto que sus alturas son

$$f(2) = \frac{3}{2}, \quad f(4) = \frac{5}{2} - \frac{4}{2} = \frac{1}{2},$$

de modo que el área del trapecio es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\times 2 = 2.$$

Este número es el valor de la integral.

Ejercicio 1.6.1 Evaluar la integral de f entre 4 y 5 y verificar que es igual a la diferencia de la integral entre 2 y 5 menos la integral entre 2 y 4. ♣

El cálculo que hemos hecho para los valores particulares $x = 5$ y $x = 4$ puede hacerse esencialmente de la misma manera para todo x entre 2 y 5. En todo este intervalo la integral (1.39) es el área de un trapecio que tiene como base el intervalo $[2, x]$. La longitud de la base es $x - 2$. La altura del trapecio sobre 2 es

$$f(2) = \frac{3}{2}.$$

La altura sobre x es

$$f(x) = \frac{5}{2} - \frac{x}{2}.$$

El área del trapecio es

$$\begin{aligned} F(x) =& \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-\frac{x}{2}\right)(x-2) = \frac{1}{2}\left(4-\frac{x}{2}\right)(x-2) \\ =& \frac{(8-x)(x-2)}{4}. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Podemos quedarnos con esta expresión para $F(x)$ o hacer los productos para escribirlo en la forma tradicional de presentarlo como un polinomio. Encontramos

$$F(x) = \frac{-x^2+10x-16}{4} = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - 4. \tag{1.42}$$

Observación 7 VERIFICACIONES. La definición de F implica que $F(2) = 0$. En la forma factorizada (1.41) se hace evidente que al sustituir x por 2 se obtiene el valor 0. En (1.42) ya no esta obvio, pero la cuenta

$$F(2) = -\frac{1}{4}\times 2^2 + \frac{5}{2}\times 2 = 0,$$

arroja el resultado que esperamos.

Ya habíamos calculado $F(5) = 9/4$ en el ejemplo 19. La fórmula (1.53) arroja el valor

$$F(5) = -\frac{1}{4}5^2 + \frac{5}{2}5 - 4 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 4 = \frac{25}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4},$$

en acuerdo con nuestro cálculo previo.

Ejercicio 1.6.2 Verificar el valor $F(4)$. ♠♣

Cuando x es menor que 2 el cálculo de la integral (1.39) todavía implica evaluar el área de un trapecio. Pero como el extremo superior de la integral es menor que el inferior, la integral toma un valor negativo, igual al opuesto del área.

Ejemplo 21 Calcularemos la integral

$$\int_2^1 \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = -\int_1^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt.$$

La integral del miembro de la derecha es el área del trapecio encerrado bajo el gráfico de f entre 1 y 2:

$$1 \times \frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{4}.$$

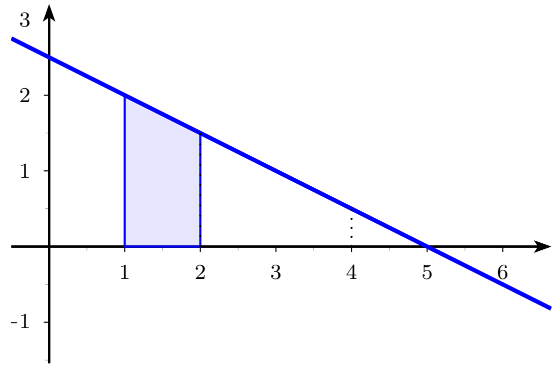

Figura 1.32.El trapecio para la integral entre 2 y 1

Por lo tanto,

$$\int_2^1 \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = -\frac{7}{4}.$$

Para el caso general con $x < 2$ tenemos que evaluar el área de un trapecio con el intervalo $[x, 2]$ como base que tiene longitud $2 - x$. El área del trapecio que tenemos que considerar es entonces

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} - \frac{x}{2}\right)(2 - x).$$

Pero $F(x)$ es justamente el opuesto de esta área, por la convención según la cual

$$\int_2^x f(t)dt = -\int_x^2 f(t)dt.$$

Tenemos entonces

$$F(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} - \frac{x}{2}\right)(2 - x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} - \frac{x}{2}\right)(x - 2). \tag{1.43}$$

Observemos el hecho notable de que esta fórmula es exactamente la misma fórmula (1.52). El formalismo del cálculo integral es tal que maneja bien los signos y asigna correctamente el valor a la integral. Cuando cambia el signo de la diferencia $x - 2$ entre los dos extremos de la base del trapecio encerrado bajo el gráfico de la función, también tiene que cambiar el signo de la integral.

Observación 8 Al desarrollar (1.43) volveremos a obtener la expresión

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - 4$$

para $x \leq 2$. Podemos verificar esta expresión con nuestro cálculo anterior para el valor de la integral en $x = 1$.

$$F(1) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{16}{4}\Big|_{x=1} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{2} - \frac{16}{4} = \frac{-1 + 10 - 16}{4} = -\frac{7}{4}. \tag{1.44}$$

Reencontramos el resultado que ya conocíamos. ♠

Cuando $x \geq 5$ la geometría de la situación cambia: la evaluación de la integral requiere el cálculo de áreas de dos triángulos diferentes. Uno de ellos está por encima del eje horizontal, el otro por debajo. Escribimos

$$F(x) = \int_2^x \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = \int_2^5 \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt + \int_5^x \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right), dt.$$

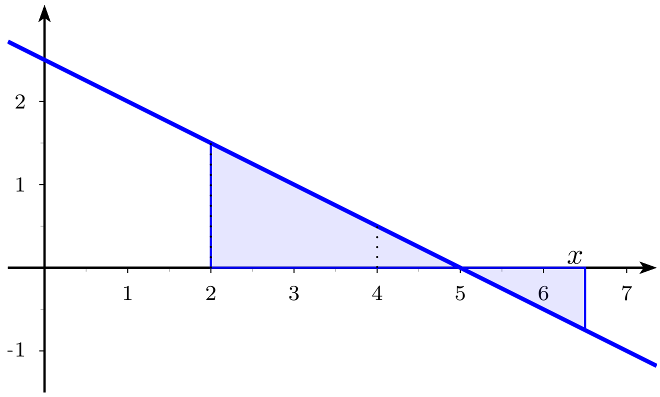

Figura 1.33.

El primer sumando del miembro de la izquierda es justamente

$$F(5) = \frac{9}{4},$$

de modo que

$$F(x) = \frac{9}{4} + \int_5^x \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt, \quad x \geq 5. \tag{1.45}$$

La integral en el miembro de la derecha se evalúa determinando el área del triángulo. La base es el intervalo $[5, x]$ que tiene longitud $x - 5$. La altura del triángulo está determinado por el valor $5/2 - x/2$ que la función toma en x. Como este número es negativo en el intervalo en que estamos trabajando, ya tiene en cuenta el signo que hay que asignar al área según la definición de integral. Por lo tanto

$$\int_5^x f(t)dt = \frac{1}{2}(x-5)\left(\frac{5}{2} - \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x - \frac{25}{4}. \tag{1.46}$$

Usando esta expresión en (1.45) encontramos

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{16}{4}, \tag{1.47}$$

que es exactamente la misma fórmula que aparece en (1.53).

Observación 9 No es una casualidad que las fórmulas (1.53) y (1.47) contengan la misma expresión para F. Aunque en $x = 5$ se produce un cambio en la geometría de la situación, la convención acerca del signo con el que deben tomarse las áreas en el cálculo de integrales hace que no se vea ningún tipo de singularidad en las fórmulas. En el ejercicio 1.6.3, página 55 se discute esto con detalle.

1.6.2. La forma general de la integral de funciones lineales

El objetivo de esta sección es mostrar que cualquier integral de funciones lineales, de la forma

$$\int_x^y (at+b)dt,$$

donde a y b son constante y x e y números cualesquiera, puede evaluarse por la fórmula,

$$\int_x^y (at+b)dt = \frac{1}{2}(ax+ay+2b)(y-x), \tag{1.48}$$

que es una generalización de la fórmula del área del trapecio, consistente. con la convenciones de signos que hemos adoptado para la integral. Equivalentemente, también por

$$\int_x^y (at+b)dt = \frac{ay^2}{2} - \frac{ax^2}{2} + by - bx, \tag{1.49}$$

que puede obtenerse directamente de (1.48), operando.

Ejercicio 1.6.3 Mostrar que, en la situación de la figura 1.34, siempre se tiene que

$$\frac{(b-a)h}{2} + \frac{(c-b)j}{2} = (c-a)\frac{h+j}{2}.$$

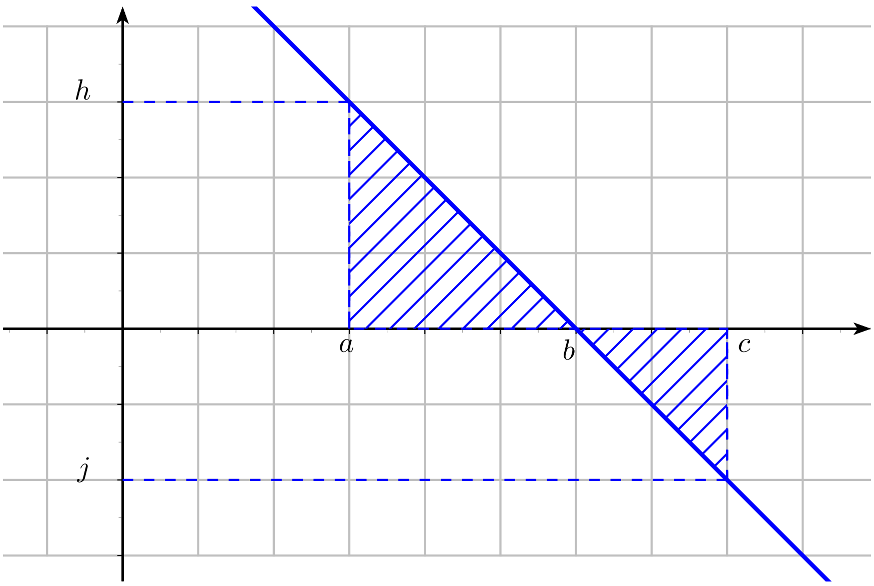

Figura 1.34.

Observar que el miembro de la derecha en la fórmula del ejercicio 1.6.3 tiene la misma forma que el cálculo del área de un trapecio de base $c-a$ y alturas h y j. Esta fórmula no tiene sentido como área de un trapecio, porque j es negativa, pero sí lo tiene cuando tomamos áreas con signos en el contexto del cálculo de integrales. El ejercicio viene a decirnos que podemos manejar una situación como la que aparece en la figura 1.33 con las mismas fórmulas que usamos para el trapecio de la figura 1.35.

Ejercicio 1.6.4 Mostrar la validez de la fórmula (1.48) para cualquier elección de a, b, x e y.

Ejercicio 1.6.5 Mostrar que la fórmula (1.48) puede escribirse como

$$\int_x^y (at+b)dt = \left(a\left(\frac{x+y}{2}\right)+b\right)(y-x).$$

Interpretar el miembro de la derecha como el área de un rectángulo. ¿Cómo está construido ese rectángulo?

Ejercicio 1.6.6 Mostrar que para cualquier valor de x se tiene que

$$F(x) = \int_2^x \left(\frac{5}{2}-\frac{t}{2}\right) dt = \int_2^5 \left(\frac{5}{2}-\frac{t}{2}\right) dt + \int_5^x \left(\frac{5}{2}-\frac{t}{2}\right) dt = \frac{9}{4}-\frac{1}{4}(x-5)^2.$$

1. Interpretar geométricamente este resultado.
2. Hallar el valor máximo que alcanza $F(x)$ y el punto x en que lo alcanza.
3. Hallar todos los puntos en que $F(x)$ toma el valor 1.
4. Hallar todos los puntos en que $F(x)$ toma el valor 3.

Ejercicio 1.6.7 Definimos

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x (1+t)dt.$$

1. Calcular una fórmula explícita para $F(x)$.
2. Hallar todos los puntos en que $F(x)$ se anula.
3. Hallar el valor mínimo m y el valor máximo M que F toma en el intervalo $[-5,-2]$ y los valores de x en que se alcanzan.
4. Encontrar un valor x_0 que permita escribir

   $$F(x) = \int_{x_0}^x (1+t)dt.$$

   Interpretar geométricamente el resultado.

Ejercicio 1.6.8 Definimos

$$G(x) = \int_1^x (1+t)dt.$$

1. Calcular una fórmula explícita para $G(x)$.
2. Hallar todos los puntos en que $G(x)$ se anula.
3. Calcular la diferencia $G(x)-F(x)$ con la función del ejercicio 1.6.7. Interpretar geométricamente el resultado hallado.

1.7. Integrales de funciones lineales a trozos

En esta sección discutiremos con cierto detalle las propiedades de la función

$$F(x) = \int_2^x \left(\frac{t}{4} + \frac{7}{4} - \frac{3}{4} |1-t| \right) dt, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.50}$$

En particular, se hallará su gráfico, se buscarán los valores en que F toma valores seleccionados y se estudiarán problemas de máximos y mínimos sobre intervalos.

Pasamos a calcular ahora fórmulas y algunos valores funcionales destacados para $F(x)$, apuntando a construir gráficos de la función y a poder resolver problemas de hallar extremos y raíces.

Teniendo en cuenta que

$$|1-t| = \begin{cases} 1-t, & \text{si } t \le 1, \\ t-1 & \text{si } t \ge 1, \end{cases}$$

podemos expresar f en la forma

$$f(t) = \begin{cases} t+1, & \text{si } t \le 1, \\ -\frac{t}{2} + \frac{5}{2}, & \text{si } t \le 1. \end{cases} \tag{1.51}$$

Los detalles de este cálculo están desarrollados en la página 10, de la sección A.1 y culminan en la fórmula A.6. En cualquier caso, recomendamos al lector verificar que es capaz de reproducirlos por su cuenta y de hacer todas las verificaciones necesarias para asegurarse de que el resultado es correcto.

1.7.1. Cálculo de la integral

El caso $1 \le x$

Para $2 \le x \le 5$, la integral es igual al área del trapecio que destacamos en la figura 1.35

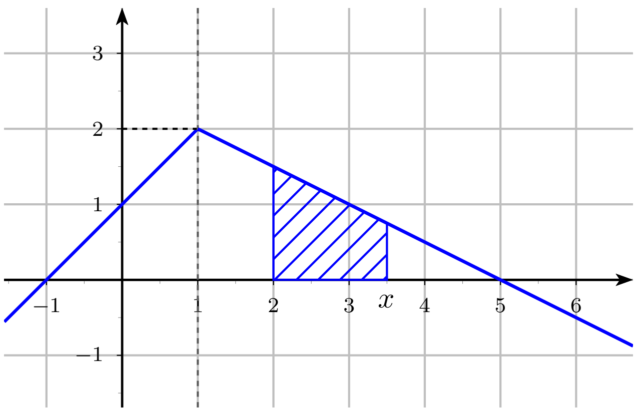

Figura 1.35.

La base del trapecio es el intervalo $[2, x]$, que tiene longitud $x - 2$. La altura del trapecio sobre 2 es

$$f(2) = \frac{3}{2}.$$

La altura sobre x es

$$f(x) = \frac{5}{2} - \frac{x}{2}.$$

El área del trapecio es

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-\frac{x}{2}\right)(x-2) = \frac{1}{2}\left(4-\frac{x}{2}\right)(x-2) = \frac{(8-x)(x-2)}{4}. \tag{1.52}$$

Haciendo las cuentas

$$F(x) = \frac{-x^2+10x-16}{4} = -\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x-4. \tag{1.53}$$

Observación 10 VERIFICACIONES. La definición de F implica que

$$F(2) = 0.$$

La geometría del problema hace fácil calcular

$$F(5) = \frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{2} = \frac{9}{4},$$

que es el área de un triángulo. Sustituimos en la fórmula (1.53),

$$\begin{aligned} F(2) &= -\frac{1}{4}2^2+\frac{5}{2}2-4 = -1+5-4 = 0; \\ F(5) &= -\frac{1}{4}5^2+\frac{5}{2}5-4 = -\frac{25}{4}+\frac{25}{2}-4 \\ &= \frac{25}{4}-\frac{16}{4} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Aunque ya no se trata exactamente del área de un trapecio, la fórmula (1.53) es válida para la integral entre 2 y x de la función lineal

$$-\frac{t}{2}+\frac{5}{2}, \tag{1.54}$$

para cualquier valor de x (ver la sección 1.6), por lo que es válida para la integral de $F(x)$ para $x \geq 1$, porque sobre todo el intervalo $[2, x]$ la función $f(t)$ coincide con la expresión (1.54).

Cerramos esta sección haciendo el cálculo de

$$F(1) = -\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{16}{4}\Big|_{x=1} = -\frac{1}{4}+\frac{5}{2}-\frac{16}{4} = \frac{-1+10-16}{4} = -\frac{7}{4}. \tag{1.55}$$

Tranquiliza verificarlo evaluando el área del trapecio encerrado bajo el gráfico de f entre 1 y 2:

$$1\times\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{7}{2} = \frac{7}{4}.$$

Resta multiplicar por -1 el valor del área, en función de la convención de signo para la integral. De modo que el resultado en (1.55) es correcto.

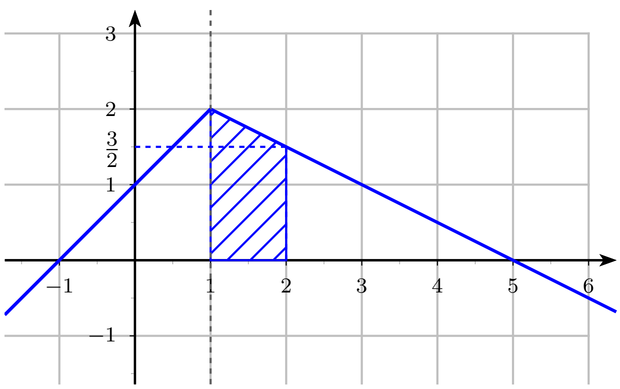

Figura 1.36.

El caso $x \leq 1$

Usando la igualdad

$$\int_2^x f(t)dt = \int_2^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt$$

escribimos

$$F(x) = F(1) + \int_1^x f(t)dt.$$

Ya habíamos calculado

$$F(1) = -\frac{7}{4}.$$

Sabemos además que para $x \leq 1$ vale la igualdad

$$f(x) = 1 + x, \qquad x \leq 1.$$

Por lo tanto

$$F(x) = -\frac{7}{4} + \int_1^x (1+t)dt.$$

Evaluamos la integral del miembro de la derecha usando la fórmula del "área del trapecio", que ya hemos observado que es válida para la integral, incluso cuando nuestras convenciones de signo hacen que no estemos calculando realmente áreas:

$$\int_1^x (1+t)dt = \frac{1}{2}(x-1)(2+1+x) = \frac{1}{2}(x-1)(3+x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}.$$

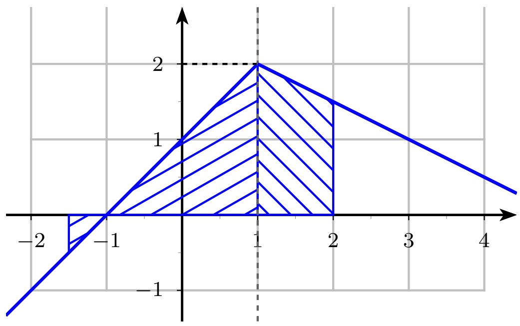

Figura 1.37.

Por lo tanto

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{13}{4} \tag{1.56}$$

A modo de resumen, podemos escribir

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{13}{4}, & \text{si } x \leq 1; \\ -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{5}{2}x - \dfrac{16}{4}, & \text{si } x \leq 1; \end{cases} \tag{1.57}$$

1.7.2. Crecimiento y decrecimiento

Ya hemos determinado algunos valores particulares de la función F:

x	$F(x)$
1	$-\frac{7}{4}$
2	0
5	$\frac{9}{4}$

.

Conocerlos, permite ubicar en el plano (x, y) algunos puntos del gráfico de F.

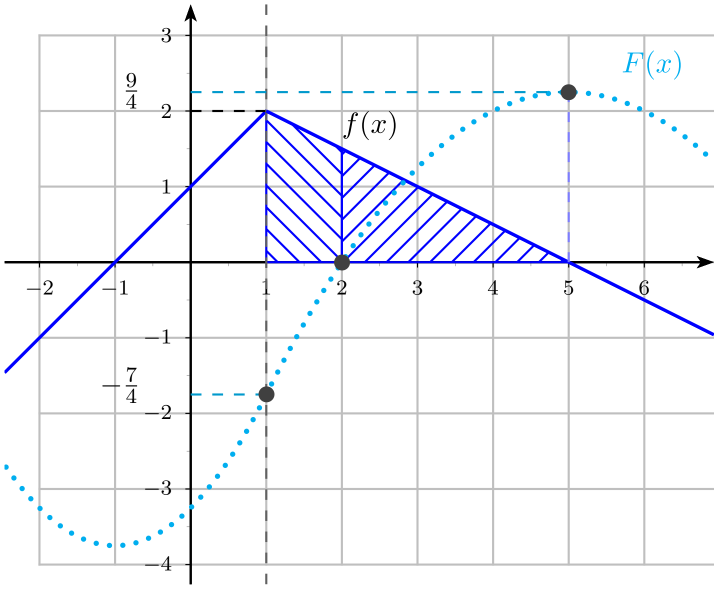

Figura 1.38.

Para continuar construyendo el gráfico podríamos seguir calculando puntos y dibujando. De hecho, calculando una cantidad suficientemente alta de puntos puede conseguirse un gráfico de muy buena calidad. Esto es algo que una computadora logra en menos de un segundo, especialmente cuando se dispone de fórmulas explícitas como (1.57). Nosotros usaremos un procedimiento diferente, más apropiado para un ser humano, por el que trataremos de entender algunos rasgos esenciales del gráfico.

La primera observación es que $F(x)$ es creciente en los intervalos en que $f(x)$ es positiva, y decreciente cuando $f(x)$ es negativa. Observemos que

$$F(5) > F(2). \tag{1.58}$$

La razón es que la integral va 'acumulando' el área signada que vamos encontrando bajo el gráfico de f, y la diferencia entre $F(5)$ y $F(2)$ es

$$F(5) - F(2) = \int_2^5 f(t)dt.$$

Como en el intervalo $[2, 5]$ la función f está por encima del eje Ox y encierra un área positiva, resulta la desigualdad (1.58).

Este argumento es completamente general: para dos valores a y b cualesquiera vale

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt,$$

y puede razonarse igual que hicimos para $a = 2$, $b = 5$: si $a < b$ y f es positiva entre a y b, entonces $F(b) > F(a)$. Si f es negativa entre a y b, también la integral será negativa y $F(b) < F(a)$.

Observación 11 Además del signo de la variación, podemos conjeturar con qué velocidad está variando F: cuando f es muy grande, la función F varía rápido. La razón es que las áreas encerradas bajo el gráfico son esencialmente del orden de magnitud del tamaño del intervalo sobre el que se integra, por el tamaño de la función. Desarrollaremos este estudio con detalle cuando analicemos la derivada F' de la función F.

Esta discusión, sugiere que ubiquemos sobre el gráfico de F los puntos que corresponden a valores de x en que f cambia de signo, porque allí está cambiando el crecimiento de F. Ya conocíamos $F(5)$. Calculamos entonces

$$F(-1) = \frac{(-1)^2}{2} - 1 - \frac{13}{4} = -\frac{15}{4}.$$

Con los puntos que conocemos, el conocimiento de que para $x < -1$ la función F es decreciente, creciente entre -1 y 5 y luego nuevamente decreciente, ya podemos esbozar el gráfico de F. Como las fórmulas para F son polinomios de segundo grado, sabemos además que se trata de dos arcos de parábola. El esquema aparece en la figura 3.90

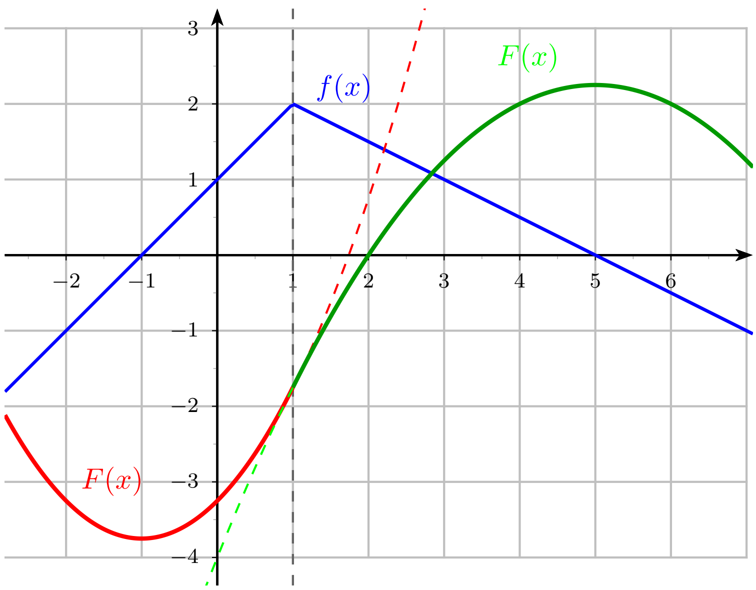

Figura 1.39.

Es interesante escribir la función F para $x \geq 1$ en términos de sus incrementos desde su valor $F(5)$. Estos incrementos corresponden geométricamente en áreas de triángulos, figuras especialmente simples que dan lugar a fórmulas simples. Escribimos entonces

$$F(x) = F(5) + \int_5^x f(t)dt = F(5) + \int_5^x \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}\right) dt, \quad x \geq 1.$$

La integral es fácil de evaluar, como el área (signada) de un triángulo con $(5,0)$ como uno de su vértices, como ya lo hicimos en 1.46 y reescribimos:

$$\int_5^x \left(\frac{5}{2}-\frac{t}{2}\right) dt = \frac{1}{2}(x-5)\left(\frac{5}{2}-\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{4}(x-5)^2.$$

Concluimos

$$F(x) = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}(x-5)^2, \quad x \geq 1. \tag{1.59}$$

Naturalmente, esta fórmula es exactamente la misma que la segunda fórmula en (1.57), pero ordenada de una manera diferente. Observemos que el cuadrado aparece restando de $9/4$ y solo se anula en $x=5$, lo que hace evidente que en $x=5$ esta expresión alcanza un máximo que vale $9/4$.

Hemos obtenido la expresión (1.59) por medio de un argumento geométrico: escribiendo la integral desde un punto en que el cálculo se simplificaba al cálculo de áreas de triángulos. Esto produjo una forma simple, en forma de una constante más un cuadrado. Notablemente, este mismo resultado puede conseguirse con argumentos puramente algebraicos, a partir de la técnica de *completar cuadrados*, que permite escribir cualquier expresión de la forma ax^2+bx+c como una suma de cuadrados.

Sabemos que

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{13}{4}, \quad x \leq 1.$$

Escribimos

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x - \frac{13}{2}\right), \quad x \leq 1$$

para trabajar a partir una expresión con coeficiente uno en x^2. Como

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

sumamos y restamos 1 para hacer aparecer este cuadrado perfecto:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 1 - 1 - \frac{13}{2}\right) = \frac{1}{2}\left((x+1)^2 - \frac{15}{2}\right), \quad x \leq 1.$$

Un poco más de manipulaciones, en busca de la sencillez de la fórmula, conduce a

$$F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{15}{4}, \quad x \leq 1, \tag{1.60}$$

en la que $F(x)$ aparece escrito como la suma de $-15/4$ (su valor en -1) más un coeficiente por el cuadrado de la diferencia entre x y -1. Para $x \leq 1$, el sumando con el cuadrado es exactamente la integral entre -1 y x de f, como el lector podrá verificar,

Por este procedimiento encontramos que F tiene en $x=-1$ un mínimo local, y una forma sencilla que hace fácil construir la gráfica de F para $x \leq 1$.

Ejercicio 1.7.1

1. Reencontrar la fórmula (1.59) usando para $x \geq 5$ el procedimiento de completar cuadrados que nos permitió hallar la fórmula (1.60).

2. Obtener la fórmula (1.60) usando para $x \leq 1$ el mismo argumento geométrico, de evaluar el área de un trapecio como la diferencia de áreas de dos triángulos, que empleamos para hallar la fórmula (1.59).

1.7.3. Ceros de F y otros valores destacados

Cuando el estudio de una función viene de algún problema práctico, suele ser interesante responder la pregunta de dónde alcanza la función cierto valor prefijado. Comenzaremos por determinar los puntos en que F se anula.

La construcción de F implica que F se anula en $x = 2$. Una rápida inspección al gráfico de la función F nos permite hallar prácticamente sin calcular otra raíz: para $x \geq 1$ el gráfico de f tiene simetría respecto al punto $(5, 0)$. El valor del área del triángulo bajo el gráfico de f entre 2 y 5, es igual al valor del área del triángulo encerrado entre el gráfico de f y el eje Ox entre 5 y 8, pero este nuevo triángulo está por debajo del eje. Esperamos entonces que $F(8)$ sea igual a 0. Evaluando en $x = 8$ la fórmula para F válida en $x \geq 5$, obtenemos

$$F(8) = -\frac{8^2}{4} + \frac{5}{2} \times 8 - \frac{16}{4} = -16 + 20 - 4 = 0.$$

No puede haber ya más raíces de F a la derecha de 1, porque una fórmula cuadrática a lo sumo puede originar dos raíces, y ya las hemos encontrado.

Busquemos ahora las raíces a la izquierda de 1. Igualamos

$$F(x) = 0,$$

usando la expresión

$$F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{15}{4}, \quad x \leq 1.$$

El hecho de que en esta fórmula la x solo aparezca dentro del cuadrado simplificará las cosas. Planteamos

$$\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{15}{4} = 0,$$

que es equivalente a

$$(x+1)^2 = \frac{15}{2}.$$

Tomando raíz resulta

$$x + 1 = \pm\sqrt{\frac{15}{2}},$$

por lo que

$$x = -1 \pm \sqrt{\frac{15}{2}}. \tag{1.61}$$

La raíz cuadrada de $15/2$ es aproximadamente igual a 2,74. De las dos determinaciones de x en (1.61), la que corresponde al signo de $+$ es mayor que 1, y cae fuera del rango en que la fórmula con la que estamos trabajando tiene validez para F. De modo que F tiene una tercera raíz en

$$x = -1 - \sqrt{\frac{15}{2}} \simeq -3,84,$$

y ya no hay otras raíces, aparte de 2 y 8.

Ejercicio 1.7.2 Hallar todos los valores de x en que F

1. toma el valor $-13/4$.
2. toma el valor $9/4$.

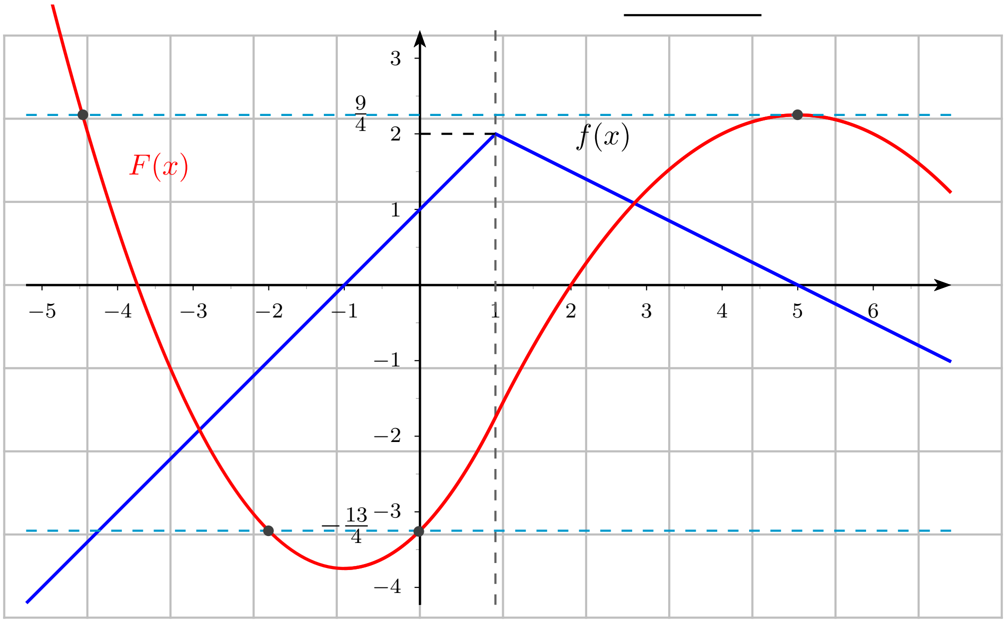

Figura 1.40.

Otro problema interesante asociado con una función es ubicar sus valores mínimo y máximo en un intervalo dado, y los puntos donde estos valores extremos se alcanzan. Vamos a buscar el valor mínimo m y el valor máximo M para F, en el intervalo $[-6, 6]$. Los extremos pueden estar ubicados en $x = -1$ o $x = 5$, en que la función F tiene extremos relativos producidos por su cambio de crecimiento, o en los extremos del intervalo. Un rápido análisis nos avisa que $F(6)$ no aportará gran cosa. Antes de empezar a calcular, ya sabemos que

$$F(-1) < 0 < F(6) < F(5), \tag{1.62}$$

por lo que no puede haber allí un extremo.

Ejercicio 1.7.3 Calcular $F(6)$ y comprobar a través de un examen directo que las desigualdades en (1.62) son verdaderas.

Sabemos que $F(-6)$ es mayor que $F(-1)$. De modo que el mínimo es

$$m = F(-1) = -\frac{15}{4},$$

y se alcanza solo en $x = -1$.

Solo nos resta comparar $F(-6)$ con $F(5)$ para ver cuál de ellos es mayor. Evaluamos

$$F(-6) = \frac{1}{2}(-6+1)^2 - \frac{15}{4} = \frac{25}{2} - \frac{15}{4} = \frac{35}{4}.$$

Como

$$F(-6) = \frac{35}{4} > \frac{9}{4} = F(5),$$

concluimos que el máximo de la función en $[-6, 6]$ es

$$M = \frac{35}{4},$$

y se alcanza en $x = -6$, el extremo izquierdo del intervalo.

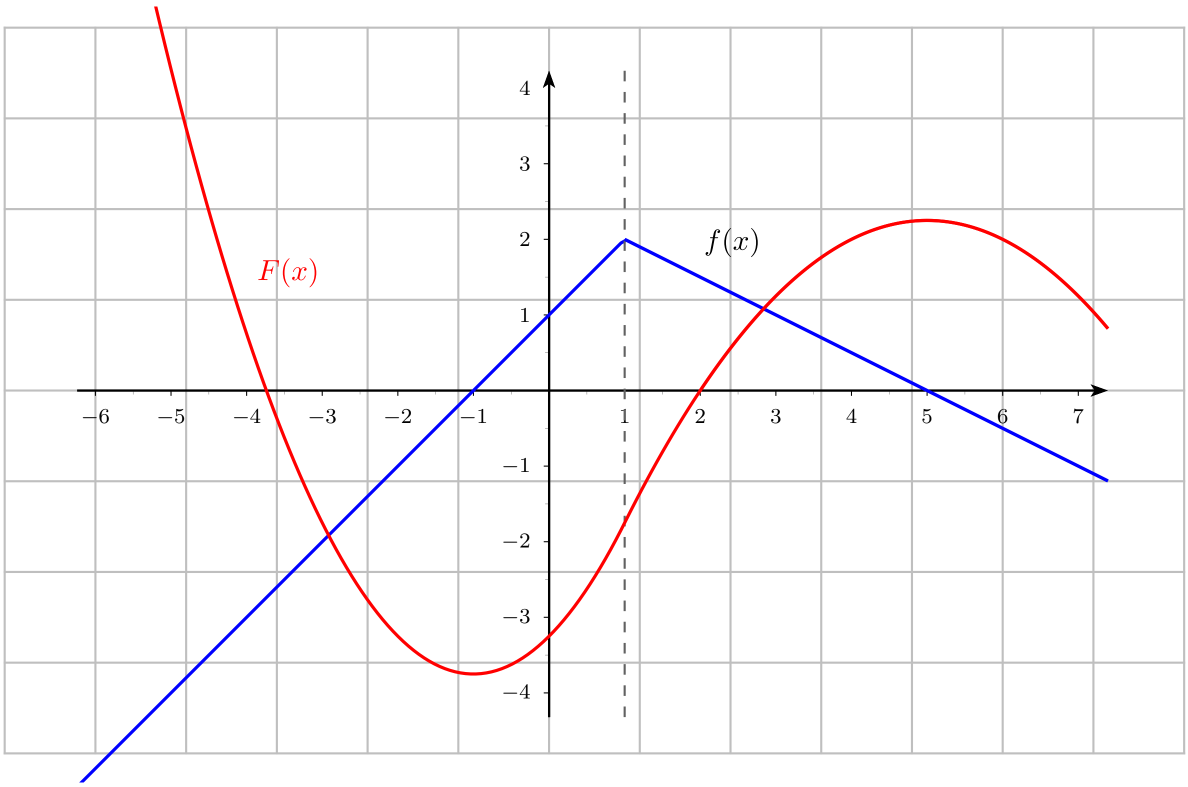

Figura 1.41.

Ejercicio 1.7.4 Hallar el menor valor natural de b que haga que el mínimo de F en el intervalo $[-6, b]$ esté en b. Para ese valor, hallar el valor del mínimo.

Ejercicio 1.7.5 Hallar los valores de la constante c que hacen que

$$G(x) = c + F(x)$$

tenga exactamente dos raíces. Para cada uno de los valores de c hallados, calcular las dos raíces de G.

1.7.4. Ejercicios

Ejercicio 1.7.6 Para la función f cuyo gráfico se representa en la figura 1.42,

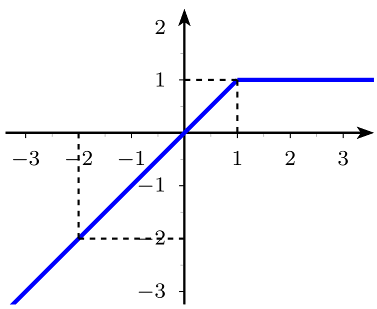

Figura 1.42.

calcular la integral

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx.$$

Ejercicio 1.7.7 1. Para la función cuyo gráfico está representado en la Figura 1.43 y para cada valor de $x \in \mathbb{R}$, calcular

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

2. Graficar $F(x)$.

3. Mostrar que para cualquier valor de las constantes a y b se satisfacen las igualdades

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Interpretar geométricamente este resultado.

4. Calcular la pendiente del gráfico de F. ¿Cómo se relaciona esta pendiente con la función f?

5. Repetir las partes 1 a 3 para la función que se representa en la figura 1.44. ¿Qué nueva situación se encuentra ahora cuando se intenta considerar para esta función la pregunta que se plantea en la parte 4? ¿Qué ocurre cuando se intenta determinar **la** pendiente del gráfico de F?

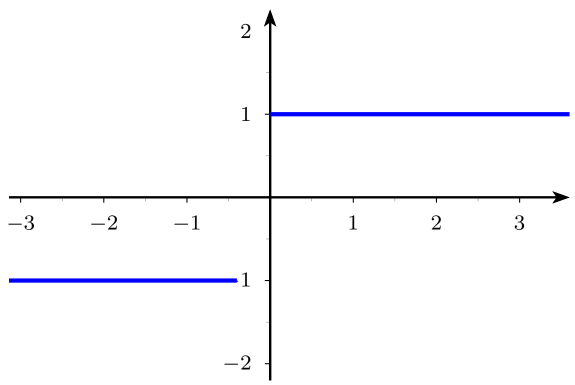

Figura 1.43.

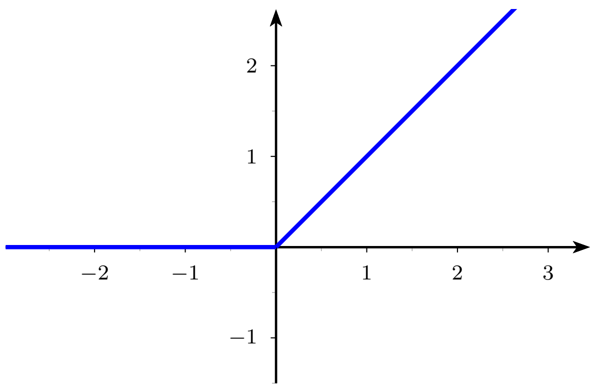

Figura 1.44.

Ejercicio 1.7.8

Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} t+3, & t \leq 1, \\ 1-t, & t \geq 1, \end{cases}$$

1. Calcular

$$\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt, \qquad \int_{-2}^{0} f(t)\,dt, \int_{-2}^{2} f(t)\,dt.$$

2. Definimos

$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt.$$

Calcular

$$F(2), \quad F(0), \quad F(-1), \quad F(-2).$$

3. Para $x \leq -1$, calcular $F(x)$.

4. Para $x \geq -1$, calcular $F(x)$.

5. La función F, ¿es continua en $x = -1$?

6. Hallar todos los valores de x en que $F(x)$ se anula.

Ejercicio 1.7.9 Sea f la función cuyo gráfico aparece en la figura 1.45.

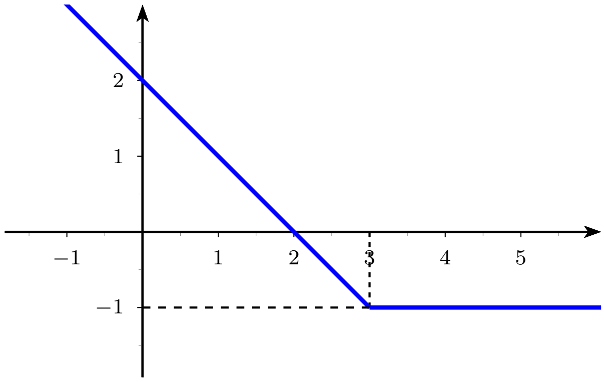

Figura 1.45.

Hallar el valor mínimo m y el valor máximo M que la función

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

toma en el intervalo $[-1, 9]$.

Ejercicio 1.7.10

1. Para $x \in [0, 4]$, calcular la función

$$F(x) = 10 + \int_0^x (-5)dt.$$

   Dibujar el gráfico de F sobre el intervalo $[0, 4]$.

2. Una barra recta de 4 m de longitud apoyada en sus extremos soporta una carga distribuida de 5 daN/m. Está equilibrada por reacciones verticales de 10 daN en cada uno de sus dos apoyos. Calcular el cortante en cada punto x de la barra, donde x indica la distancia en metros a su extremo izquierdo. Graficar el cortante.

3. La trayectoria de un móvil que se desplaza sobre una línea recta se describe por medio de una coordenada p que indica su posición relativa a un cierto origen O desde el que se mide p. El valor de p es positivo cuando el móvil está a la derecha del origen, y negativo cuando está a la izquierda. Si el móvil parte de una posición inicial $p(0) = 10$ m y retrocede durante 4 segundos con una velocidad de -5 m/s (las velocidades son negativas cuando retrocede y positivas cuando avanza), hallar la función $p(t)$ que describe la posición p en función del tiempo t para $t \in [0, 4]$. Graficar p sobre este intervalo.

4. Comparar entre sí las tres partes anteriores de este ejercicio.

Ejercicio 1.7.11

1. Para $x \in [0,10]$, calcular la función

$$F(x) = \int_0^x 3t\,dt.$$

   Dibujar el gráfico de F sobre el intervalo $[0,10]$.

2. Una barra recta de 10 m de longitud está empotrada en su extremo de la derecha y recibe desde abajo una presión que va creciendo linealmente a medida que nos alejamos del extremo de la barra, de un modo tal que la pieza queda sometida a un esfuezo distribuido de $3x$ daN/m, que la empuja hacia arriba (la situación es irreal como problema de cálculo de estructuras, pero nos ayudará a ilustrar el punto que pretendemos mostrar con estos ejemplos) . Calcular el cortante en cada punto x de la barra, donde x indica la distancia en metros a su extremo izquierdo. Graficar el cortante. ¿Cuál tiene que ser la reacción vertical del empotramiento, para equilibrar la carga de la barra?

3. Un móvil parte del reposo en una posición inicial $p(0) = 0$ m y durante 10 segundos avanza acelerándose de manera constante, de modo que en el instante t su velocidad es de $3t$ m/s. Hallar la función $p(t)$ que describe la posición p en función del tiempo t para $t \in [0,10]$. Averiguar a que distancia está del origen cuando $t = 10$.

4. Comparar entre sí las tres partes anteriores de este ejercicio.

Ejercicio 1.7.12 Para las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x/2 - 3, & x < 4, \\ x - 5, & x \geq 4, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x < 4, \\ x, & x \geq 4, \end{cases}$$

calcular las funciones

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt; \quad G(x) = \int_0^x g(t)\,dt,$$

y graficarlas.

Ejercicio 1.7.13 Calcular la integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} |1 - x|\,dx.$$

Respuesta: A. $-\dfrac{15}{8}$. B. $\dfrac{15}{8}$. C. $\dfrac{17}{8}$. D. $\dfrac{55}{8}$.

Ejercicio 1.7.14

1. Graficar la función

$$f(t) = 2 - |t + 1|.$$

   En particular, identificar los puntos en que se anula, las regiones en que es positiva y en que es negativa.

2. Definimos

$$F(x) = \int_{-2}^{x} (2 - |t+1|)\ dt.$$

3. Hallar para cada $x \in \mathbb{R}$ una expresión que permita calcular $F(x)$.

4. Identificar cuál es el punto de $[0, +\infty)$ en que F alcanza su valor máximo. Calcular ese valor, por dos procedimientos:

   a) interpretando los valores de F como áreas signadas e identificando cuál es el área que hay que calcular para resolver estar parte del ejercicio;

   b) evaluando la integral en el valor de x adecuado, usando el resultado de la parte 3.

5. Hallar todos los valores de x en que $F(x)$ se anula.

La *parte positiva* x_+ y la *parte negativa* x_- de cada número real x están definidas por las fórmulas

$$x_+ = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0; \\ x, & \text{si } x \geq 0; \end{cases} \qquad x_- = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 0; \\ 0, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Prestar especial atención al hecho de que la parte negativa de un número es siempre mayor o igual que 0.

Ejercicio 1.7.15 Repetir el ejercicio 1.7.7 para las funciones f y g definidas por $f(x) = x_+$ y $g(x) = x_-$.

Ejercicio 1.7.16 Hallar el valor mínimo m y el valor máximo M que la función

$$F(x) = \int_{0}^{x} ((t-3)_- - 1)\ dt$$

toma en el intervalo $[-1, 9]$.

La función signo, que indicaremos con el símbolo sgn, está definida por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ejercicio 1.7.17 Repetir el ejercicio 1.7.7 para la función sgn. La función F que se obtiene ahora, ¿es continua o discontinua en $x = 0$? ¿Y la función sgn? ¿De qué manera se refleja en la función F el comportamiento de sgn cerca de $x = 0$? ¿Qué nueva situación se encuentra ahora cuando se considerara la pendiente del gráfico de F?

Ejercicio 1.7.18 Sea $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ la función cuya gráfica se presenta en la figura 1.46 siguiente.

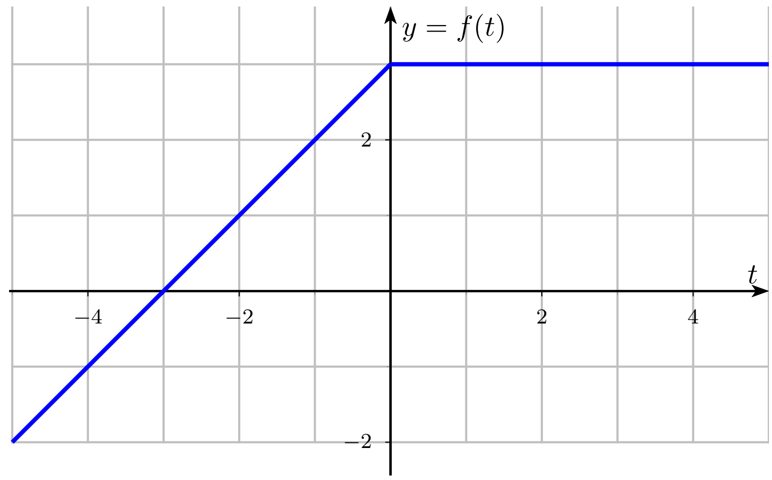

Figura 1.46.

Ejercicio 1.7.19 Para $x \in [-5, 5]$, definimos

$$F(x) = \int_2^x f(t)\ dt.$$

1. En $x = -1$ la función F toma el valor

   a) $-8,5$.
   b) 1.
   c) 2.
   d) $8,5$.

2. El valor mínimo que alcanza la función F es

   a) 0.
   b) -2.
   c) $-10,5$.
   d) $-18,5$.

3. La ecuación $F(x) = -10$ se verifica

   a) para ningún valor de x.
   b) únicamente para $x = -2$.
   c) únicamente para $x = -2$ y $x = -4$.
   d) únicamente para $x = -13$

Ejercicio 1.7.20 La UTE factura el consumo según el siguiente esquema:

- Cobra una tasa de de \$ 100 por la conexión.
- Cobra \$2 el Kilovatio-hora, hasta un consumo de 100 Kilovatios-hora.
- Cobra \$3 cada Kilovatio-hora que se consuma por encima de los 100 Kilovatios-hora.

Indicar cuál de las siguientes cuatro figuras contiene el gráfico que corresponde al importe a pagar por el usuario, en función del consumo. En el eje horizontal aparecen los consumos representados en Kilovatios-hora, en el eje vertical los importes a pagar.

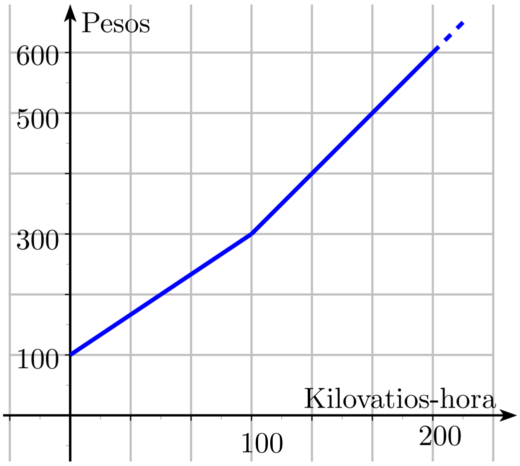

Figura A

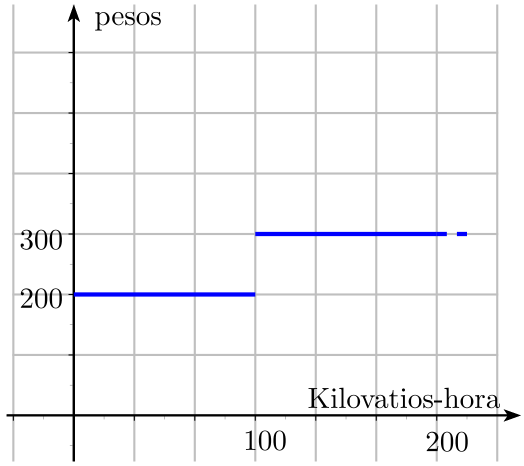

Figura B

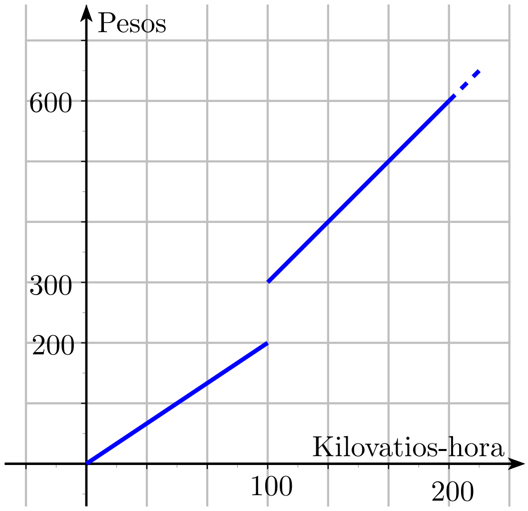

Figura C

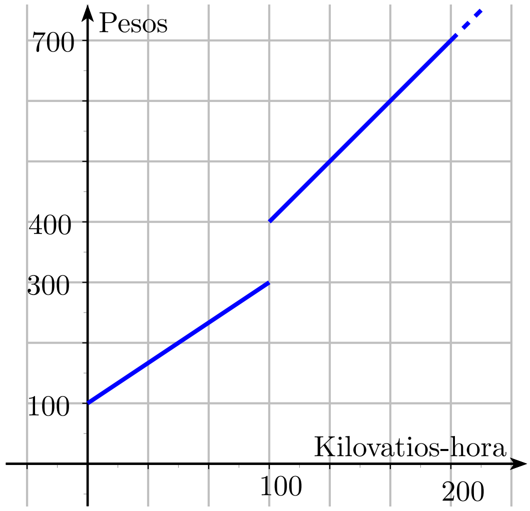

Figura D

A. Figura A.

B. Figura B.

C. Figura C.

D. Figura D.