Apéndice A

Funciones y gráficas

A.1. Valor absoluto y funciones continuas lineales a trozos

Los propósitos de esta sección son:

1. repasar la noción de *valor absoluto* y la función real asociada con ella;

2. discutir cómo graficar algunas funciones definidas por fórmulas en las que aparecen valores absolutos de expresiones lineales.

Los requisitos previos para la lectura son cierta familiaridad con las funciones lineales definidas por fórmulas de la forma

$$f(x) = ax + b,$$

donde a y b pueden ser constantes cualesquiera, y sus gráficos en el plano (x, y).

A.1.1. Valor absoluto

El *valor absoluto* de un número cada $x \in \mathbb{R}$ se indica por el símbolo $|x|$, y está definido por

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 0; \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{A.1}$$

Ejemplo 156 El valor absoluto de 3 es $|3| = 3$. El valor absoluto de -1 es $|-1| = -(-1) = 1$.

Observación 56 Podría objetarse a la fórmula (A.1) que parece dar dos definiciones diferentes del valor absoluto para $x = 0$, que sería preferible escribir

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0; \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Como $0 = -0$, cualquiera de las dos expresiones coincide en asignar el valor 0 a $|0|$, por lo que no se genera ninguna contradicción. Preferimos (A.1) porque nos recuerda que $|x|$ coincide con $-x$ cuando $x \leq 0$, y con x cuando $x \geq 0$. En $x = 0$ simplemente ocurre que x, $-x$ y $|x|$ toman el mismo valor. ♠

Para calcular el valor absoluto de expresiones más complejas, como, por ejemplo

$$\left|\frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{16}\right|$$

operamos de la manera habitual con los números afectados por la barra de valor absoluto:

$$\left|\frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{16}\right| = \left|\frac{3}{4} - \frac{35}{16}\right| = \left|\frac{12}{16} - \frac{35}{16}\right| = \left|-\frac{23}{16}\right|.$$

Por último, tomamos la decisión que corresponda, dependiendo del signo que tenga el resultado de las operaciones anteriores. En este caso es negativo, por lo tanto

$$\left|\frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{16}\right| = \left|-\frac{23}{16}\right| = -\left(-\frac{23}{16}\right) = \frac{23}{16}.$$

Cuando todo es tan explícito como en este ejemplo, el último paso de tomar el opuesto de un número negativo resulta bastante obvio, por lo que es corriente escribir simplemente

$$\left|\frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{16}\right| = \left|-\frac{23}{16}\right| = \frac{23}{16}.$$

La última igualdad aparece a la vista como "sacar" las barras de valor absoluto, pero en realidad lo que se está haciendo es aplicar la definición de esta función.

Ejercicio A.1.1 Calcular
$$-\frac{5}{3}-1-\left|2\times\left(-\frac{5}{3}\right)+3\right|.$$

A.1.2. La función valor absoluto y su gráfico

Tal como indica la fórmula (A.1), el valor absoluto puede calcularse para cualquier número real x y produce un nuevo número real $|x|$. De modo que esta operación define una función real de variable real. Ampliando un poco el uso de la expresión valor absoluto, llamaremos a esta función la función *valor absoluto*[1].

Para graficar el valor absoluto recurrimos a la definición. Sabemos que
$$|x|=x,\quad x\geq 0;\qquad |x|=-x,\quad x\leq 0.$$

Los gráficos de x y $-x$ son sencillos.

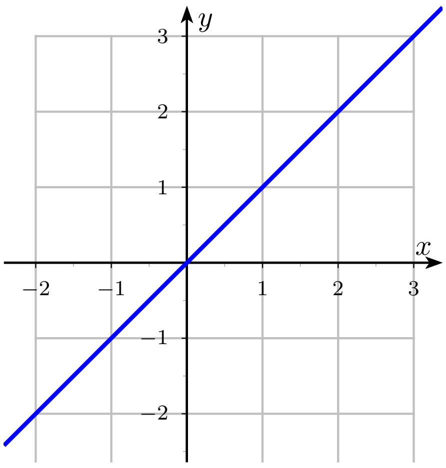

Gráfico de x

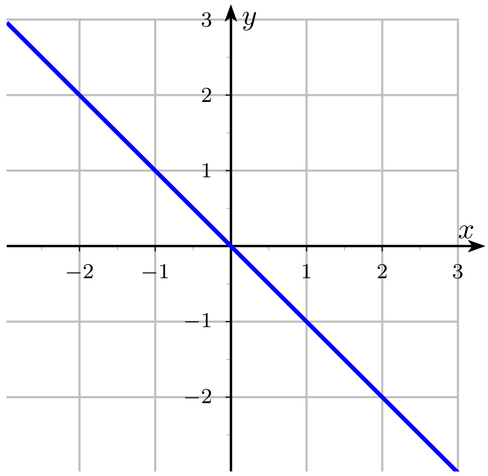

Gráfico de $-x$

Naturalmente, del primero de ellos sólo nos interesa la información para $x\geq 0$, que es la región en que $|x|$ coincide con x. Del segundo, la información para $x\leq 0$. Combinando ambas podemos construir el gráfico de la función valor absoluto.

El resultado se muestra en la figura 1.152. Las partes de los gráficos de x y $-x$ que no guardan relación con el valor absoluto, aparecen con trazo discontinuo. Corresponden a intervalos donde es otra la fórmula que define al valor absoluto.

Con el origen y otros dos puntos bien escogidos es suficiente, porque la gráfica del valor absoluto es lineal a trozos y no exhibe puntos de discontinuidad. El punto $(0,0)$ del plano (x,y) está en el gráfico de valor absoluto, porque $|0|=0$.

[1] Es habitual designar con el símbolo $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales. Con esta notación, el procedimiento de calcular el valor absoluto de cada número genera una función que indicamos así: $|\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Además de tener presente en qué dominio actúa, es sugerente escribir también lo que la función hace, algo que podemos representar de la siguiente manera: $|\cdot|:x\mapsto|x|$. Todavía puede asociarse con la función otro esquema que de algún modo resume los dos anteriores: $|\cdot|:x\in\mathbb{R}\mapsto|x|\in\mathbb{R}$. Además de explicitar lo que hace la función $|\cdot|$, esta última representacion explícita que x y $|x|$ pertenecen al conjunto de los números reales.

Recomendamos manejar este tipo de expresiones para una función sólo si son de ayuda. Lo único que hacen es codificar en una única línea la misma información que hemos puesto en el primer párrafo de esta sección. Esta síntesis es muy útil para la persona entrenada en el uso de estos símbolos, pero puede ser un estorbo para quien se está iniciando en esta área, por lo que más bien tenderemos a evitarlas. Quien se sienta cómodo con este tipo de notación puede usarla libremente.

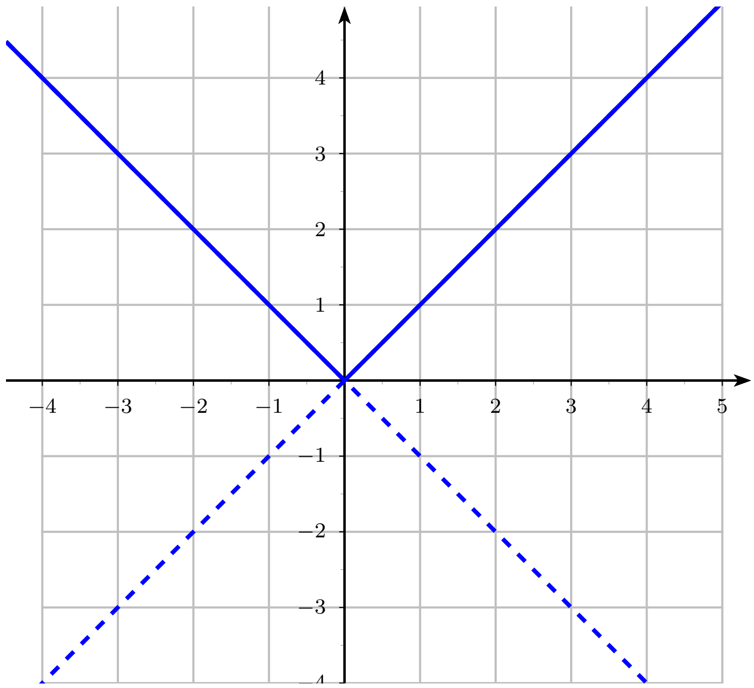

Figura 1.152. Gráfico de valor absoluto superpuesto a los dos gráficos auxiliares de x y $-x$.

Para $x = 1$ se tiene $|x| = 1$, lo que da lugar al punto $(1, 1)$ en el gráfico. El valor absoluto de $x = -3$ es $|x| = 3$. Por lo tanto $(-3, 3)$ también está en el gráfico. Estos tres puntos, destacados sobre una gráfica del valor absoluto –ya sin líneas auxiliareas y dibujada de un modo que enfatiza los valores positivos del eje vertical–, aparecen en la figura 1.153.

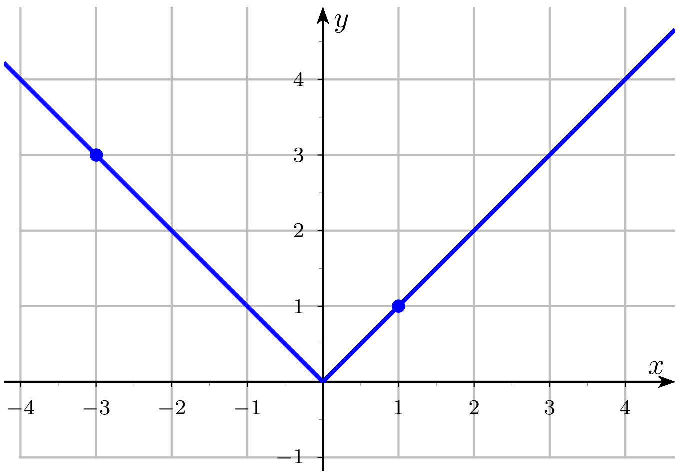

Figura 1.153.Gráfico de valor absoluto con $(-3, 3)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

A.1.3. Valores absolutos y funciones lineales

El objetivo de esta sección es estudiar los gráficos de funciones que son combinaciones lineales de funciones lineales y valores absolutos de funciones lineales. En vez de perdernos en este trabalenguas, discutiremos un ejemplo.

Ejemplo 157 Vamos a construir una representación gráfica de la función

$$f(x) = x - 1 - |2x + 3|. \tag{A.2}$$

Recordemos que el gráfico es la representación de todos los puntos $(x, f(x))$. Podemos conseguir algunos de ellos simplemente evaluando en algunos lugares. Por ejemplo,

$$f(0) = 0 - 1 - |2 \times 0 + 3| = -4.$$

El punto $(0, -4)$ tiene que estar en el gráfico de f. La elección de este punto fue bastante arbitraria. Podemos repetir el procedimiento para cualquier otro. A modo de ejercicio proponemos al lector otras dos elecciones de entre una infinidad de posibilidades.

Ejercicio A.1.2 Ubicar en el plano (x, y) los puntos del gráfico de f que corresponden a $x = -5$ y $x = 5$.

Conseguir el gráfico ubicando muchos puntos es un procedimiento que puede dar resultado cuando se hace con una computadora, que es capaz de calcular miles de puntos en muy poco tiempo. Es una opción. Pero mostraremos a continuación cómo resolver la tarea sin programar. Antes de seguir avanzando subrayemos que hay un punto específico que sí conviene calcular: es el que corresponde al valor de x en que cambia de signo la expresión afectada por el valor absoluto. En nuestro ejemplo, dentro del valor absoluto aparece

$$2x + 3,$$

que se anula en

$$x = -\frac{3}{2}.$$

Allí $2x + 3$ pasa de negativa a positiva. Evaluamos f en ese punto y obtenemos

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} - 1 - \left|2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 3\right| = -\frac{5}{2}. \tag{A.3}$$

Acabamos de ubicar un nuevo punto que podemos poner en el gráfico. Veremos luego que este punto es realmente importante, pero ahora tomaremos una dirección ligeramente diferente.

La expresión $|2x + 3|$ es igual a $-(2x + 3)$ o a $2x + 3$, dependiendo de que $2x + 3$ sea, respectivamente, menor o igual que cero o mayor o igual que cero. Tenemos entonces

$$|2x + 3| = \begin{cases} -2x - 3, & x \leq -3/2; \\ 2x + 3, & x \geq 3/2. \end{cases}$$

Usando esta información en la definición de la función f obtenemos

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 - (-2x - 3) = 3x + 2, & x \leq -3/2; \\ x - 1 - (2x + 3) = -x - 4, & x \geq -3/2. \end{cases}$$

Vemos que tanto para $x \leq -3/2$ como para $x \geq -3/2$, los valores que toma la función f pueden calcularse por medio de expresiones lineales relativamente simples. La única dificultad es que hay que pasar de una expresión a la otra al pasar de un lado a otro de $-3/2$.

Al evaluar $3x + 2$ en $x = -3/2$ obtenemos el valor

$$3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 2 = -\frac{5}{2}.$$

El mismo cálculo $-x - 4$ arroja

$$-\left(-\frac{3}{2}\right) - 4 = -\frac{5}{2}.$$

Como era de esperar, ambas expresiones devuelven el valor de la función, que ya habíamos calculado en (A.3).

Observación 57 El cálculo de $f(-3/2)$ es redundante y puede parecer innecesario. Sin embargo reiteremos la idea de que tiene valor importante como verificación. Notemos además que la evaluación de f en ese punto se vuelve especialmente sencilla, porque la parte en la que aparece el valor absoluto se anula. En la observación 58 volveremos sobre el interés que para este ejemplo específico tiene calcular el valor de f en este punto. ♠

Dado que para $x \leq -3/2$ los valores funcionales de f coinciden con los de $3x+2$, el gráfico de f sobre ese intervalo coincide con el de la función lineal $3x+2$. El mismo razonamiento permite concluir que el gráfico de f coincide con el de $-x-4$ para $x \geq -3/2$. En la figura 1.154 aparecen los gráficos de estas dos funciones lineales.

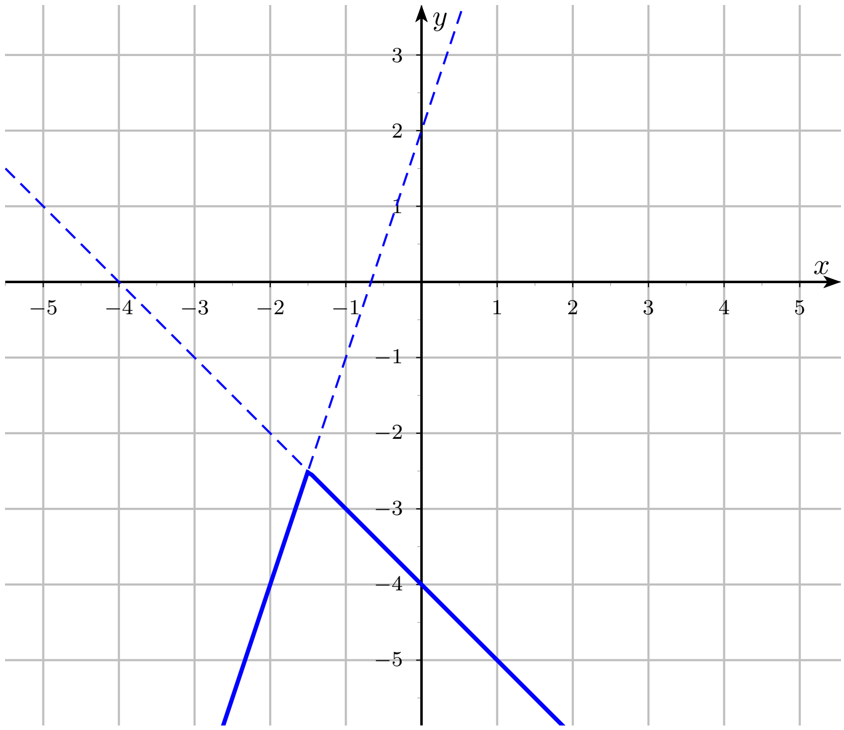

Figura 1.154.Gráficos auxiliares para el gráfico de $x-1-|2x+3|$.

Identificando correctamente qué parte de cada recta es relevante para el gráfico de f, podemos construir su gráfico a partir de la figura 1.154. Recordemos que a la izquierda de $x=-3/2$, que es la abscisa del punto de corte de las dos rectas oblicuas en la figura 1.154, los valores de la función f coinciden con los de $3x+2$, por lo que es la parte que cae a la izquierda de $x=-3/2$ lo que nos interesa conservar del gráfico de esta función. Es decir, los puntos (x,y) que cumplen las condiciones

$$y = 3x+2, \quad x \leq -\frac{3}{2}.$$

Para $x \geq -3/2$ conservamos los puntos que corresponden al gráfico de $-x-4$. O sea, los puntos de la forma

$$y = -x-4, \quad x \geq -\frac{3}{2}.$$

El resultado se muestra en la figura 1.155. Todo el gráfico de f cae en el semiplano $y \leq 0$, que hemos enfatizado en ese dibujo.

Para cerrar esta parte del cálculo, verificaremos que que los puntos $(-3/2,-5/2)$ y $(0,-4)$ están en el gráfico de f. Lo explicitamos destacándolos en la figura 1.155.

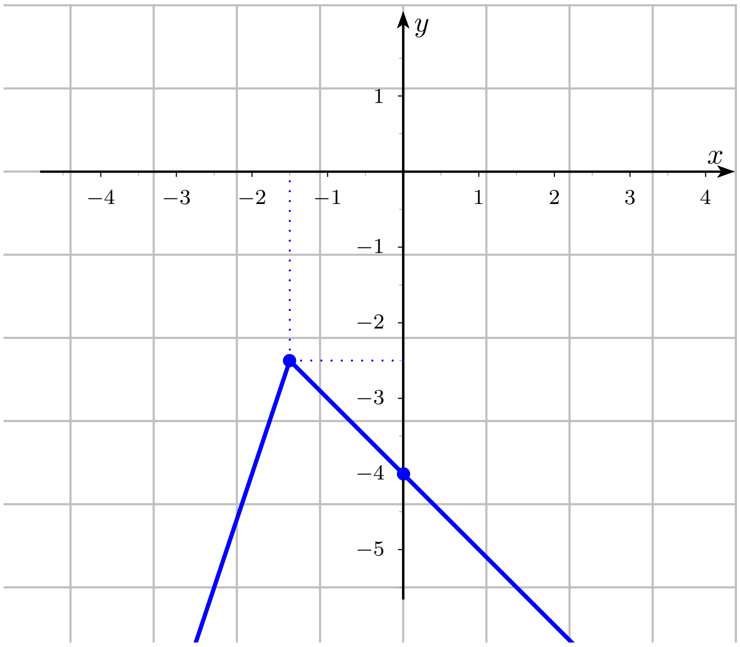

Figura 1.155.Gráfico de $x - 1 - |2x + 3|$ con puntos destacados

Ejercicio A.1.3 Verificar que los puntos encontrados en el ejercicio A.1.2, están en el gráfico de f.

Observación 58 El gráfico de f es lineal a trozos. Es un gráfico continuo que sobre un intervalo coincide con el de una función lineal y sobre otro intervalo con el de otra función lineal. Se pasa de una función lineal a la otra en $x = -3/2$, que da lugar al punto $(-3/2, -5/2)$ sobre el gráfico de f. Si podemos ubicar un punto del gráfico de f que esté a la derecha de $-3/2$ y otro a la izquierda, con esta información basta para construir todo el gráfico, porque estará formado por la unión de dos semirrectas, con origen en $(-3/2, -5/2)$, que pueden construirse a partir de esos dos puntos.

Ya sabíamos que $(0, -4)$ esta sobre el gráfico de f. Un punto a la izquierda de $-3/2$ es

$$(-3, f(-3)) = (-3, -3 - 1 - |2 \times (-3) + 3|) = (-3, -7).$$

Si ubicamos estos puntos en el plano (x, y) obtenemos un esquema como el que aparece en la figura 1.156, donde hemos destacado especialmente $(-3/2, -5/2)$ porque es el punto en el que cambia de signo la expresión afectada por el valor absoluto y es el punto más interesante para nuestro análisis.

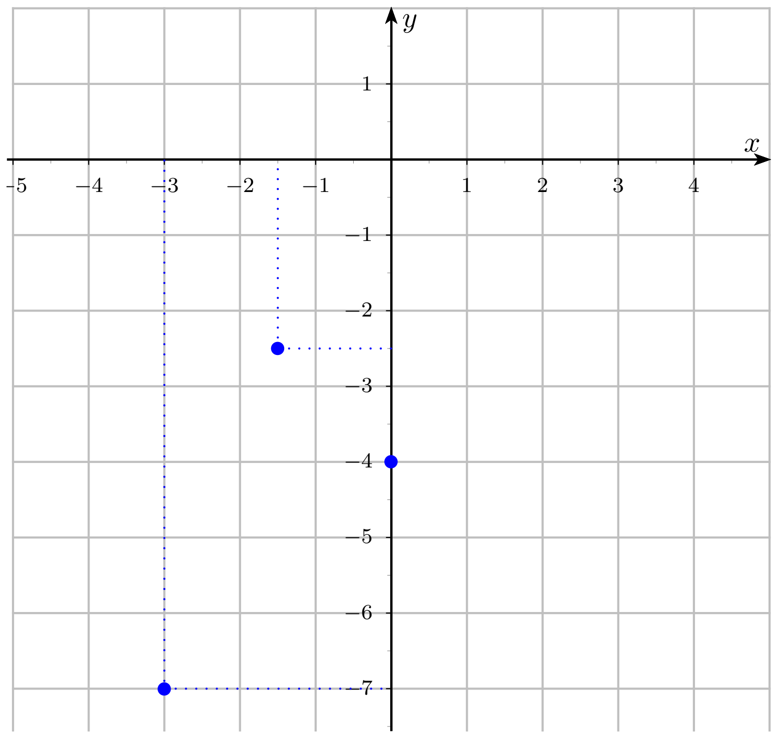

Figura 1.156. Los puntos $(-3/2, -5/2)$, $(-3, -7)$ y $(0, -4)$ del gráfico de $x - 1 - |2x + 3|$.

Dibujando ahora las dos semirrectas con origen $(-3/2, -5/2)$ que quedan determinadas por los puntos que acabamos de hallar, construimos todo el gráfico de f. De este modo recuperamos el gráfico que aparece en la figura 1.155.

Observemos que con este nuevo procedimiento hemos encontrado el gráfico de f haciendo sólo tres evaluaciones de función. Una de estas evaluaciones es especialmente sencilla, porque hay que hacerla justamente donde la parte con el valor absoluto se anula. Las otras pueden elegirse a nuestra conveniencia.

El procedimiento funciona para cualquier función g que sea de la forma

$$g(x) = ax + b \pm |cx + d|,$$

porque al "sacar" las barras del valor absoluto, a cada lado del punto $x = -d/c$, donde la expresión lineal afectada por el valor absoluto cambia de signo, aparecen sendas funciones lineales. ♠

Ejercicio A.1.4 Construir el gráfico de

$$f(x) = 2x - 1 - \left|1 - \frac{x}{2}\right|.$$

Hacerlo por dos procedimientos:

1. hallando funciones lineales adecuados e identificando en qué intervalos coinciden con f;

2. usando las ideas de la observacion 58.

Ejercicio A.1.5 Construir el gráfico de

$$f(x) = x + |2x - 1| - |5 - 3x|$$

Hacerlo por dos procedimientos:

1. hallando funciones lineales adecuadas e identificando en qué intervalos coinciden con f;

2. haciendo una adaptación adecuada de las ideas de la observacion 58. Sugerencia: para graficar la función de este ejercicio harán falta ahora al menos cuatro evaluaciones.

A.1.4. Otro ejemplo resuelto

En esta sección vamos a estudiar la función

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\left|1 - x\right|, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{A.4}$$

Para graficar f buscaremos fórmulas más simples, válidas sobre intervalos, que nos permitan manejar expresiones sin valor absoluto. Recordamos entonces que

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } 1 - x \geq 0; \\ -(1 - x), & \text{si } 1 - x \leq 0. \end{cases} \tag{A.5}$$

Esto no es más que la aplicación directa de la definición de valor absoluto, ya que el valor absoluto de *cualquiercosa* es *cualquiercosa* cuando *cualquiercosa* es mayor o igual que cero, y el opuesto $-$*cualquiercosa* cuando *cualquiercosa* es menor o igual que cero[2].

El signo de $1 - x$ cambia en $x = 1$, donde la expresión se anula. Para valores grandes de x el sumando $-x$ predomina sobre 1, de modo que el diagrama de signos es el que aparece en la figura 1.157.

[2]Es esta definición del valor absoluto lo que justifica que cuando se trabaja con valores absolutos sea conveniente conocer el signo de la expresión afectada por el valor absoluto

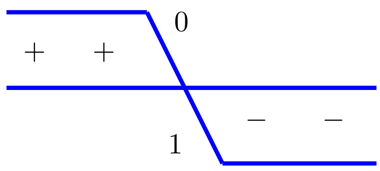

Figura 1.157.

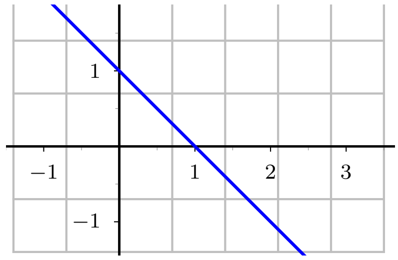

Figura 1.158.

Es conveniente tener presente cómo es el gráfico de $1-x$, que aparece en la figura 1.158

El gráfico contiene en realidad mucha más información que la de signos, pero vale la pena verificar que las distintas representaciones de las propiedades de $1-x$ nos dan información coherente. En este caso, observamos que el gráfico de $1-x$ está por debajo del eje Ox para $x \geq 1$ y por encima para $x \leq 1$, lo que es consistente con lo que hemos representado en la figura 1.157.

La condición

$$1 - x \geq 0,$$

puede expresarse de manera más cómoda, directamente en términos de la variable x, en la forma

$$x \leq 1.$$

Análogamente, $1-x \leq 0$ es equivalente a $x \geq 1$. Teniendo en cuenta estas observaciones y sustituyendo los valores absolutos en las fórmulas (A.4) para f, obtenemos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{4}(1-x), & \text{si } x \leq 1; \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{4}(1-x), & \text{si } x \leq 1; \end{cases}$$

Haciendo las cuentas resulta

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \leq 1; \\ -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}, & \text{si } x \leq 1; \end{cases} \tag{A.6}$$

¡Genial! Antes teníamos una fórmula para f y ahora en (A.6) ya tenemos dos. Estamos el doble de bien que cuando empezamos. Afortunadamente, las expresiones en (A.6) son lineales, y facilitan tanto el cálculo como la representación gráfica.

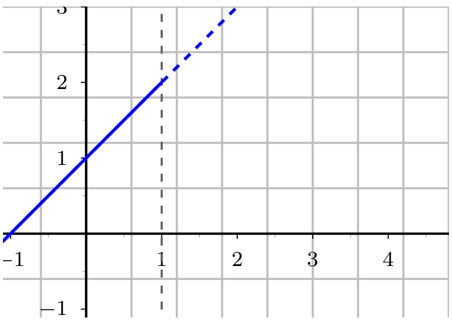

Figura 1.159.

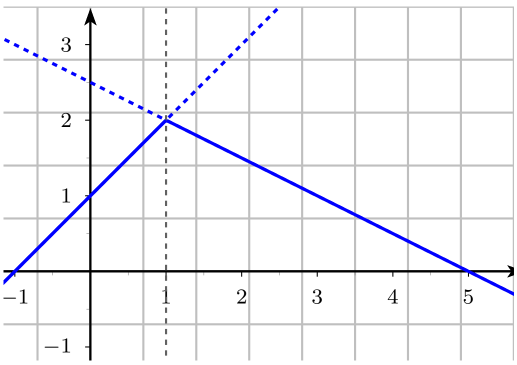

Figura 1.160.

En la figura 1.159 graficamos $y = x + 1$, destacando el tramo del gráfico que cae en la región $x \leq 1$ del plano (x, y), que es el intervalo de valores de x en que $x + 1$ coincide con $f(x)$. En la figura 1.160 agregamos al gráfico anterior lo propio con $y = -x/2 + 5/2$ para $x \geq 1$.

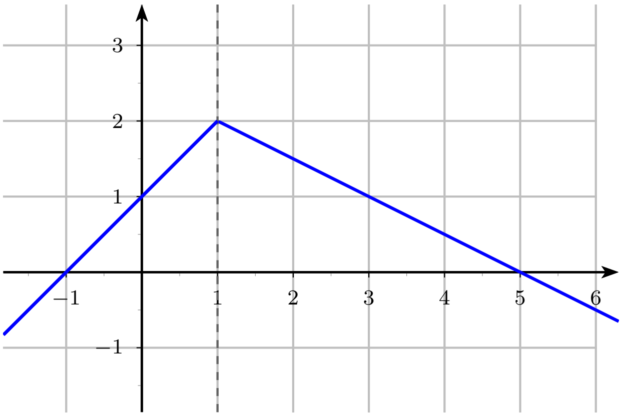

Figura 1.161.

En la figura 1.161 aparece el gráfico de f.

Observación 59 Verificación (I). En $x = 1$ la función f toma el valor

$$f(1) = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}|1 - 1| = \frac{8}{4} = 2.$$

En $x = 1$ se anula la expresión que está dentro del valor absoluto, lo que de algún modo simplifica el cálculo y además implica que, en ese punto, son válidas las dos fórmulas lineales que aparecen en (A.6). Podemos usarlas también para evaluar, y comprobar nuestros resultados:

$$1 + x\Big|_{x=1} = 1 + 1 = 2, \qquad -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\Big|_{x=1} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Tal como debe ser, las tres determinaciones coinciden y corresponden al punto $(1, 2)$ del gráfico de f.

No está de más hacer un par más de evaluaciones, una a cada lado de 1. Por ejemplo, en $t = 0$ el valor $f(0)$ debe coincidir con $x + 1$ evaluado en 0, que es 1. Al hacer el cálculo resulta

$$f(0) = \frac{0}{4} + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}|1 - 0| = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1,$$

tal como esperábamos.

A la derecha de 1 tomamos $x = 2$ y evaluamos

$$-\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\bigg|_{x=2} = -\frac{2}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}.$$

El valor de la función allí es

$$f(2) = \frac{2}{4} + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\,|1-2| = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}\,|-1| = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Hemos usado el cálculo de los valores de f en $x = 0, 1, 2$ como verificación. Pero notemos que una fórmula como (A.4) necesariamente tiene expresiones lineales a la izquierda y a la derecha de $x = 1$, por lo que estas tres evaluaciones podrían bastar para construir el gráfico por un procedimiento alternativo: en el punto $(1, 2)$ se encuentran las dos semirrectas que forman el gráfico para $x \leq 1$ y $x \geq 1$. El conocimiento del punto $(0, 1)$ determina completamente la semirrecta sobre $x \leq 1$, y el punto $(2, 3/2)$ permitiría construir la semirrecta para $x \geq 1$.

Observación 60 VERIFICACIÓN (II). Las sencillas fórmulas lineales en (A.6) permiten determinar los ceros de f.

La expresión $x + 1$ se anula en -1. Como $-1 \leq 1$, esta raíz de $x + 1$ efectivamente debe corresponder a un cero de f. Evaluamos para comprobar:

$$f(-1) = \frac{-1}{4} + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\,|1-(-1)| = \frac{6}{4} - \frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} - \frac{6}{4} = 0.$$

La expresión $-x/2 + 5/2$ se anula en $x = 5$. Como $5 \geq 1$, esta raíz de $-x/2 + 5/2$ también debe ser un cero de f. Evaluamos

$$f(5) = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\,|1-5| = \frac{12}{4} - \frac{3}{4}\,|-4| = \frac{12}{4} - \frac{3}{4} \times 4 = \frac{12}{4} - \frac{12}{4} = 0.$$

Haber identificado correctamente los puntos de corte del gráfico de f con el eje Ox es una nueva verificación de que nuestro trabajo es correcto. Es una verificación que suele ser conveniente hacer.

En la figura 1.162 aparece el gráfico de f con el destaque de los cinco puntos de verificación que acabamos de calcular.

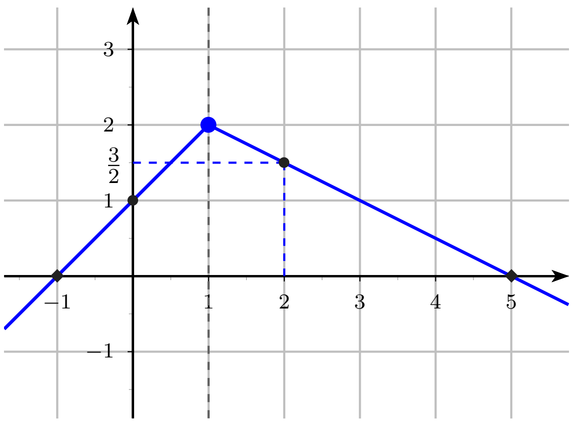

Figura 1.162.

A.1.5. Algunas razones para trabajar con la función valor absoluto

.

La función valor absoluto es una función sencilla que tiene interés por su significado geométrico, sus propiedades y sus aplicaciones. Notemos que el valor absoluto de un número es la distancia que lo separa del origen. Si tenemos en cuenta que en muchas aplicaciones los signos de los números simplemente expresan convenciones irrelevantes acerca de la orientación de los ejes coordenados (por ejemplo, estar a -10 metros sobre el nivel del mar significa que estamos hundidos), el valor absoluto de un número puede verse como una medida de su tamaño. Como en muchos contextos el tamaño sí importa, suele ser un dato interesante.

El cálculo del valor absoluto de x puede verse como el procedimiento de considerar x y $-x$ y quedarse con el más grande de los dos. Es entonces un módelo de la operación de tomar la más grande entre dos posibildades, que tiene interés en muchas situaciones. En particular, en el dimensionamiento de estructuras que pueden estar sometidas a más de un regimen de cargas, es recomendable diseñar todas sus componentes para que resistan la más grande de las solicitaciones que pueden recibir en las diferentes situaciones.

El valor absoluto aparece en diversas aplicaciones. Por ejemplo, la posición de una partícula que sufre un rebote perfectamente elástico puede describirse perfectamente en términos del valor absoluto. Otras funciones lineales a trozos aparecen naturalmente en diversos problemas, como el de calcular la imposición de un sistema fiscal como el del IRPF, con tasas variables por franjas o el costo de un servicio que tiene una tasa básica y luego un precio por unidad consumida.

El valor absoluto es también el ejemplo más sencillo de función que es continua en todos sus puntos, pero no es derivable en todos sus puntos. Aunque no es nuestra intención concentrarnos en este momento en la diferenciabilidad de las funciones, vale la pena recordarlo.

En el marco de nuestro curso, el valor absoluto nos permite construir una familia interesante de funciones, relevante para algunas aplicaciones, con la que trabajar acerca de conceptos fundamentales del cálculo integral, sin necesidad de abordar la complejidad técnica de determinar áreas de regiones del plano con bordes curvos. ♠