Cátedra de Matemática | Facultad de Arquitectura
Universidad de la República

Matemática **2013 – Primer semestre**

Parcial 1 – Recuperación – 4 de mayo de 2013

Comentarios hacia la recuperación

Preguntas 1, 2 y 3. Estas son preguntas que tienen que ver con establecer relaciones entre el cálculo de integrales y diferentes contextos. Sería deseable que pudiéramos ir cerrando esta etapa de trabajo, y que en cada uno de ustedes y en los grupos haya madurado la idea de que la integral pone en un contexto común parejas de variables relacionadas como

valor de la función,	área bajo el gráfico de la función;
velocidad,	posición;
aceleración,	velocidad;
potencia,	consumo (o trabajo);
flujo,	volumen acumulado;
densidad (lineal),	masa (de una varilla o columna de fluido);
carga distribuida,	cortante.

Dentro de poco veremos que también la pareja

cortante, momento,

se agregará a la lista.

En resumen, la integral es una herramienta flexible para describir y **cuantificar** el efecto acumulado de diversas variables continuas, por lo que seguirá apareciendo en este curso y en cursos posteriores.

Esperamos entonces que puedan manejar estas situaciones que requieran cierta habilidad para modelar algunos fenómenos a través de funciones y el cálculo asociado con ellas.

Pregunta 4 (para todos los grupos salvo el naranja). Propondremos una evaluación de sumas de Riemann con una función trigonométrica. Por favor, asegúrense de conocer cosas básicas de las funciones seno, coseno y tangente, como poder identificar correctamente sus gráficos, zonas en qué crecen y decrecen y valores destacados. También asegúrense de saber calcularlas correctamente con sus calculadoras (usar mal la calculadora es un error frecuente, y habrá distractores apuntando a ese error).

Asegúrense de saber dividir un intervalo en partes y de poder implementar distintas estrategias de construcción de sumas: evaluando en el extremo izquierdo o derecho, en el punto medio, en el punto en que se alcanza el máximo o el mínimo, o en puntos escogido arbitrariamente.

Si tienen dudas con estas cosas, pueden tomar un modelo sencillo como la función seno y experimentar. Por ejemplo,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx = 2.$$

Pueden jugar a aproximar por diversas sumas, ver qué ocurre al usar diversas estrategias y comparar los resultados con el verdadero valor de la integral. Hacer estos cálculos e interpretarlos les permitirá detectar muchos posibles errores.

No trabajaremos mucho más con sumas de Riemann en el curso, pero nos interesa que la idea de que la integral se optiene pasando al límite en un proceso de sumas, porque ayuda a interpretar muchas situaciones y está implícita en la modelización de diversos fenómenos por medio de integrales. Es un recurso que posiblemente empleemos al calcular los momentos en vigas sometidas a cargas distribuidas.

Aprovechamos la oportunidad para recordar que el uso de calculadoras durante la recuperación será estrictamente personal. Por favor, revisen la noche anterior que sus calculadoras funcionan, tienen pilas, están a mano, etcétera.

Pregunta 5 (para todos los grupos salvo el naranja). Las nociones de incremento de la variable independiente (Δx), incremento de una función (Δf o ΔF, dependiendo de la función con que estemos trabajando) y cociente incremental ($\Delta f/\Delta x$ o $\Delta F/\Delta x$) son básicas para el cálculo con funciones. De hecho, la razón para estudiar funciones es que varían. Si las únicas funciones fueran las constante toda esta teoría carecería de interés. Es importante entonces que sepan identificar el significado de cada uno de estos conceptos, la manera de calcularlos en una situación dada y su interpretación geométrica sobre el gráfico de una función. Es un material que nos servirá de base para el trabajo de las próximas semanas, en que se profundizará el estudio de la relación entre la derivada (límite de cocientes incrementales). Para avanzar en esto hay que comprender la derivada. Para comprender la derivada hay que comprender los cocientes incrementales. Para comprender los cocientes incrementales hay que comprender los incrementos.

Además, hay que generar cierto repertorio de habilidades de cálculo para poder manejar estas cantidades, pero el primer paso es conceptual: hay que entender de qué estamos hablando. En esta dirección conceptual apuntará la pregunta de la recuperación.

Pregunta 6 (para todos los grupos salvo el naranja). En esta etapa nos concentraremos en trabajar sobre el cortante. Propondremos una pregunta sobre el cálculo del cortante de una estructura sometida a cargas distribuidas y puntuales. **No pediremos en este momento cálculo de reacciones**: todas las fuerzas que actúen sobre la viga serán dadas en forma explícita. **Tampoco solicitaremos cálculos de momento**. La pregunta estará centrada en el cálculo de cortantes en presencia de **cargas puntuales** y **cargas distribuidas que NO SERÁN constantes**.

Si tienen dudas sobre esto trabajen ejemplos varios. Una manera de generar ejemplos es cargar una viga empotrada por el extremo derecho (como en el ejercicio 4 de la hoja 5), cargada con cualquier cosa que se les ocurra. Con este esquema, no tienen que ocuparse en calcular reacciones porque el empotramiento se hace cargo de lo que haga falta y además no aparece en el cálculo de los cortantes porque siempre queda a la derecha. Practiquen esto y entiendan los conceptos en este caso. Además de ser bueno para la recuperación, facilitará la comprensión de lo que viene a continuación en el curso, sobre el cálculo de momentos.

Preguntas 4, 5 y 6 (sólo para el grupo naranja). Apuntan a revisar el trabajo de cálculo de momentos y cortantes en vigas, en el nivel de complejidad con que se está trabajando el problema en este grupo y con que ha aparecido en el parcial.

Pregunta 7. Esta pregunta tie ne que ver con dar los primeros pasos en el cálculo de integrales por medio de primitivas. Es un tema con el que seguiremos trabajando. Tienen también aspectos de modelización de situaciones, similares a los de las pregunta 1, 2 y 3.

Preguntas 8, 9 y 10. Esta pregunta trata básicamente de integrales de funciones lineales a trozos, y de cómo varían estas integrales cuando se cambia el intervalo de integración. Es un material que hemos trabajado bastante y que sería deseable cerrar en este momento. En la recuperación plantearemos una pregunta que tendrá como dato la fórmula de la función f, no su gráfico. El nivel de dificultad será el mismo que tiene el ejemplo que ponemos a continuación:

Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 - \left|\frac{x}{4} + 2\right|$$

definimos

$$F(x) = 2 + \int_0^x f(t)dt.$$

A continuación enunciamos algunas tareas relativas a esta función F que esperamos que puedan realizar. Algunas tareas de este tipo aparecerán en el parcial.

1. Graficar con precisión la función f que aparece dentro de la integral que define F (revisar qué estrategias conocen para hacer esto. Comparar unas con otras).
2. Evaluar la función F en algunos puntos. Sugerimos calcular $F(-10)$, $F(-8)$, $F(4)$ y $F(10)$. (recomendamos observar cómo la relación entre el punto de evaluación y el gráfico de F afecta a la dificultad del cálculo y a las estrategias que tienen que usar).
3. Hallar todos los puntos en que F se anula (puede ser útil generalizar a: dado un número a cualquiera, ¿en cuántos valores de x se satisface la igualdad $F(x) = a$? Discutir según a.
4. Hallar el valor máximo y el valor mínimo de F en $[-10, 10]$ e identificar dónde se alcanzan (puede ser útil generalizar para un intervalo cualquiera y observar cómo la respuesta depende de la relación del intervalor con las características del gráfico de F).
5. Para $x = 3$ y $\Delta x = 2$, hallar el correspondiente incremento ΔF de F, y el cociente incremental $\Delta F/\Delta x$.
6. Determinar $F'(3)$.
7. Calcular $F'(x)$ para cualquier número real x.
8. Hallar una expresión analítica que permita calcular con facilidad $F(x)$ para cualquier valor dado de x.
9. Esbozar un gráfico de F.

Estos problemas son un modelo interesante para el cálculo, porque esencialmente contienen toda la complejidad del cálculo con funciones continuas en un contexto de complejidad moderada. En las próximas clases trabajaremos con una familia más amplia de funciones, que incluyen polinomios, funciones racionales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y diversas combinaciones de ellas, y estas ideas reaparecerán. Recomendamos dar prioridad en esta etapa a asegurarse de que los conceptos y procedimientos básicos de esta sección del curso han sido asimilados.