Matemática **2013 – Primer semestre**

HOJA 7: RESPUESTAS A EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. Recorrido principal

Ejercicio 1 Definimos
$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = x^2.$$
Las composiciones dan
$$f(g(x)) = x^2 + 1, \qquad (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$
Las derivadas son, respectivamente, $2x$ y $2x + 2$. Pueden calcularse también como $1 \times 2x$, o $2(x + 1) \times 1$.

Ejercicio 2

2. Las derivadas de $e^{\operatorname{sen} x}$ y $\cos(e^x)$ son, respectivamente $e^{\operatorname{sen} x} \cos x$ y $-\operatorname{sen}(e^x)e^x$.
   $e^{\operatorname{sen} x}$ es una primitiva de $e^{\operatorname{sen} x} \cos x$.
   $-\cos(e^x)$ es una primitiva de $e^x \operatorname{sen}(e^x)$.

Ejercicio 3 De las funciones f, g y sus derivadas se conocen los valores que aparecen en la tabla.

x	f	g	f'	g'
0	2	4	-2	3
1	7	16	-1	$4/3$
2	-1	0	$-1/2$	$1/3$
3	-1	2	$-1/6$	0

1. Para calcular $(g \circ f)(x)$ hay que conocer el valor que toma g al evaluarla en $f(x)$. Tenemos datos para evaluar g en 0, 1, 2 y 3. El único valor de f que está en esta lista es $f(0) = 2$. Podemos calcular entonces
   $$g(f(0)) = g(2) = 0.$$
   No se puede calcular ningún otro valor de $g \circ f$ a partir de esos datos.

2. La derivada $(g \circ f)'(x)$ es $g'(f(x))f'(x)$. Necesitamos poder evaluar la derivada de g en el punto en el que cae el valor de f. Tenemos
   $$(g \circ f)'(0) = g'(f(0))f'(0) = g'(2)f'(0) = \frac{1}{3} \times (-2) = -\frac{2}{3}.$$

Ejercicio 4 El primer paso para resolver la tercera integral es recurrir a la linealidad de la integral:

$$\int_1^2 \left(3e^{-2x} + 5x\right)\, dx = 3\int_1^2 e^{-2x} dx + 5\int_1^2 x\, dx.$$

La segunda integral del miembro de la derecha tiene menos dificultad, se puede evaluar directamente buscando una primitiva de x o haciendo un cálculo elemental de área de un trapecio. La primera es más interesante, porque requiere buscar una primitiva de e^{-2x}. Se puede hacer al menos de dos maneras:

- Sabemos que

  $$\frac{de^{-2x}}{dx} = -2e^{-2x}.$$

  No tenemos una primitiva de e^{-2x}, pero casi la tenemos. Porque solo hay un factor -2 extra. Dividiendo todo entre -2 y usando la linealidad de la derivada resulta

  $$\frac{d}{dx}\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right) = e^{-2x}.$$

  Ahora sí hemos encontrado una primitiva del integrando y podemos evaluar la integral usando la fórmula de Barrow:

  $$\int_1^2 e^{-2x} dx = -\frac{e^{-2x}}{2}\bigg|_1^2 = -\frac{e^{-4} - e^{-2}}{2}$$

- La otra alternativa es usar el formalismo del cálculo para implementar el cambio de variable, usando la función $-2x$ que aparece en el exponente como nueva variable. Proponemos entonces

  $$y = -2x.$$

  La notación

  $$\frac{dy}{dx} = -2$$

  para la derivada se muestra especialmente útil en este contexto, porque nos permite escribir, formalmente

  $$dy = -2dx,$$

  que podemos expresar como

  $$dx = -\frac{dy}{2}.$$

  Ahora todo ´lo que aparece en la integral está expresado en términos de la nueva variable, salvo los límites de integración. Pero esto es sencillo, solo hay que evaluar la variable y en $x = 1$ y $x = 2$:

  $$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{array}.$$

  Uniendo toda esta información, obtenemos

  $$\int_1^2 e^{-2x} dx = \int_{-2}^{-4} e^y \left(-\frac{dy}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{-4} e^y dy = -\frac{e^{-4} - e^{-2}}{2}$$

  Por un camino o por otro, al final, uniendo todas las componentes del cálculo, concluimos

  $$\int_1^2 \left(3e^{-2x} + 5x\right)\, dx = -\frac{3}{2}\left(e^{-4} - e^{-2}\right) + \frac{15}{2} = \frac{15e^4 + 3e^2 - 3}{2e^4}.$$

Ejercicio 8 Opción **E**.
NOTA: la información que contiene este ejercicio puede ayudar a resolver el ejercicio 7.

Ejercicio 10 Opción **C**.

Ejercicio 11 Este ejercicio es un ejercicio típico de aplicación de la técnica de cambio de variables. Para calcular

$$\int_0^2 xe^{x^2}dx$$

introducimos

$$y = x^2.$$

Por lo tanto

$$xdx = \frac{dy}{2}.$$

Obtenemos

$$\int_0^2 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 e^y dy = \frac{e^4-1}{2}.$$

Para calcular

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)dx$$

se sugiere hacer el cambio

$$y = 3x + \frac{\pi}{2}.$$

Este cambio reduce la integral a un problema con una función cuya primitiva es conocida para nosotros.

Ejercicio 14 Mostrar que $x|x|$ es una primitiva de $|x|$. Hacerlo por dos procedimientos:

1. el cálculo en 0 requiere analizar los cocientes incrementales para determinar la derivada directamente a partir de la definición de derivada como límite de cocientes incrementales. En el resto de los puntos se puede hacer tomando la opción adecuada para los signos para deshacerse del valor abosluto;

2. este cálculo puede hacerse por métodos geométricos, evaluando áreas y asignando los signos adecuados.

Ejercicio 15 Calcular la integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} |1-x|\, dx.$$

Prestar atención al análisis de las respuestas equivocadas, porque recogen algunos errores típicos en la etapa de aprendizaje de estos conceptos.

A. $-\dfrac{15}{8}$. Es la integral de $1-x$. Examinar la integral antes de empezar a calcular debería protegernos contra este error: el integrando es mayor o igual que cero, hay puntos en que es positivo y el extremo inferior de integración es menor que el superior. Por lo tanto, la integral tiene que ser positiva.

B. $\dfrac{9}{8}$. Es el incremento del valor absoluto de de $x - x^2/2$, que es una primitiva de $1-x$. Atención: no es correcto buscar primitivas de lo que está dentro del valor absoluto, y luego hacer incrementos del valor absoluto de las primitivas.

C. $\dfrac{15}{8}$. Es el valor absoluto de la integral de $1-x$. Atención: el valor absoluto de la integral solo coincide con la integral del valor absoluto cuando el integrando no cambia de signos. Si hay algún cambio de signo, parte del 'área positiva' se cancela con parte del 'área negativa', y el valor absoluto de la integral es estrictamente menor que la integral del valor absoluto.

D. $\dfrac{17}{8}$. Esta es la opción correcta.

E. $\dfrac{55}{8}$. Este número es la integral de $1+|x|$.

Ejercicio 16

$$F(x) = 2(x+2) - \frac{|x+1|(x+1)}{2} + \frac{|-2+1|(-2+1)}{2} = 2x - \frac{|x+1|(x+1)}{2} + \frac{7}{2}$$

Corregir la letra: Determinar el valor máximo que toma F en $[0,+\infty)$ y el punto en que lo alcanza (la función no tiene máximo en toda la recta, porque $F(x) \to +\infty$ cuando $x \to -\infty$).