Cátedra de Matemática

Facultad de Arquitectura
Universidad de la República

Matemática **2013 – Primer semestre**

Hoja 6: respuestas a ejercicios seleccionados

Versión: 13/05/2013

Ejercicio 1 El incremento de x^2 entre $x = 2$ y $x = 2 + \Delta x$ es

$$(2 + \Delta x)^2 - 2^2 = (\Delta x)^2 + 4\Delta x.$$

El resto del ejercicio pasa por escribir esta expresión de una forma en la que cada sumando puede interpretarse como parte de la figura. Observar que la figura hacer evidente que $(\Delta x)^2$ es mucho más pequeño que $2\Delta x$ cuando Δx está muy próximo a 0.

Ejercicio 11 Calcular primitivas de $e^x \cos x$ y $e^x \operatorname{sen} x$.

Sugerencia: el resultado de este ejercicio, igual que cualquier cálculo de primitivas, puede verificarse derivando. Si una función F es la primitiva de f, entonces al calcular F' debe obtenerse f (ver también la nota final).

Ejercicio 12 Calcular

1. $\displaystyle\int_1^e \log x dx = \mathbf{1}.$
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = \mathbf{4 - 2\sqrt{e}}.$
5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos x dx = \frac{\mathbf{1 - e^{-2\pi}}}{\mathbf{2}}.$

Sugerencia: para la parte 5, aplicar dos veces la integración por partes, en ambas derivando la exponencial e integrando la función trigonométrica, o en ambas integrando la exponencial y derivando la función trigonométrica, para que la integral que se desea calcular aparezca en los dos miembros de una igualdad y se pueda despejar.

Ejercicio 14 Un ejemplo de integral impropia. Para cualquier valor de $a > 0$,

$$\int_0^{+\infty} x e^{-ax} dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a^2}}.$$

NOTA: UNA ESTRATEGIA DE VERIFICACIÓN. La integración por partes está basada en aprovechar de manera inteligente la fórmula de la derivada del producto

$$(fg)' = f'g + fg',$$

para escribir una primitiva de, por ejemplo, $f'g$, en la forma

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

Por lo tanto, todos los cálculos por integración por partes son esencialmente un cálculo de primitivas. Esto puede explotarse para verificar. Lo mostramos con un ejemplo:

$$\int_1^e \log x dx = \int_1^e 1 \log x dx = x \log x|_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx.$$

Llegados a este punto, podríamos evaluar el primer sumando del último término de la igualdad, pero pospondremos hacerlo para escribir

$$\int_1^e \log x dx = x \log x|_1^e - x|_1^e = (x \log x - x)|_1^e .$$

Hemos logrado calcular la integral como un incremento de la función

$$x \log x - x,$$

por lo tanto, esta función debe ser una primitiva de $\log x$. Derivamos para obtener

$$x \log x + x\frac{1}{x} - 1 = \log x,$$

lo que muestra que hemos hecho bien las cuentas.

Esta verificación siempre puede hacerse, es de gran ayuda para comprobar nuestros cálculos y reduce muchísimo los márgenes de error al trabajar con integración por partes.