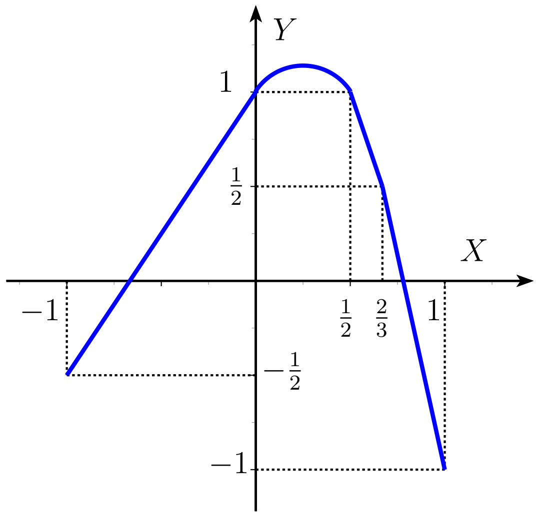
Matemática **2013 – Segundo semestre**

Hoja 1: Integrales a partir de gráficos de funciones

1. Gráficos

Ejercicio * 1 Sea f la función de la figura, cuyo dominio es $[-1, 1]$.



1. *a*) ¿El punto $(1, -1)$ pertenece al gráfico de f? ¿El punto $(-1, 1)$ pertenece al gráfico de f?
   b) Halle $f(-1)$ y $f(1/2)$
   c) $f(x) = 1$ en $x = \ldots$
   d) $f(x) = 0$ en $x = \ldots$, $f(x) < 0$ si x pertenece a ...., $f(x) > 0$ si x pertenece a ....
   e) f es creciente en el intervalo ...., f es decreciente en el intervalo ....
   f) El máximo de f es aproximadamente ... y se da en $x = \ldots$.
   g) El mínimo de f es ... y se da en $x = \ldots$.
2. *a*) Dibujar el gráfico de $f(x) + 2$, $f(x) - 2$.
   b) Dibujar el gráfico de $-f(x)$, $3f(x)$, $-3f(x)$.
   c) Dibujar el gráfico de $f(-x)$

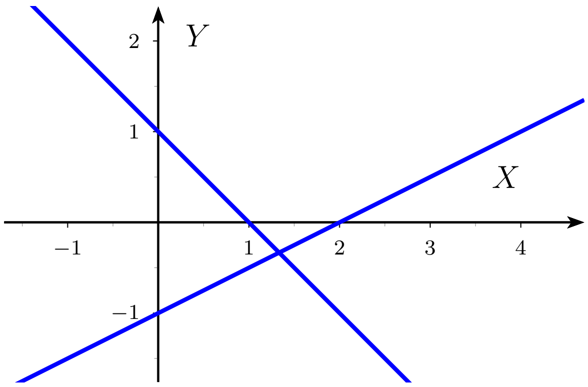
Ejercicio 2 En este ejercicio consideraremos la función lineal $f(x) = ax + b$ tal que los dos puntos $(4, 7)$ y $(-1, 1)$ pertenecen a su gráfico.

1. Dibujar en el plano el gráfico de f.
2. Hallar a y b.

3. Hallar el valor de la función en 0 y comprobar que el punto que corresponde al gráfico efectivamente cae sobre la línea que une $(4,7)$ con $(-1,1)$.

4. Hallar la raiz de f.

Ejercicio 3 Dadas las dos gráficas que se representan en la figura,



identificar a qué funciones lineales corresponden. Hallar las coordenadas del punto de corte de los dos gráficos.

Ejercicio 4 Graficar las funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ por las fórmulas

$$f(x) = \begin{cases} x/2 - 3, & x < 4, \\ x - 5, & x \geq 4, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x < 4, \\ x, & x \geq 4. \end{cases}$$

Ejercicio 5 Sea f una función creciente estricta, tal que $f(0) = 1$, y $f(1) = 2$. ¿Qué valores puede tomar $f(3)$? Grafique tres funciones distintas que cumplan con las condiciones.

Ejercicio 6 Graficar alguna función $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ continua que cumpla con las siguientes condiciones:

- f lineal en $[-2, 0]$
- f constante en $[0, 1]$
- f creciente en $[-2, 0]$
- $f < 0$ en $[-2, -1]$
- $f > 0$ en $[-1, 0]$
- f posee una única raíz en $[1, 3]$
- $f(\frac{2}{3}) = 1$

2. Integrales

Ejercicio * 7 Sea f la función del ejercicio 1.

1. *a*) Hallar $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} f(x)\, dx$

b) Hallar $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\ dx$

c) Sabiendo que $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\ dx = 8/15$, hallar $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\ dx$

2. *a*) Hallar $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} -f(x)\ dx \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} 3f(x)\ dx \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} -3f(x)\ dx$

   b) Hallar $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}}^{1} -f(x)\ dx \qquad \int_{\frac{2}{3}}^{1} 3f(x)\ dx \qquad \int_{\frac{2}{3}}^{1} -3f(x)\ dx$

   c) Hallar $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} -3f(x)\ dx$

   d) En base a lo observado en las partes anteriores, conjeture cuál es el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} kf(x)\ dx$, con $k \in \mathbb{R}$.

3. *a*) Hallar

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x) + 2\ dx \qquad \int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x) - 2\ dx$$

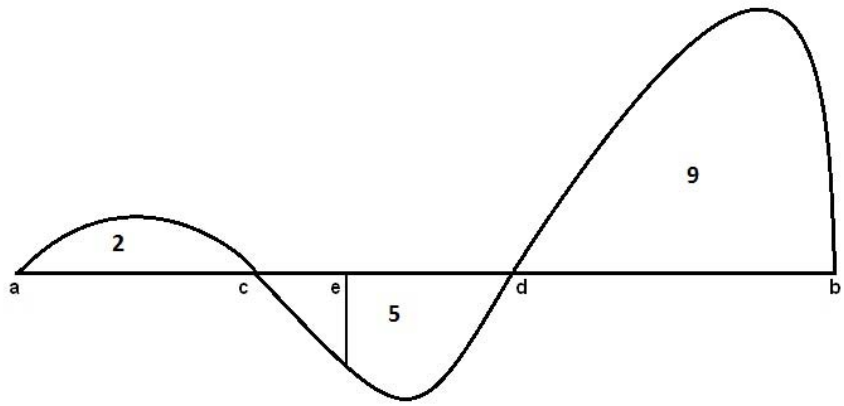
   b) Sea $g(x) = 2$ y $h(x) = -2$. Graficarlas y hallar

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} g(x)\ dx \qquad \int_{\frac{2}{3}}^{1} h(x)\ dx$$

   c) ¿Es cierto que $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x) + g(x)\ dx = \int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\ dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} g(x)\ dx$?
   ¿Y cambiando g por h?

4. ¿Cuál es la relación entre $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\ dx$ y $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{2}{3}} f(-x)\ dx$?

Ejercicio 8 La figura representa el gráfico de una función f definida sobre el intervalo $[a, b]$ Los números representan el valor de las áreas de cada región del plano encerrada entre el eje horizontal y el gráfico de f.



1. Hallar

$$\int_a^b f(x)\ dx \qquad \int_a^b -f(x)\ dx \qquad \int_a^b 5f(x)\ dx$$

2. Indique si es verdadero o falso:

   a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^e f(x)\ dx + \int_e^b f(x)\ dx$

   b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^d f(x)\ dx + \int_d^b f(x)\ dx$

   c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx - \int_c^d f(x)\ dx + \int_d^b f(x)\ dx$

3. Indique la opción correcta: $\displaystyle\int_a^b 4 + f(x)\ dx =$

   a) $\displaystyle 4 + \int_a^b f(x)\ dx$

   b) $\displaystyle 4(b-a) + \int_a^b f(x)\ dx$

   c) $\displaystyle 4\int_a^b f(x)\ dx$

Ejercicio 9 Sea $f(x) = 2$, $g(x) = x$ y $h(x) = f(x)g(x)$. Indique si es cierto que

$$\int_0^3 h(x)\ dx = \int_0^3 f(x)\ dx. \int_0^3 g(x)\ dx$$

Ejercicio 10 Sea $f(t) = -t + 3$, entonces

1. $\int_1^5 f(t)\ dt =$

   a) 0

   b) 4

   c) -4

   d) -12

2. $\int_1^5 f(t) - 7\ dt =$

   a) -7

   b) -35

   c) 7

   d) 35

3. $\int_1^4 3f(t)\ dt =$

   a) 3/2

   b) 9/2

c) 12

d) 4/3

Ejercicio * 11

1. Sea $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$, $x \in [1,3]$, donde $f(t) = 5$.
   - *a*) Hallar $F(1)$, $F(2)$ y $F(3)$.
   - *b*) Estudiar el crecimiento de la función F.
   - *c*) Determinar máximos y mínimos de F.
   - *d*) Bosquejar $F : [1,3] \to \mathbb{R}$.
2. Sea $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$, $x \in [1,3]$, donde $f(t) = 5t - 10$.
   - *a*) Hallar $F(1)$, $F(2)$ y $F(3)$.
   - *b*) Estudiar el crecimiento de la función F.
   - *c*) Determinar máximos y mínimos de F.
   - *d*) Bosquejar $F : [1,3] \to \mathbb{R}$.
3. Sea $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$, $x \in [-1,1]$, donde $f(t)$ es la función del ejercicio 1.
   - *a*) Hallar $F(-1)$ y $F(1)$.
   - *b*) Estudiar el crecimiento de la función F.
   - *c*) Determinar máximos y mínimos de F.
   - *d*) Bosquejar $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 12

1. Se considera la función $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ donde $f(t) = 5$
   - *a*) Hallar $F(-1)$, $F(0)$, $F(1)$ y $F(2)$.
   - *b*) Bosquejar $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Se considera la función $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ donde $f(t) = 5t - 10$
   - *a*) Hallar $F(-1)$, $F(0)$, $F(1)$ y $F(2)$.
   - *b*) Bosquejar $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.