Matemática – Curso piloto | **2012 – Segundo semestre**

Semana 1: la integral como área

1 La integral como área bajo una curva y el área como función

1.1 Lectura previa

Contar y sumar son operaciones que nos permiten cuantificar el efecto acumulado de cantidades discretas. Más delicada es la tarea de cuantificar el efecto acumulado de una magnitud que varía continuamente. Veamos algunos ejemplos.

- Si conocemos la longitud de un paso, podemos estimar la distancia recorrida simplemente a partir del conocimiento de la cantidad de pasos que hemos dado. Este es un procedimiento que a veces se usa para tener una primera aproximación a la medida de una habitación grande o un terreno, pertenece al mundo del cálculo con cantidades discretas. En este caso pasos que podemos contar.

  Si conocemos la velocidad de un móvil, ¿cómo se determina la distancia recorrida al cabo de cierto tiempo? Si la velocidad es constante el resultado es simplemente el producto de la velocidad por el tiempo transcurrido.

  ¿Qué ocurre cuando la velocidad varía? Aunque la intuición parece decirnos que si en cada instante conocemos la velocidad de un automóvil su posición final está determinada si conocemos su posición de partida, ¿en qué cálculos y fórmulas se traduce esta observación? Por ejemplo, un parámetro que suelen comunicar los fabricantes de coches deportivos es cuánto tiempo necesitan para acelerar desde el reposo hasta los 100 kilómetros por horal. Si sabemos de un cierto coche que requiere 4,8 segundos para esto, ¿cuál es la distancia que habrá recorrido en este período?

- Un típico tanque de doscientos litros, de esos que suelen convertirse en mediotanques parrilleros, tiene unos 58 centímetros de diámetro y unos 85 de alto. Si el tanque está en posición vertical, apoyado sobre una de las bases del cilindro, y parcialmente lleno, es directo determinar la cantidad de líquido que contiene a partir de la medición de la altura del líquido. Si la altura, medida en centímetros, es h, el volumen, expresado en litros, es

  $$2,64208 \times h.$$

  Pero cuando el tanque está acostado, si conocemos la altura h hasta la que está lleno, ¿cuál es el volumen ocupado?

- Una manera estándar de modelar muchos materiales de construcción es considerarlos como un continuo. En este modelo las cargas sobre las piezas aparecen como una combinación de cargas puntuales y distribuciones de carga, que van variando lentamente. Para entender cómo todas estas solicitaciones se traducen en distribuciones de tensiones en el interior de las piezas e identificar los puntos críticos sometidos a mayor esfuerzo, es necesario poder evaluar su efecto acumulado.

- Es necesario hacer algo de fuerza para doblar una barra. Dadas dos barras de una misma longitud y material, su resistencia a ser dobladas dependerá de la forma de la sección de la barra. En general, una barra más grande nos demandará más esfuerzo que una más pequeña, pero no es sólo una cuestion de tamaño: es casi imposible doblar una simple regla cuando se pone de canto, pero muy fácil si se hace por el lado plano. La realidad es que la forma en que está distribuido el material es importante para la resistencia a la flexión: una varilla con una sección de una cierta área se dobla con más facilidad que un caño cuyas paredes tienen una sección de igual área; las vigas se diseñan con forma de I para alejar de su centro la mayor cantidad de material posible, etcétera. La resistencia a la flexión es el efecto acumulado de la resistencia que aporta cada porción del material por separado. Otra vez nos encontramos frente al desafío de cuantificar el efecto acumulado de una variable continua.

- El cálculo del área de una región del plano puede interpretarse del mismo modo: si uno va haciendo secciones del área por una familia de rectas paralelas, cada sección aporta al área total un cierto número que va variando de forma continua.

La formalización de la idea que aparece en el último item nos llevará al concepto de integral, que permite unificar a todos los demás. Si la región cuya área se quiere medir está determinada en el plano por un intervalo $[a, b]$ del eje Ox y el gráfico de una función $f(x)$ la integral de la función f sobre el intervalo $[a, b]$ es el área de la región del plano (x, y) comprendida entre el eje Ox, el gráfico de f y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$, con una salvedad: las partes de la figura que caen por debajo del eje Ox contribuyen al área con signo negativo.

La idea es que en un desplazamiento las velocidades negativas y positivas se compensan mutuamente, en una estructura cargada las fuerzas que empujan en direcciones contrarias se cancelan cuando se busca encontrar cuál es la resultante de todas las fuerzas actuantes.

Definición heurística 1 (Integral definida de una función) *Para $a < b$ la integral de una función f sobre un intervalo $[a, b]$ es igual al área de la región $a \leq x \leq b$ del plano (x, y) que queda encerrada entre el eje Ox y el gráfico de f, con la convención de que las áreas que quedan por debajo del eje Ox contribuyen al área total con signo negativo. Este número se indica con la notación*

$$\int_a^b f(x)dx,$$

Observación 1.0.1 Para comprender la caracterización de integral que acabamos de dar es necesario comprender el concepto de *gráfico de una función.* No lo desarrollaremos aquí, pero si alguien necesita ayuda con este concepto puede formular una consulta en los sitios de Internet del curso, contactar a cualquiera de los docentes o buscar información al respecto. También se trabajará en ejemplos posteriores.

Ejemplo 1.1

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2},$$

Este ejemplo sólo requiere calcular el área de un triángulo rectángulo con dos catetos de longitud 1.

Ejemplo 1.2

$$\int_{-1}^1 x\,dx = 0,$$

En este ejemplo es importante el hecho de que las áreas que caen por debajo del eje Ox contribuyen a la integral con una cantidad negativa.

Ejemplo 1.3

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicio 1 ¿Cómo hemos llegado al resultado de este ejemplo?

Observación 1.3.1 El nombre x de la variable en la escritura de la integral es irrelevante. Puede sustituirse por t, y, o cualquier otra elección, y a veces se hace cuando la variable x se usa en la misma expresión con otros significado. Podríamos haber escrito la igualdad del ejemplo 1.3 como

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-s^2}\, ds = \frac{\pi}{2}.$$

Dada una función definida sobre los números reales podemos, en general, definir la integral

$$\int_a^b f(t)dt,$$

para cualquier pareja de números a y b. Si dejamos uno de ellos fijo, típicamente el valor de a, y dejamos variar el otro, generamos una nueva función

$$b \mapsto \int_a^b f(t)\, dt,$$

que a cada valor de b le asocia el valor de la integral. Siguiendo la tradición de usar letras como x, y o z para las variables y llamando F a la función que acabamos de definir, tenemos

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Este procedimiento, de considerar la integral definida como una función de uno de los extremos de integración, es fundamental en el marco del cálculo diferencial e integral. En las aplicaciones, está relacionado con escribir para cada tiempo la posición de un móvil como una integral de su velocidad. O calcular el esfuerzo cortante al que está sometida una viga en función de la posicion, como una integral de las cargas que soporta.

Ejemplo 1.4 Si $f(x) = x$, entonces

$$\int_0^x f(t)\, dt = \frac{x^2}{2}.$$

1.2 Preguntas de verificación de lectura de la clase 1

Ejercicio 2 Sea $f(x) = 2|x|$. Entonces $\int_0^x f(t)dt$ es igual a

1. x^2;
2. $|x|^2$;
3. $-x^2$;
4. $|x|x$.

Pregunta 1 ¿Cuáles de las siguientes cosas creés que pueden describirse adecuadamente a través del concepto de integral?

1. La determinación del precio de la nafta súper a partir del precio del crudo y de los costos operativos de la refinería.
2. La lectura del consumo de electricidad de una casa a lo largo de un mes.
3. La medida de la velocidad a la que vamos conduciendo, tal como nos la muestra el velocímetro en el panel del auto.
4. El número que indica el cuentakilómetros del auto, que mientras no ha sido manipulado indica la distancia total que ha recorrido.
5. El peso total que una estructura descarga a sus cimientos.
6. La cota de agua en el lago de la represa de Rincón del Bonete.
7. La concentración de carbono 14 en un resto fósil, cuya medida se usa para datarlo.

Pregunta 2 Cuáles de las cuatro opciones propuestas creés que mejor completa la frase.
La integral puede verse con una versión continua de la operación de

1. multiplicar.
2. pasar al límite.
3. sumar.
4. calcular incrementos.

1.3 Lectura adicional

Observación 1.4.1 Algunas consideraciones sobre el área.
Nuestra caracterización de la integral nos será útil para trabajar, no es en realidad una definición rigurosa, porque se apoya en la noción de área de un conjunto del plano, que es algo que no hemos definido, pero que puede caracterizarse a partir de las siguientes cuatro propiedades:

1. el área de un conjunto del plano es siempre un número real mayor o igual que cero;
2. el área de la unión de una colección de conjuntos disjuntos del plano es igual a la suma de sus áreas;
3. el área del conjunto que resulta de trasladar, rotar o simetrizar un conjunto dado, es igual al área del conjunto original;
4. el área de un cuadrado de lado 1 es igual a 1.

De estas propiedades se pueden deducir otras, como las contenidas en las proposiciones 1 y 2.

Proposición 1 *Si un conjunto A está contenido en un conjunto B, el área de B es mayor o igual que la de A.*

Otra que da algo más de trabajo, es esencial para justificar los procedimientos de aproximación.

Proposición 2 *Si tenemos una sucesión de infinitos conjuntos*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \subset \ldots$$

y llamamos A *a la unión de todos ellos, entonces las áreas de los conjuntos* A_n *forman una sucesión creciente de números que tiende al área de* A*. Este resultado vale incluso cuando el área de* A *es infinita.*

Por suerte no es necesario para nuestro propósito desarrollar una teoría completa del área de los conjuntos del plano. Nos bastará con utilizar propiedades familiares del área y la idea de que cuando una región del plano aproxima bien a otra, el área de la primera aproxima a la de la segunda. Este es esencialmente el contenido de la proposición 2, que en esta exposición usaremos más bien informalmente.

Por último, diagmos que la caracterización del área que acabamos de dar esencialmente correcta, pero encuentra un obstáculo técnico importante: no es posible cálcular el área de cualquier conjunto del plano. Si se desea mantener la propiedad de aditividad que asegura que el área de la union de dos conjuntos disjuntos es igual a la suma de sus áreas, es necesario resignarse a no poder medir el área de ciertos conjuntos. De todos modos, los que sí se pueden medir son una clase suficiente para trabajar e incluyen a todos los conjuntos que la gente normalmente puede imaginarse sin recurrir a construcciones sofisticadas, expresamente pensadas para conseguir conjuntos imposibles de medir.

El volumen en el espacio tiene el mismo problema que el área. Una indicación de esto es el célebre resultado conocido como la Paradoja de Banach-Tarski. Si se pudiera aplicar a las construcciones haría las delicias de los especuladores: permitiría desarmar un edificio en partes, y volver a ensamblarlas luego de manera de conseguir dos edificios. No la vamos a explicar en este curso, sólo incluiremos cosas que ayuden a nuestros estudiantes a ganarse la vida honradamente.

1.4 Prueba de inicio para la semana 1

No se aplicará prueba de inicio esta semana.