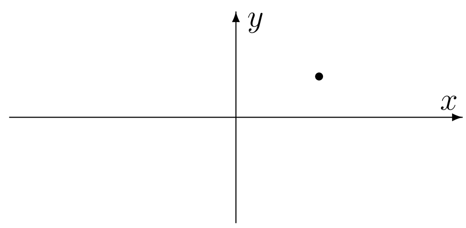
Cátedra de Matemática | Facultad de Arquitectura
Universidad de la República

Matemática – Curso piloto | **2012 – Segundo semestre**

Hoja 1: la integral como área

Ejercicio 1 Sobre un sistema de ejes coordenados ortogonales, ubicar los puntos $(2,1)$, $(-1,1)$, $(0,4)$ y $(-3,0)$

Ejercicio 2 Si el punto (x_0, y_0) aparece en la posición marcada en la figura,



ubicar los puntos $(x_0, 0)$, $(0, y_0)$, $(2x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, (y_0, x_0), $(-y_0, x_0)$, $(-x_0, -y_0)$.

Ejercicio 3 En el plano (x, y) se consideran puntos que satisfacen la relación $y = 2x$. Ubicar los puntos que corresponden a los valores $x = 0$, $x = 1$, $x = -2$.

Ejercicio 4 Graficar las funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ por las fórmulas

$$f(x) = \begin{cases} x/2 - 3, & x < 4, \\ x - 5, & x \geq 4, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x < 4, \\ x, & x \geq 4. \end{cases}$$

¿Cuál de ellas es continua, y cual es discontinua? ¿Cuánto valen los límites de $f(x)$ y de $g(x)$ cuando $x \to 4$ por la izquierda y por la derecha? ¿Qué valor toma en $x = 4$ cada una de las dos funciones?

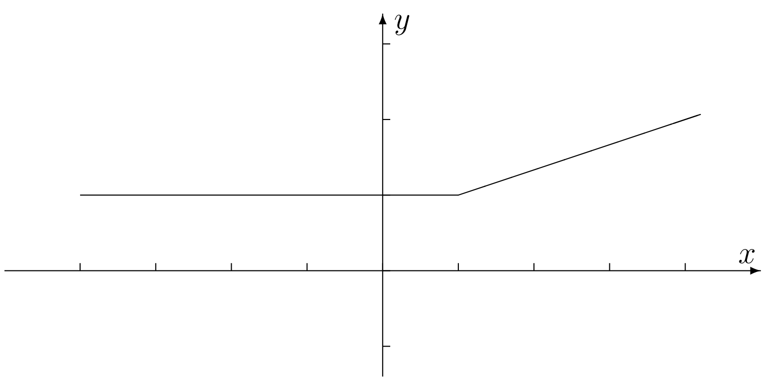
Ejercicio * 5 Graficar en el plano (x, y) la función definida por la fórmula

$$f(x) = |x - 3| - 2.$$

Ejercicio 6 Representar el gráfico de la función que queda definida para x en el intervalo $[2, 3]$ por la fórmula

$$f(x) = 1 + \sqrt{1 - (x-2)^2}.$$

Ejercicio 7 Dar una expresión analítica para la función que corresponde al siguiente gráfico:



Proposición 1 *Sean $a < b < c$. Entonces*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \tag{1}$$

Ejercicio * 8 Justificar la proposición 1 a partir de la caracterización de la integral como el área (con signo) bajo el gráfico de la función.

Ejercicio 9 Cuando $a < c < b$, ¿qué definición hay que dar de

$$\int_b^c f(x)dx$$

para que la fórmula (1) siga siendo válida.

Proposición 2 *Si λ es un número real cualquiera y f una función, entonces*

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Ejercicio * 10 Justificar la proposición a partir de la caracterización de la integral como el área (con signo) bajo el gráfico de la función.

Ejercicio * 11 Si se sabe que

$$\int_{10}^{20} f(x)dx = 50,$$

entonces:

1. $\int_1^2 f(10x)dx = 50;$
2. $\int_1^2 f(10x)dx = 5;$
3. $\int_{10}^{20} f(10x)dx = 500;$
4. $\int_1^2 f(10x)dx = 500;$
5. $\int_{10}^{20} f(10x)dx = 5;$

Elegir la opción correcta.

La siguiente proposición generaliza el resultado del ejercicio anterior.

Proposición 3 *Si λ es un número real cualquiera y f una función, entonces*

$$\int_a^b f(\lambda x)dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x)dx. \tag{3}$$

Ejercicio * 12 Para un número $\lambda > 0$ consideramos la transformación del plano (x, y) en sí mismo definida por

$$T_\lambda(x, y) = (x/\lambda, y).$$

1. Para λ igual a $1/2$, 2 y 4 dibujar la imagen por T_λ del cuadrado $[0, 1]\times[0, 1]$, del rectánculo $[1, 2] \times [1, 3]$ y del círculo definido por $(x - 2)^2 - (y - 3)^2 \leq 1$.

2. Si una región R del plano (x, y) tiene área A, ¿cuál es el área de la imagen de R por T_λ?
3. Mostrar que T_λ transforma el gráfico de una función $f(x)$ en el gráfico de $f(\lambda x)$ y el eje Ox en el eje Ox.
4. Mostrar la validez la proposición 3 a partir de la definición de la integral como área bajo el gráfico de la función. Sugerencia: estudiar primero el caso $\lambda > 0$, usando las partes anteriores de este mismo ejercicio. Completar luego los casos $\lambda < 0$ y $\lambda = 0$.

Ejercicio * 13 Si conocemos
$$\int_{10}^{20} f(x)\,dx = 1$$
entonces

1. $\int_{10}^{20} f(x/10)\,dx = 10$;
2. $\int_{1}^{2} f(x/10)\,dx = 1$;
3. $\int_{1}^{2} f(x/10)\,dx = 1/10$;
4. $\int_{1}^{2} f(x/10)\,dx = 10$;
5. $\int_{1}^{2} f(x/10)\,dx = 1$.

Elegir la opción correcta.

Ejercicio * 14

1. Indicar cuál de las siguientes igualdades es necesariamente correcta para cualquier función f y cualquier elección de a y b.
   (a) $\int_a^b f(-x)dx = \int_b^a f(x)dx$
   (b) $\int_a^b f(-x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
   (c) $\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$
   (d) $\int_a^b f(-x)dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)dx$
   (e) $\int_a^b f(-x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
2. Para las igualdades restantes, dar ejemplos de elecciones de f, a y b, para las que se satisfagan (elegir ejemplos tan generales y sofisticados como sea posible).

Proposición 4 *Si $f \leq g$, entonces*
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{4}$$

Ejercicio 15 Mostrar la validez de esta proposición a partir de la definición de la integral como área bajo el gráfico de la función.

Ejercicio * 16 Mostrar que si $a \leq b$ entonces
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$
¿Qué ocurre si b es menor que a? Dar un ejemplo en que haya igualdad entre los dos miembros de la desigualdad, y un ejemplo en que la desigualdad sea estricta.

Ejercicio 17 Si se sabe que

$$\int_1^2 f(x)dx = 5,$$

entonces

1. $\int_1^2 f(x+7)dx = 5$;
2. $\int_8^9 f(x+7)dx = 5$;
3. $\int_{-6}^{-5} f(x+7)dx = 5$;
4. $\int_{-6}^{-5} f(x+7)dx = -5$;

Elegir la opción correcta.

Ejercicio 18 Generalizar el ejercicio anterior a una proposición acerca de como evaluar integrales definidas de $f(x+a)$ a partir del conocimiento de integrales definidas de f. Discutir los casos en que a es negativo y en que es positivo.

Ejercicio * 19 Una función f es periódica con período T si la igualdad

$$f(x+T) = f(x)$$

se satisface para todo x.

1. Mostrar que si f es una función periódica de período $T > 0$, para cualquier elección de a se cumple
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$
2. Concluir que entonces
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$$
se satisface para cualquier elección de a y b.

Ejercicio 20 Para un número $a > 0$ consideramos la transformación del plano (x, y) en sí mismo definida por

$$T_a(x, y) = (ax, a^n y).$$

1. Para a igual a $1/2$, 2 y 4 dibujar la imagen por T_a del cuadrado $[0, 1]\times[0, 1]$, del rectánculo $[1, 2] \times [1, 3]$ y del círculo definido por $(x - 2)^2 - (y - 3)^2 \leq 1$.
2. Si una región R del plano (x, y) tiene área A, ¿cuál es el área de la imagen de R por T_a?
3. Mostrar que la imagen por T_a del gráfico de la función $f(x) = x^n$ es el propio gráfico. ¿Significa esto que T_a transforma cada punto del gráfico en sí mismo?
4. Mostrar que para cualquier valor de $x > 0$ se tiene
$$\int_0^x t^n \, dt = x^{n+1} \int_0^1 t^n \, dt. \tag{5}$$
Sugerencia: para $a = x$, transformar usando T_a la región
$$\{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^n\}.$$

5. Investigar si la fórmula (5) es válida también para $a \leq 0$. Si no lo es, hacer las adaptaciones necesarias al miembro de la derecha para conseguir una expresión correcta de la integral.

6. Obtener la fórmula (5) como una consecuencia de la proposición 3.

Ejercicio * 21 Para un número $a > 0$ consideramos la transformación del semiplano

$$S = \{(x, y); x > 0\}$$

del plano (x, y) en sí mismo, definida por

$$T_a(x, y) = (ax, x/a).$$

1. Para a igual a $1/2$, 2 y 4 dibujar la imagen por T_a del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, del rectánculo $[1, 2] \times [1, 3]$ y del círculo definido por $(x - 2)^2 - (y - 3)^2 \leq 1$.

2. Si una región R de S tiene área A, ¿cuál es el área de la imagen de R por T_a?

3. Mostrar que la imagen por T_a del gráfico de la función

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

   es el propio gráfico. ¿Significa esto que T_a transforma cada punto del gráfico en sí mismo?

4. Concluir de las partes anteriores que para cualquier valor de $a > 0$ se tiene

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \int_a^{ab} \frac{dx}{x}. \tag{6}$$

5. Volver a obtener la igualdad (6), ahora como una consecuencia de la proposicion 3.

6. Usar la fórmula (6) para mostrar que para cualquier pareja de números $a > 0$ y $b > 0$, se tiene que

$$\int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^b \frac{dx}{x}.$$

7. Para $x > 0$ definimos

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

   Mostrar que F tiene las siguientes dos propiedades:

   (a) $F(xy) = F(x) + F(y)$;

   (b) $F(1) = 0$.

   ¿Qué tipo de funciones tienen esta propiedad?

Ejercicio 22 Consideremos la función F del ejercicio anterior. Mostrar que

1. F es estrictamente creciente;

2. $\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$ (sugerencia: considerar las áreas de los rectángulos $[1, 2] \times [0, 1/2]$, $[2, 4] \times [0, 1/4]$, $[4, 8] \times [0, 1/8]$, etcétera);

3. $\lim_{x\to 0} F(x) = -\infty$ (sugerencia: adaptar la elección de los rectángulos sugerida para la parte anterior);

4. Si $y = F(x)$ definimos la función G por la igualdad $x = G(y)$. Mostrar que esta operación de "despejar la x" define una función

$$G : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

tal que

(a) $G(x + y) = G(x)G(y)$;

(b) $G(0) = 1$.

5. Hallar los límites de G cuando $x \to \pm\infty$.