Matemática **2013 – Primer semestre**

Hoja 7: regla de la cadena e integración por sustitución

1. Recorrido principal

Ejercicio 1 Definimos
$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = x^2.$$
Hallar las fórmulas de $f(g(x))$ y $g(f(x))$. Calcular las derivadas de $f(g(x))$ y $g(f(x))$ por dos procedimientos: derivando directamente las fórmulas y aplicando la regla de la cadena. Comparar los resultados.

Ejercicio 2

1. Calcular las derivadas de e^{x^2} y e^{-x^2}. Esbozar los gráficos de estas funciones.
2. Calcular las derivadas de $e^{\operatorname{sen} x}$ y $\cos(e^x)$. Hallar primitivas de $e^{\operatorname{sen} x}\cos x$, $e^x \operatorname{sen}(e^x)$.

Ejercicio 3 De las funciones f, g y sus derivadas se conocen los valores que aparecen en la tabla.

x	f	g	f'	g'
0	2	4	-2	3
1	7	16	-1	$4/3$
2	-1	0	$-1/2$	$1/3$
3	-1	2	$-1/6$	0

1. ¿Para qué valores de x es posible calcular $(g\circ f)(x)$ a partir de esa información, y qué valor toma la función compuesta $(g \circ f)(x)$?
2. ¿Para qué valores de x es posible calcular la derivada $(g\circ f)'(x)$ a partir de esa información, y qué valor toma $(g \circ f)'(x)$?
3. Contestar las mismas preguntas para $f \circ g$.

Ejercicio 4 Calcular
$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx, \qquad \int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx, \qquad \int_1^2 \left(3e^{-2x} + 5x\right)\,dx,$$

Ejercicio 5 Decimos que una función f es *par* si para todo $x \in \mathbb{R}$ se satisface $f(x) = f(-x)$. Mostrar que si f es par entonces
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx. \tag{1}$$
Interpretar geométricamente este resultado. Una función f es *impar* si para todo $x \in \mathbb{R}$ se satisface $f(x) = -f(-x)$. ¿Cuál es la fórmula análoga a 1 para funciones impares?

Ejercicio 6 Para resolver este ejercicio sugerimos representar gráficamente las situaciones que se describen en cada una de sus partes.

1. Definimos en el plano (x, y) la transformación
$$T(x, y) \mapsto (x/2, y)\,.$$
Si una región del plano tiene área A, ¿cuál es el área de su imagen por T?

2. Sean $f(x)$ una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, a y b dos números reales y R la región del plano encerrada entre $x = 2a$, $x = 2b$, el eje Ox y el gráfico de $f(x)$. Mostrar que la imagen de R por T es la región del plano encerrada entre $x = a$, $x = b$, el eje Ox y el gráfico de $f(2x)$.

3. Usar los argumentos geométricos de las partes anteriores para concluir que
$$\int_a^b f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} f(x)dx. \tag{2}$$

4. Mostrar la igualdad (2) usando la técnica del cambio de variables para el cálculo de integrales.

Ejercicio 7 Para una cierta función f, nos es conocido que
$$\int_0^{12} f(3x)\,dx = 1.$$
Determinar el valor de a para el que la integral
$$\int_0^a f(x)\,dx,$$
puede calcularse a partir de esa información y hallar el valor de la integral.

Ejercicio 8 Sea f una función par que satisface
$$\int_0^1 f(5x)dx = 3.$$
Determinar el valor de
$$\int_{-5}^5 f(x)dx.$$

A. 0;

B. 6/5;

C. 6;

D. 15;

E. 30.

Ejercicio 9 Mostrar que para cualquier función f y constantes a, b y c se satisface la igualdad

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx.$$

Hacerlo por medio de un argumento geométrico basado en la definición de integral como área bajo el gráfico de la función, y la relación que hay entre los gráficos de $f(x)$ y $f(x+c)$.

Ejercicio 10 Se sabe que

$$\int_1^2 f(x)dx = 5.$$

Entonces

A. $\int_1^2 f(x+7)dx = 5$;

B. $\int_8^9 f(x+7)dx = 5$;

C. $\int_{-6}^{-5} f(x+7)dx = 5$;

D. $\int_{-6}^{-5} f(x+7)dx = -5$;

Elegir la opción correcta.

Ejercicio 11 Calcular

$$\int_0^2 xe^{x^2}, \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) dx.$$

Ejercicio 12 Mostar que si f es una función derivable que nunca se anula, entonces

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Calcular una primitiva de $\tan x$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Ejercicio 13 Calcular las integrales

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^6}dx, \qquad \int_0^{\ln 4} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx, \qquad \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx, \qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x}\right) dx.$$

Ejercicio 14 Mostrar que $x|x|$ es una primitiva de $|x|$. Hacerlo por dos procedimientos:

1. calculando la derivada de $x|x|$ en cada punto;

2. para cada x, calculando la integral de valor absoluto en el intervalo comprendido entre 0 y x.

Ejercicio 15 Calcular la integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} |1-x|\, dx.$$

A. $-\dfrac{15}{8}$.

B. $\dfrac{9}{8}$.

C. $\dfrac{15}{8}$.

D. $\dfrac{17}{8}$.

E. $\dfrac{55}{8}$.

Ejercicio 16 Hallar, en función de x, una fórmula que se pueda evaluar directamente para calcular

$$F(x) = \int_{-2}^{x} (2 - |t+1|)\ dt.$$

Determinar el valor máximo que toma F y el punto en que lo alcanza. Hallar los puntos en que F se anula.

2. Más entrenamiento

Ejercicio 17 Consideremos

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = 2 + x^3.$$

1. Para $x \in \mathbb{R}$ definimos $u(x) = f(g(x))$ y $v(x) = g(f(x))$. Hallar fórmulas explícitas en x para u y para v.
2. Calcular las derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$ directamente, a partir de las fórmulas de $u(x)$ y $v(x)$ encontradas en la parte anterior.
3. Calcular las derivada $u'(x)$ y $v'(x)$ usando la regla de la cadena.

Ejercicio 18 Una función f es periódica con período T si la igualdad

$$f(x+T) = f(x)$$

se satisface para todo x.

1. Mostrar que si f es una función periódica de período $T > 0$, para cualquier elección de a se cumple
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$
2. Concluir que entonces
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$$
se satisface para cualquier elección de a y b.

Ejercicio 19 Sea f una función periódica de período 2 tal que

$$\int_0^2 f(x)dx = -5$$

y g una función periódica de período 3 tal que

$$\int_0^3 g(x)dx = 7.$$

Determinar el valor de

$$\int_0^{24} \left(f(x) + g(x)\right) dx.$$

Ejercicio 20 Sean f y g dos funciones periódicas de período 2, tales que f es par, g es impar y satisfacen

$$\int_0^1 f(x)dx = -7 \qquad \int_0^1 g(x)dx = 11.$$

Determinar el valor de

$$\int_{-1}^{2} (5f(x) - 2g(x))\, dx.$$

A. -83;

B. -61;

C. -105;

D. -12;

E. -32.

Ejercicio 21 Calcular las integrales

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx, \qquad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\tan x} + \tan x \right) dx, \qquad \int_9^{16} \frac{\sqrt{\sqrt{x} - 3}}{\sqrt{x}} dx.$$

Ejercicio 22 Hallar todos los valores de x en que se anula

$$F(x) = 10 + \int_5^x \left(-\frac{t}{2} - \left| \frac{t}{4} - 1 \right| \right) dt.$$

Ejercicio 23 Hallar primitivas de las funciones parte positiva x_+ y parte negativa x_-.

Ejercicio 24 Hallar el valor mínimo m y el valor máximo M que la función

$$F(x) = \int_0^x ((t-3)_- - 1)\ dt$$

toma en el intervalo $[-1, 9]$.

3. Extensiones y profundizaciones

Ejercicio 25 La interpretación de la función $\operatorname{sen} x$ como el seno de un cierto ángulo es válida solo cuando la medida del ángulo está expresada en radianes. Cuando la calculadora está en el modo `deg`, en que interpreta que las medidas de los ángulos están calculados en grados, cuando calcula el seno (o el coseno, o cualquier otra función trigonométrica), está usando una función diferente que la función seno del cálculo. Llamaremos $\operatorname{sen}_{\texttt{deg}}$ a esta función.

Entonces

A. $\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} x = \operatorname{sen}\left(\frac{180x}{\pi}\right)$;

B. $\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{180}\right)$;

C. $\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} x = \frac{180}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{180x}{\pi}\right)$;

D. $\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} x = \frac{\pi}{180}\operatorname{sen}(x)$.

Si con la calculadora en modo grados vamos haciendo

$$\frac{\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} 0{,}1}{0{,}1}, \quad \frac{\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} 0{,}01}{0{,}01}, \quad \frac{\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} 0{,}001}{0{,}001}, \quad \frac{\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} 0{,}0001}{0{,}0001}, \quad \frac{\operatorname{sen}_{\texttt{deg}} 0{,}00001}{0{,}00001}, \dots,$$

¿a qué número observaremos que se aproximan los resultados?

Ejercicio 26 MÁS SOBRE FUNCIONES PARES E IMPARES.

- Mostrar que una potencia x^n con n natural es par si y solo si n es par, e impar si y solo si n es impar.
- ¿Qué tipo de paridad tienen las funciones trigonométricas y la función exponencial?
- Mostrar que la derivada de una función par es impar, y viceversa.
- Mostrar que la única función que es a la vez par e impar es la función constante 0.

Ejercicio 27

1. Para $x > 0$, derivar la igualdad
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x,$$
y determinar el valor de la derivada
$$\frac{d\sqrt{x}}{dx}, \quad x > 0.$$

2. Mostrar que para $x > 0$ y $\Delta x > -x$ se satisface
$$\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \tag{3}$$
y utilizar la definición de derivada para calcular la derivada de la raíz cuadrada por un camino diferente al de la parte 1. Sugerencia: para obtener la igualdad (3), multiplicar el numerador y el denominador del miembro de la izquierda por $\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}$. Para terminar el argumento, usar que $\sqrt{x+\Delta x} \to \sqrt{x}$ cuando $\Delta x \to 0$.

Ejercicio 28 Utilizar la regla de la cadena para calcular la derivada de $\sqrt[3]{x}$, adaptando los argumentos de la parte 1 ejercicio 27.

Ejercicio 29 El logaritmo $\ln x$ y la exponencia e^x son funciones inversas una de la otra.

1. Mostrar que la igualdad
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$
implica
$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
2. Mostrar que la igualdad
$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
implica
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$
3. Interpretar gráficamente estas relaciones.

Ejercicio 30 Mostrar las siguientes fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas:

1. $\operatorname{arc\,sen}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$;
2. $\operatorname{arc\,cos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$;
3. $\operatorname{arc\,tg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 31 Derivada de un cociente

1. Mostrar directamente, a partir del cálculo de los cocientes incrementales y su límite, que
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$
Sugerencia: usar la identidad
$$\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x^2 + x\Delta x}$$
para escribir los incrementos de $1/x$.
2. Usar la regla de la cadena para mostrar que
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}. \tag{4}$$
3. A partir de la fórmula (4) y la fórmula de derivación del producto de funciones demostrar que
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \tag{5}$$
Sugerencia:
$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}.$$

Ejercicio 32 Calcular

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}dt,$$

para $x \in (-1, 1)$.

1. Hacer el cálculo sin recurrir al cálculo diferencial, interpretando la integral como el valor del área de una cierta región del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el plano (x, y).

2. Hacer el cálculo introduciendo el cambio de variable $x = \cos\theta$. Sugerencia: para evaluar las integrales que resultan del cambio puede ser útil tener presente que

$$\cos^2\theta = \frac{1 + cos(2\theta)}{2}.$$

3. Hacer el cálculo aplicando integración por partes. Sugerencia: interpretar

$$\sqrt{1-t^2} = 1 \times \sqrt{1-t^2},$$

   y aplicar partes usando una primitiva de 1 y la derivada de $\sqrt{1-t^2}$.

4. Para $R > 0$ y $x \in (-R, R)$ calcular

$$\int_0^x \sqrt{R^2 - t^2}dt.$$