Hoja 2: integrales de funciones lineales a trozos

1 Gráficos e integrales

Ejercicio * 1

Sea f la función cuyo gráfico se representa en la figura 1.

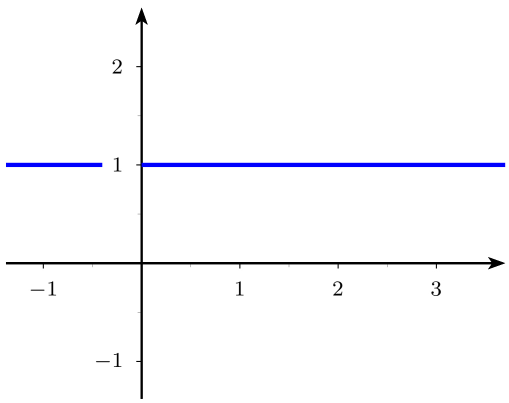


Figura 1

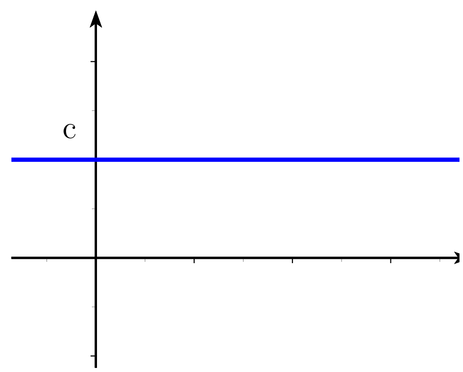


Figura 2

1. Para cada valor de $x \in \mathbb{R}$, calcular
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$
2. Graficar $F(x)$.
3. Para un valor $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, calcular, para cada valor de $x \in \mathbb{R}$,
$$G(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$
4. Graficar $G(x)$.
5. Calcular la diferencia $G - F$ entre las funciones G y F. Interpretarla en términos del gráfico de la función f de la parte 1.
6. Mostrar que para cualquier valor de las constantes a y b se satisfacen las igualdades
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$
Interpretar geométricamente este resultado.
7. Calcular la pendiente de los gráficos de F y G. ¿Cómo se relaciona esta pendiente con la función f de la parte 1?
8. Repetir todas las partes anteriores de este ejercicio para la función f que se representa en la figura 2, donde c es una constante cualquiera. Discutir los casos $c < 0$, $c = 0$ y $c > 0$.

Ejercicio * 2 Repetir las partes 1 a 6 del ejercicio 1 para la función que se representa en la figura 3.

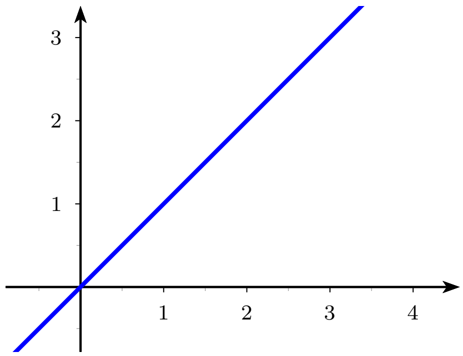


Figura 3

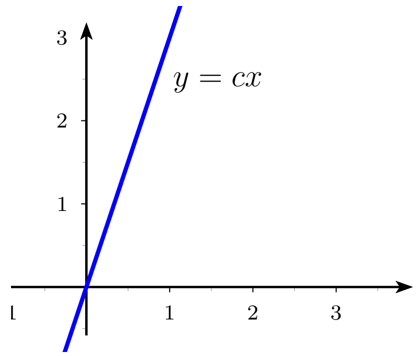


Figura 4

1. ¿Qué dificultad se encuentra ahora cuando se intenta considerar para esta función la pregunta que se plantea en la parte 7 del ejercicio 1?

2. ¿Qué ocurre cuando se intenta determinar **la** pendiente del gráfico de F o de G?

3. Generalizar los resultados hallados para cualquier de las funciones que se representan en la figura 4, donde c es una constante.

Ejercicio * 3 Para la función f cuyo gráfico se representa en la figura 5,

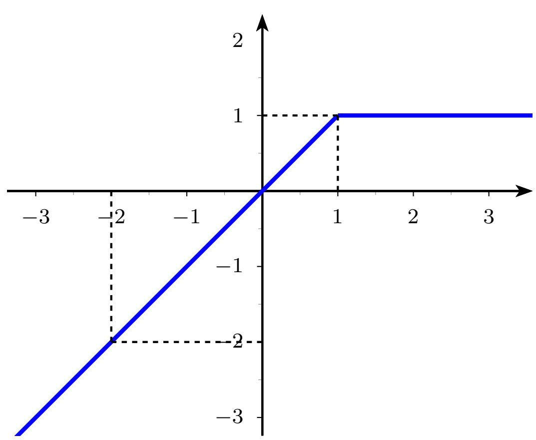


Figura 5

calcular la integral

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx.$$

Ejercicio 4 Repetir las partes 1 a 6 del ejercicio 22 para cada una de las funciones cuyos gráficos se representan en la figuras 6 7 8 y 9.

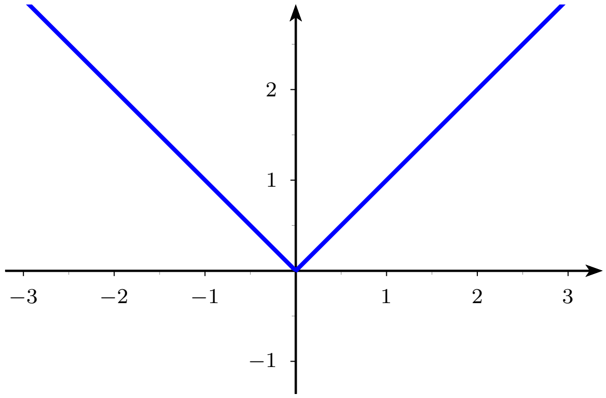


Figura 6

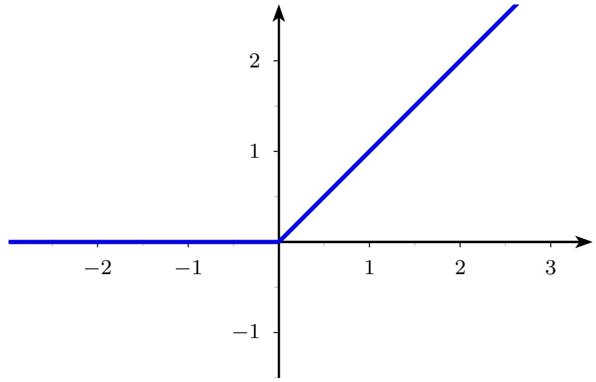


Figura 7

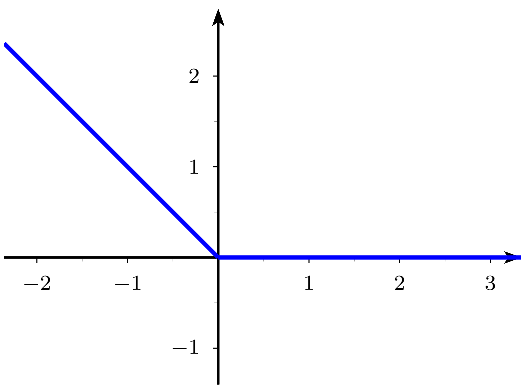


Figura 8

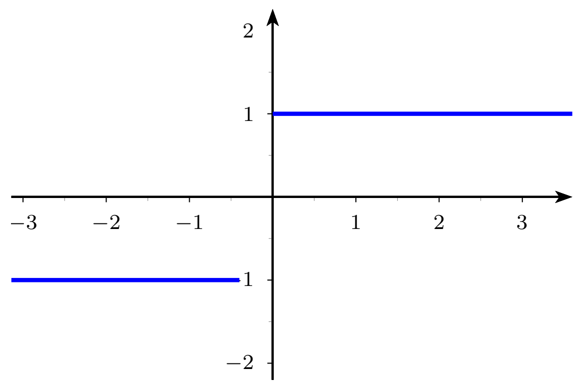


Figura 9

¿Qué dificultad se encuentra ahora cuando se intenta considerar para esta función la pregunta que se plantea en la parte 7 de ese mismo ejercicio?

Ejercicio * 5 Para la función que se representa en la figura 10,

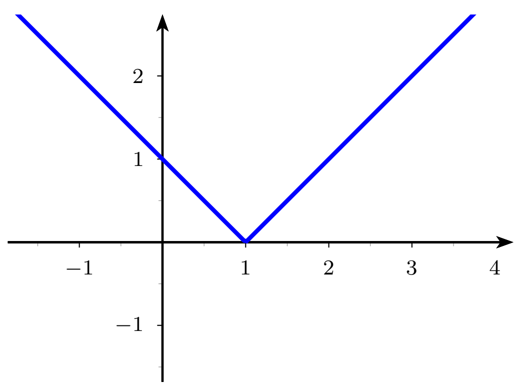


Figura 10

calcular la integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} f(x)\,dx.$$

Ejercicio * 6

Para la función f cuyo gráfico se representa en la figura 11:

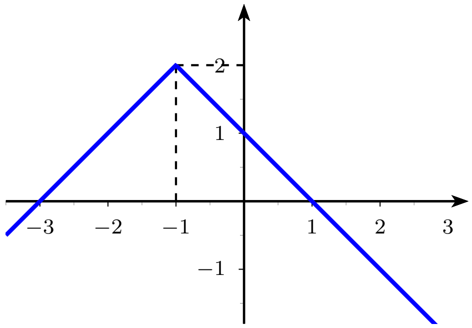


Figura 11

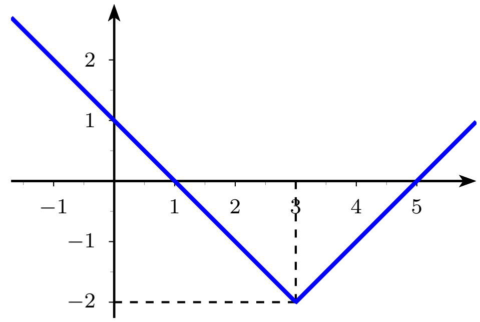


Figura 12

1. Calcular
$$\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt, \qquad \int_{-2}^{0} f(t)\,dt, \int_{-2}^{2} f(t)\,dt.$$
2. Definimos
$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt.$$
Calcular
$$F(2), \quad F(0), \quad F(-1), \quad F(-2).$$
3. Para $x \leq -1$, calcular $F(x)$.
4. Para $x \geq -1$, calcular $F(x)$.
5. La función F, ¿es continua en $x = -1$?
6. Hallar todos los valores de x en que $F(x)$ se anula.

Ejercicio 7 Para la función cuyo gráfico aparece en la figura 12 se define

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt.$$

1. Calcular $F(1)$;
2. Ubicar el punto $(1, F(1))$ en el plano (x, y);
3. Repetir la parte anterior para los puntos $(x, F(x))$, $x = -1, 0, 2, 3, 4$;
4. Repetir para $x = -1/2, 1/2, 3/2$.
5. Esbozar el gráfico de $F(x)$.
6. Dar una expresión analítica para $F(x)$ y contrastar con el resultado de la parte anterior.
7. ¿Qué relación hay entre el crecimiento de F y los valores de f? ¿En qué regiones crece F y en qué regiones decrece? ¿En qué regiones crece más rápido?

Ejercicio 8 Sea f la función cuyo gráfico aparece representado en la figura 13.

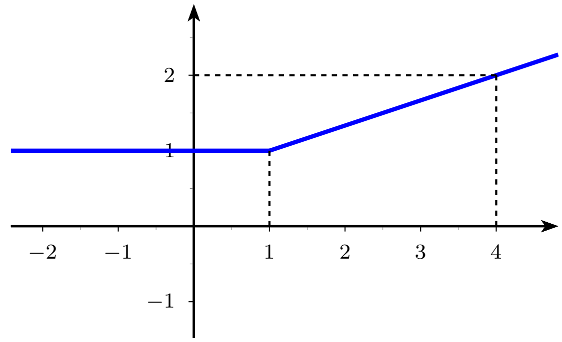


Figura 13

1. Dibujar el gráfico de la función F definida por

$$F(x) = \int_2^x f(t)\,dt.$$

2. Calcular $F(0)$ e identificar los puntos del gráfico de F que caen sobre el eje Ox.

3. Hallar fórmulas explícitas, en función de x, que permitan calcular directamente $F(x)$. Verificar que las fórmulas predicen los resultados hallados en la parte anterior.

Ejercicio * 9 Sea f la función cuyo gráfico aparece en la figura 14.

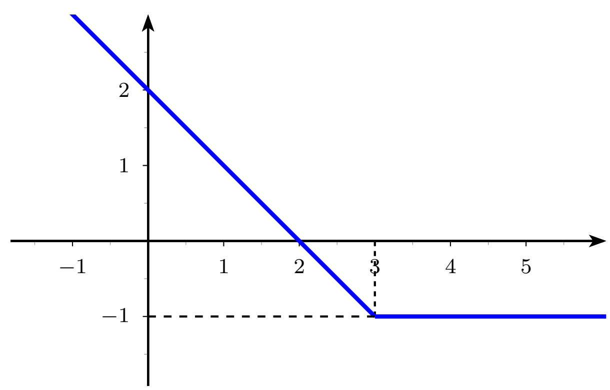


Figura 14

Hallar el valor mínimo m y el valor máximo M que la función

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

toma en el intervalo $[-1, 9]$.

2 Revisión de puntos y coordenadas en el plano

Ejercicio * 10

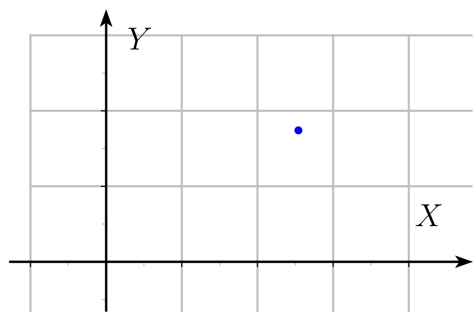
1. Ubicar en el plano (x, y) los puntos $(0, 0)$, $(-1, 3)$ y $(1/2, 4/3)$.

2. Identificar sobre el mismo plano todos los puntos (x, y) que satisfacen la condición $x = -1$. Decidir cuál de los puntos dibujados antes la satisface.

3. Identificar sobre el mismo plano todos los puntos (x, y) que satisfacen la condición $x = y$. Decidir cuál de los puntos dibujados antes la satisfacen.

4. Hallar el punto que satisface $x = -1$ y $x = y$. Ubicarlo en el plano (x, y).

Ejercicio * 11 En la figura se representa un cierto punto (x_0, y_0) del plano (x, y).



1. Ubicar dónde deben representarse en el dibujo los puntos $(x_0, 0)$, $(0, y_0)$, $(2x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, (y_0, x_0), $(-y_0, x_0)$, $(-x_0, -y_0)$, $(x_0 + 1, y)$.

2. Discutir según el valor de $a \in \mathbb{R}$ la posicion de $(x_0 + a, y_0)$, de (x_0, ay_0) y de (ax_0, ay_0).

3. Identificar y dibujar los distintos conjuntos de puntos (x, y) del plano que satisfacen las igualdades

   (a) $x = x_0$;

   (b) $y = y_0$;

   (c) $x = y_0$;

   (d) $y = \dfrac{y_0}{x_0} x$;

   (e) $y = \dfrac{y_0}{x_0} x + 1$;

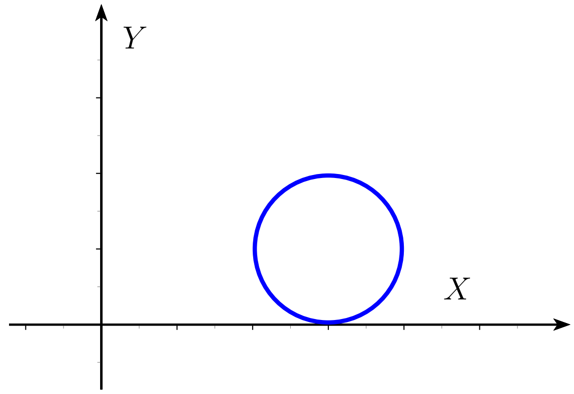
   (f) $y = 2\dfrac{y_0}{x_0} x$;

   (g) $y = 2\dfrac{y_0}{x_0} x + 1$;

   (h) $x + y = x_0 + y_0$;

   (i) $xy = x_0 y_0$;

Ejercicio 12 En la figura se representa una circunferencia del plano (x, y).



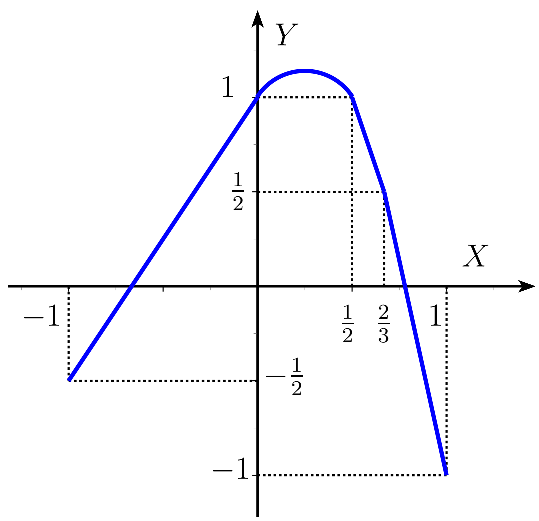
Dibujar la figura en la que se transforma la circunferencia como resultado de aplicar a todos sus puntos cada una de las transformaciones que se detallan a continuación

1. $(x, y) \mapsto (x, 0)$;
2. $(x, y) \mapsto (2x, y)$;
3. $(x, y) \mapsto (x, -y)$;
4. $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$.

2.1 Gráficos de funciones

Ejercicio * 13 ¿Si sabemos que $f(-3) = 4$, qué punto del gráfico de f podemos representar?

Ejercicio * 14 A partir del gráfico de la figura, determinar $f(-1)$ y $f(1/2)$.



Ejercicio 15 Se sabe que la función f es estrictamente creciente. Si $f(1) = 2$, dibujar el conjunto de puntos de plano (x, y) que podrían representar el punto del gráfico de f que corresponde a $f(3)$. Para cada uno de esos puntos, dar una ejemplo de una función f estrictamente creciente que tenga a ese punto en su gráfico.

Ejercicio 16 La función de Dirichlet d se define para todo $x \in \mathbb{R}$ como

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Las letras $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ designan, respectivamente, al conjunto de los números racionales y al conjunto de los números racionales. Representar algunos puntos del gráfico de d. ¿Qué ocurre cuando en un intervalo cualquiera, por ejemplo el $(0, 1)$, se intenta representar a **todos** los puntos del gráfico de d?

Ejercicio 17 Cualquier número real diferente de 0 tiene una única expresión decimal infinita, por lo que podemos definir una función f de la siguiente manera:

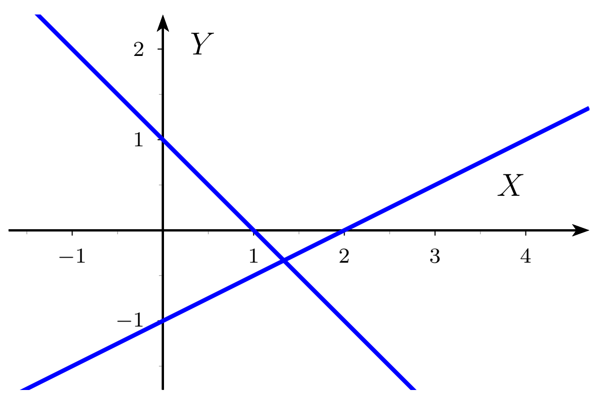
- para cualquier número $x \neq 0$, $f(x)$ es igual al tercer dígito después de la coma en la expresión decimal infinita de x;
- f(0)=0.

1. Ubicar en el plano (x, y) los puntos del gráfico de f que corresponden a $x = -1$, $x = 0$, $x = 3/4$, $x = 4/3$, $x = \sqrt{2}$, $x = 2$, $x = e$ y $x = \pi$.
2. Esbozar el gráfico de f.

Ejercicio * 18 En este ejercicio consideraremos la función lineal $f(x) = ax + b$ tal que los dos puntos $(4, 7)$ y $(-1, 1)$ pertenecen a su gráfico.

1. Dibujar en el plano el gráfico de f.
2. Hallar a y b.
3. Hallar el valor de la función en 0 y comprobar que el punto que corresponde al gráfico efectivamente cae sobre la línea que une $(4, 7)$ con $(-1, 1)$.
4. Hallar el incremento Δf de f entre $x = -1$ y $x = 4$ y el incremento entre $x = -1$ y $x = 0$. Comparar ambos incrementos. Interpretar gráficamente.
5. Hallar los cocientes incrementales $\Delta f / \Delta x$ para f entre $x = -1$ y $x = 4$, y entre $x = -1$ y $x = 0$. Comparar ambos números. Interpretar gráficamente.

Ejercicio * 19 Dadas las dos gráficas que se representan en la figura,



identificar a qué funciones lineales corresponden. Hallar las coordenadas del punto de corte de los dos gráficos.

Ejercicio * 20 Graficar las funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ por las fórmulas

$$f(x) = \begin{cases} x/2 - 3, & x < 4, \\ x - 5, & x \geq 4, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x < 4, \\ x, & x \geq 4. \end{cases}$$

Ejercicio 21

1. Ubicar los puntos del gráfico de $f(x) = x^2$ que corresponden a $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = \sqrt{2}$ y $x = 2$.

2. Esbozar el gráfico de la función.

3. Hallar el incremento Δf de la función entre parejas de puntos consecutivos de los cinco listados.

4. Para cada una de las mismas parejas de la parte anterior, hallar el cociente incremental $\Delta f / \Delta x$. Hallar la pendiente media entre $x = -1$ y $x = 1$.

3 Fórmulas e integrales

Ejercicio * 22

1. Graficar $f(x) = 1$.

2. Para cada valor de $x \in \mathbb{R}$, calcular

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

3. Graficar $F(x)$.

4. Para un valor $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, calcular, para cada valor de $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt.$$

5. Graficar $G(x)$.

6. Calcular la diferencia $G - F$ entre las funciones G y F. Interpretarla en términos del gráfico de la función f de la parte 1.

7. Mostrar que para cualquier valor de las constantes a y b se satisfacen las igualdades

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

Interpretar geométricamente este resultado.

8. Calcular la pendiente de los gráficos de F y G. ¿Cómo se relaciona esta pendiente con la función f de la parte 1?

9. Repetir todas las partes anteriores de este ejercicio para la función

$$f(x) = c,$$

donde c es una constante cualquiera. Discutir los casos $c < 0$, $c = 0$ y $c > 0$.

Ejercicio * 23 Repetir las partes 1 a 7 del ejercicio 22 para la función

$$f(x) = x.$$

¿Qué dificultad se encuentra ahora cuando se intenta considerar para esta función la pregunta que se plantea en la parte 8 de ese mismo ejercicio? ¿Qué ocurre cuando se intenta determinar **la** pendiente del gráfico de F o de G? Generalizar los resultados hallados para funciones de la forma

$$f(x) = cx,$$

donde c es una constante cualquiera.

Ejercicio * 24

1. Para $x \in [0,4]$, calcular la función
$$F(x) = 10 + \int_0^x (-5)dt.$$
Dibujar el gráfico de F sobre el intervalo $[0,4]$.

2. Una barra recta de 4 m de longitud apoyada en sus extremos soporta una carga distribuida de 5 daN/m. Está equilibrada por reacciones verticales de 10 daN en cada uno de sus dos apoyos. Calcular el cortante en cada punto x de la barra, donde x indica la distancia en metros a su extremo izquierdo. Graficar el cortante.

3. La trayectoria de un móvil que se desplaza sobre una línea recta se describe por medio de una coordenada p que indica su posición relativa a un cierto origen O desde el que se mide p. El valor de p es positivo cuando el móvil está a la derecha del origen, y negativo cuando está a la izquierda. Si el movil parte de una posición inicial $p(0) =$ 10 m y retrocede durante 4 segundos con una velocidad de -5 m/s (las velocidades son negativas cuando retrocede y positivas cuando avanza), hallar la función $p(t)$ que describe la posición p en función del tiempo t para $t \in [0,4]$. Graficar p sobre este intervalo.

4. Comparar entre sí las tres partes anteriores de este ejercicio.

Ejercicio * 25

1. Para $x \in [0,10]$, calcular la función
$$F(x) = \int_0^x 3t\,dt.$$
Dibujar el gráfico de F sobre el intervalo $[0,10]$.

2. Una barra recta de 10 m de longitud está empotrada en su extremo de la derecha y recibe desde abajo una presión que va creciendo linealmente a medida que nos alejamos del extremo de la barra, de un modo tal que la pieza queda sometida a un esfuezo distribuido de $3x$ daN/m, que la empuja hacia arriba (la situación es irreal como problema de cálculo de estructuras, pero nos ayudará a ilustrar el punto que pretendemos mostrar con estos ejemplos) . Calcular el cortante en cada punto x de la barra, donde x indica la distancia en metros a su extremo izquierdo. Graficar el cortante. ¿Cuál tiene que ser la reacción vertical del empotramiento, para equilibrar la carga de la barra?

3. Un móvil parte del reposo en una posición inicial $p(0) = 0$ m y durante 10 segundos avanza acelerándose de manera constante, de modo que en el instante t su velocidad es de $3t$ m/s. Hallar la función $p(t)$ que describe la posición p en función del tiempo t para $t \in [0,10]$. Averiguar a que distancia está del origen cuando $t = 10$.

4. Comparar entre sí las tres partes anteriores de este ejercicio.

4 Fórmulas e integrales de funciones lineales a trozos

Ejercicio * 26 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1; \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Graficar f.
2. La integral

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx,$$

toma el valor

(A) $-\dfrac{1}{2}$;

(B) 0

(C) $\dfrac{1}{2}$;

(D) $\dfrac{7}{2}$;

Ejercicio * 27 Para las funciones f y g del ejercicio 20, calcular las funciones

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt; \quad G(x) = \int_0^x g(t)\, dt,$$

y graficarlas.

El valor que la función *valor absoluto* toma en cada $x \in \mathbb{R}$ se indica por el símbolo $|x|$, y está definido por

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 0; \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Ejercicio 28 Repetir las partes 1 a 7 del ejercicio 22 para la función

$$f(x) = |x|.$$

¿Qué dificultad se encuentra ahora cuando se intenta considerar para esta función la pregunta que se plantea en la parte 8 de ese mismo ejercicio?

Ejercicio * 29 Calcular la integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} |1-x|\, dx.$$

Respuesta:

1. $-\dfrac{15}{8}$.
2. $\dfrac{15}{8}$.
3. $\dfrac{17}{8}$.
4. $\dfrac{55}{8}$.

Ejercicio 30 Calcular $\displaystyle\int_0^3 |\pi x - e|\, dx$.

Ejercicio * 31

1. Graficar la función
$$f(t) = 2 - |t+1|.$$
En particular, identificar los puntos en que se anula, las regiones en que es positiva y en que es negativa.
2. Definimos
$$F(x) = \int_{-2}^{x} (2 - |t+1|)\ dt.$$
3. Hallar para cada $x \in \mathbb{R}$ una expresión que permita calcular $F(x)$.
4. Identificar cuál es el punto de $[0, +\infty)$ en que F alcanza su valor máximo. Calcular ese valor, por dos procedimientos:
   (a) interpretando los valores de F como áreas signadas e identificando cuál es el área que hay que calcular para resolver estar parte del ejercicio;
   (b) evaluando la integral en el valor de x adecuado, usando el resultado de la parte 3.

Ejercicio 32 Para las funciones

$$f(x) = |x-3| - 2, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Calcular $F(-1)$, $F(1)$ y $F(3/2)$;
2. Esbozar el gráfico de $F(x)$.
3. Dar una expresión analítica para $F(x)$ y contrastar con el resultado de la parte anterior.
4. ¿Qué relación hay entre el crecimiento de F y los valores de f? ¿En qué regiones crece F y en qué regiones decrece? ¿En qué regiones crece más rápido?

La *parte positiva* x_+ y la *parte negativa* x_- de cada número real x están definidas por las fórmulas

$$x_+ = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0; \\ x, & \text{si } x \geq 0; \end{cases} \qquad x_- = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 0; \\ 0, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Prestar especial atención al hecho de que la parte negativa de un número es siempre mayor o igual que 0.

Ejercicio * 33 La función f del ejercicio 26 puede expresarse en la forma

$$f(x) = a(x-1)_- + b,$$

para una elección adecuada de a y b. Determinar cuáles son esos valores de a y b.

Ejercicio 34

1. Mostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se satisface

$$x = x_+ - x_-, \qquad |x| = x_+ + x_-.$$

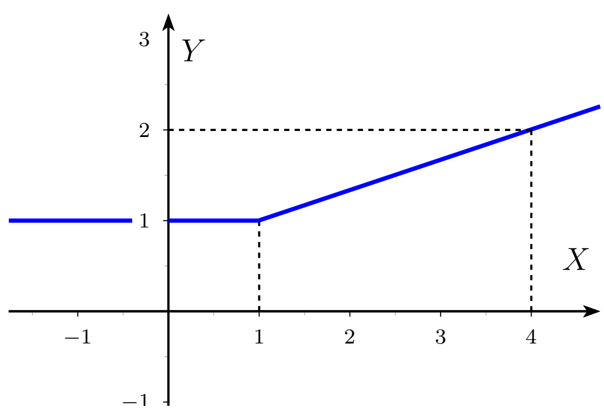
2. ¿Cuáles son las expresiones de x_+ y x_- en términos de x y $|x|$?

3. Relacionar los resultados de las partes anteriores los gráficos de las funciones identidad, valor absoluto, parte positiva y parte negativa.

Ejercicio * 35 Repetir las partes 1 a 7 del ejercicio 22 para las funciones f y g definidas por $f(x) = x_+$ y $g(x) = x_-$. ¿Qué dificultad se encuentra ahora cuando se intenta considerar para estas funciones la pregunta que se plantea en la parte 8 de ese mismo ejercicio?

Ejercicio 36

1. Dar dos expresiones analíticas para la función que corresponde al siguiente gráfico:



   (a) la primera de ellas de la forma

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq x_0, \\ cx + d, & x \geq x_0, \end{cases}$$

   para valores adecuados de las constantes a, b, c, d y x_0 que se determinarán.

   (b) la segunda en forma concisa, usando algunas de las funciones valor absoluto, parte positiva o parte negativa.

2. Dibujar el gráfico de la función F definida por

$$F(x) = \int_2^x f(t)\, dt.$$

3. Calcular $F(0)$ e identificar los puntos del gráfico de F que caen sobre el eje Ox.

4. Hallar fórmulas explícitas, en función de x, que permitan calcular directamente $F(x)$. Verificar que las fórmula predicen los resultados hallados en la parte anterior.

Ejercicio * 37 Hallar el valor mínimo m y el valor máximo M que la función

$$F(x) = \int_0^x ((t-3)_- - 1)\ dt$$

toma en el intervalo $[-1, 9]$.

La función signo, que indicaremos con el símbolo sgn, está definida por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ejercicio 38 ¿Qué función resulta cuando para cada $x \in \mathbb{R}$ se forma el producto de x con $\operatorname{sgn}(x)$? ¿Es cierto que si el producto de dos funciones es continua, entonces cada una de ellas debe serlo? Si el resultado es cierto dar un argumento que lo justifique. Si es falso, dar dos ejemplos que muestren su invalidez.

Ejercicio * 39 Repetir las partes 1 a 7 del ejercicio 22 para la función sgn. La función F que se obtiene ahora, ¿es continua o discontinua en $x = 0$? ¿Y la función sgn? ¿De qué manera se refleja en la función F el comportamiento de sgn cerca de $x = 0$? ¿Qué dificultad se encuentra ahora cuando se intenta considerar para estas funciones la pregunta que se plantea en la parte 8 de ese mismo ejercicio?

5 Un par de ejercicios más para entrenar

Ejercicio 40 Se considera la función F definida por

$$F(x) = \int_{-3}^x (|2t+4| - 4)\ dt.$$

1. Hallar el valor máximo y el valor mínimo que toma F en el intervalo $[-5, 3]$.

2. Hallar todos los valores de x para los que $F(x) = 0$.

Ejercicio 41 Para $x \in \mathbb{R}$ definimos las funciones

$$f(x) = -|x+1| + \frac{x}{2} + \frac{3}{2}, \quad F(x) = \int_{-2}^x f(t)\, dt.$$

Calcular $F(-3)$, $F(1)$. Determinar los puntos donde F se anula. Hallar los valores mínimo y máximo de F en el intervalo $[-2, 4]$ y los puntos en que se alcanzan. Graficar F.