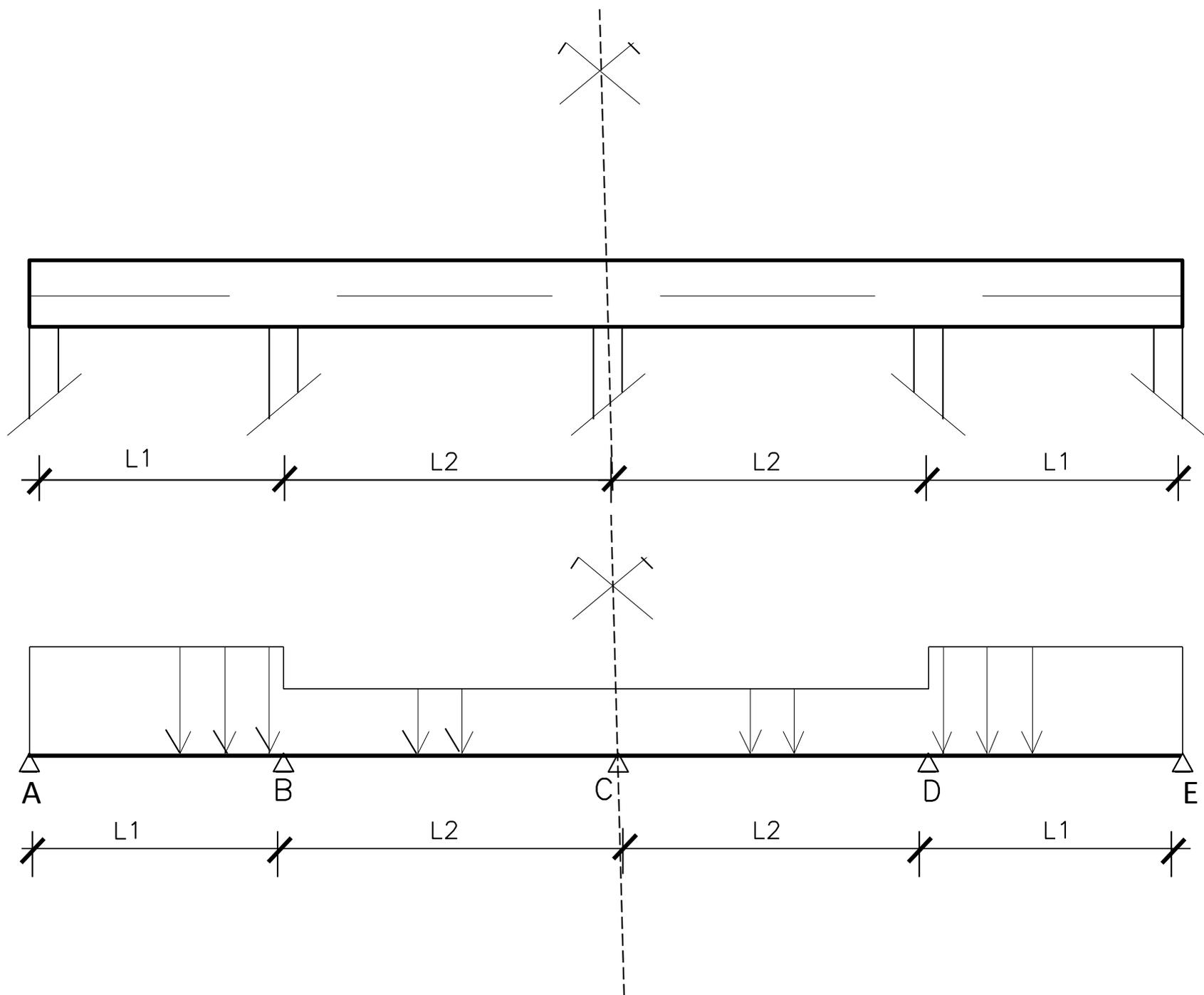


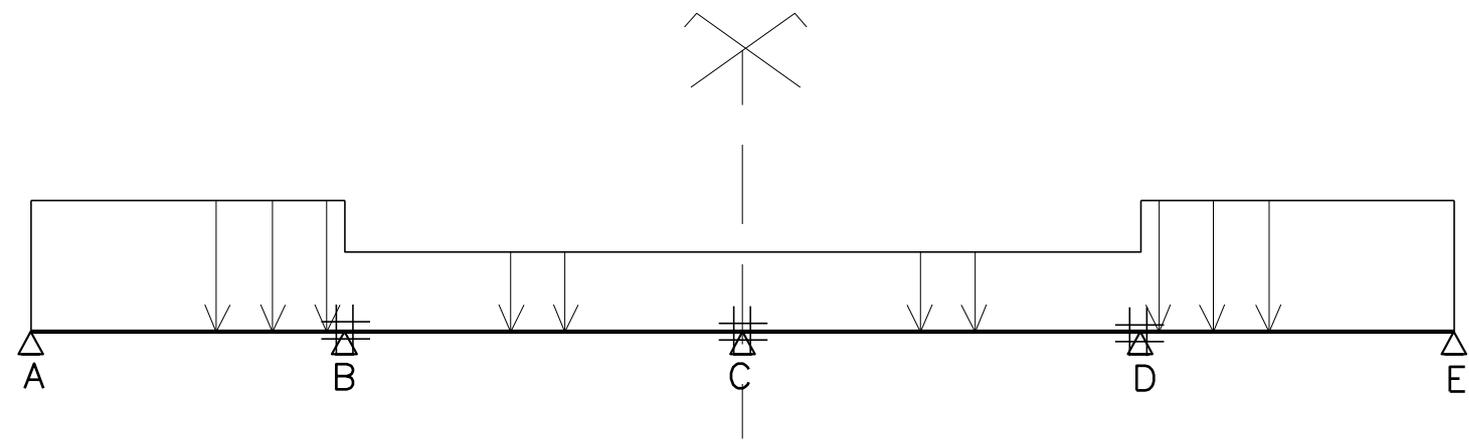
ESTRUCTURAS |

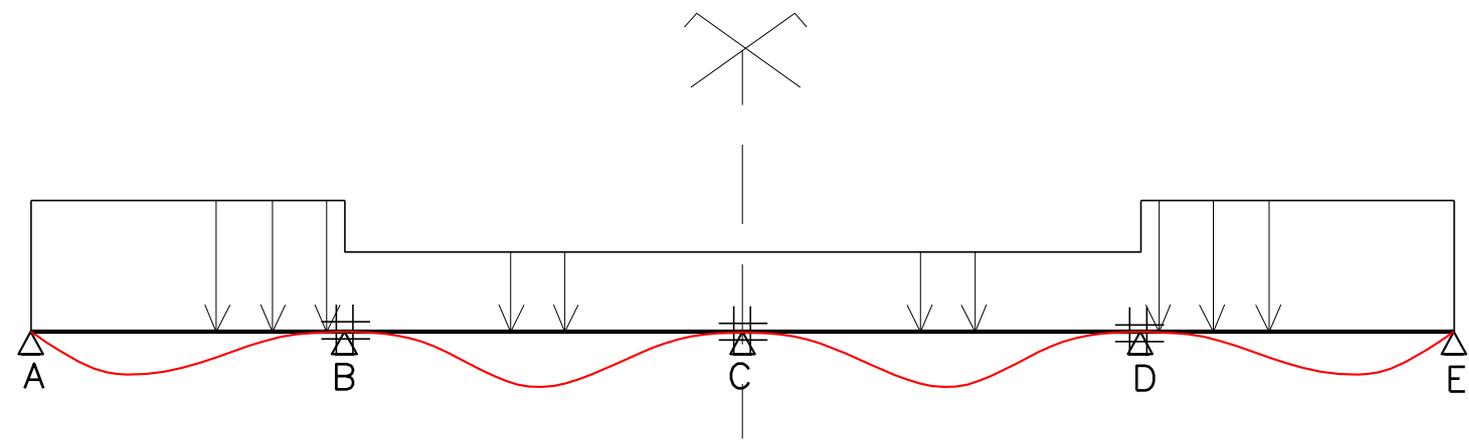
MÉTODO DE CROSS CASOS DE SIMETRÍA

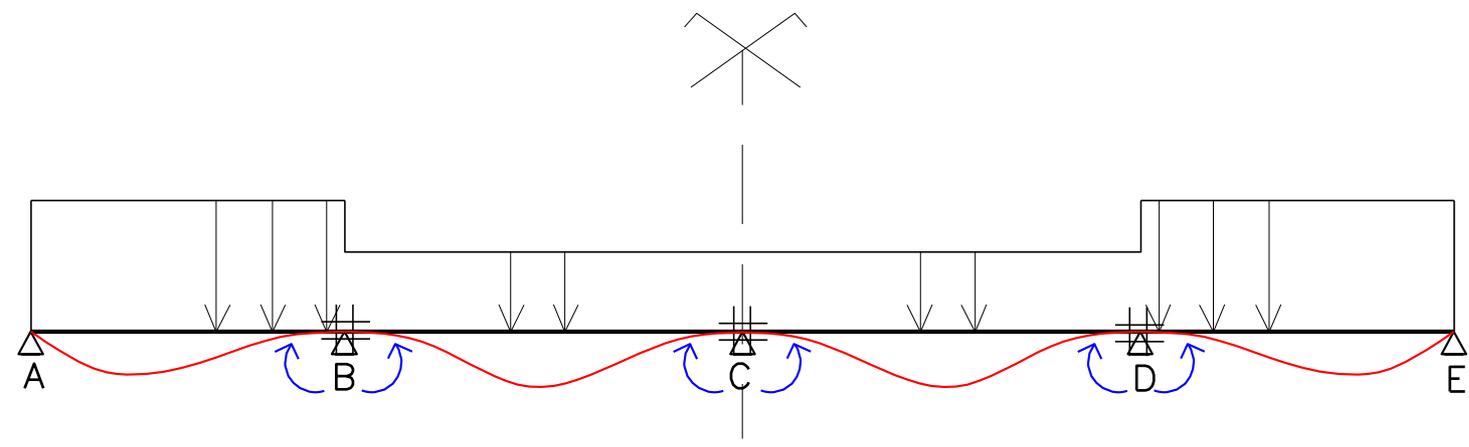
En estructuras simétricas (de forma, de carga, de esquema, etc.) el procedimiento de Cross se simplifica notablemente, por lo cual se analizarán a continuación las dos situaciones que puede presentarse:

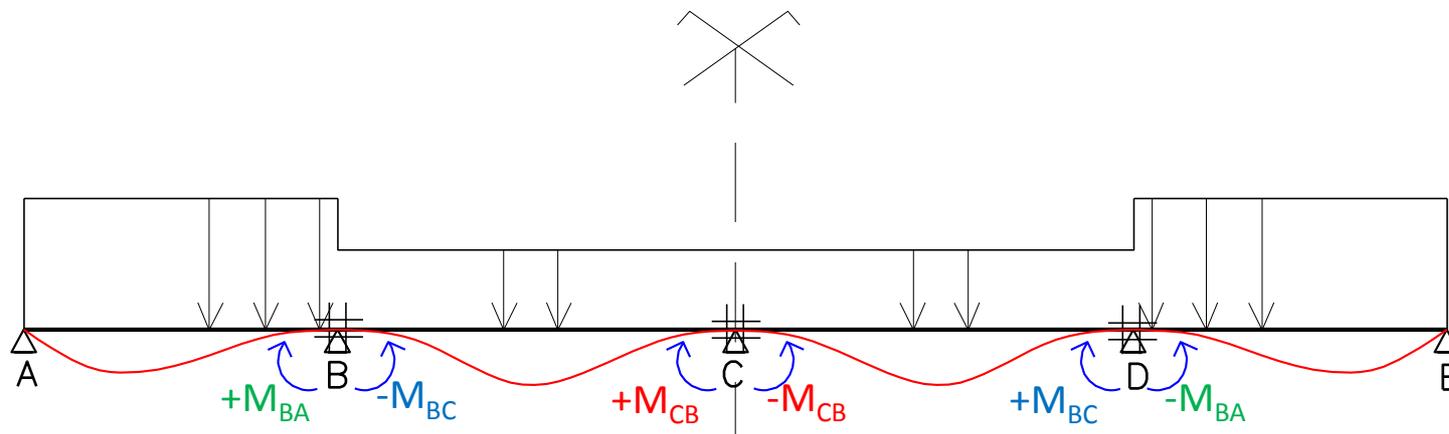
- a) Eje que pasa por un nudo**
- b) Eje que corta a una barra**



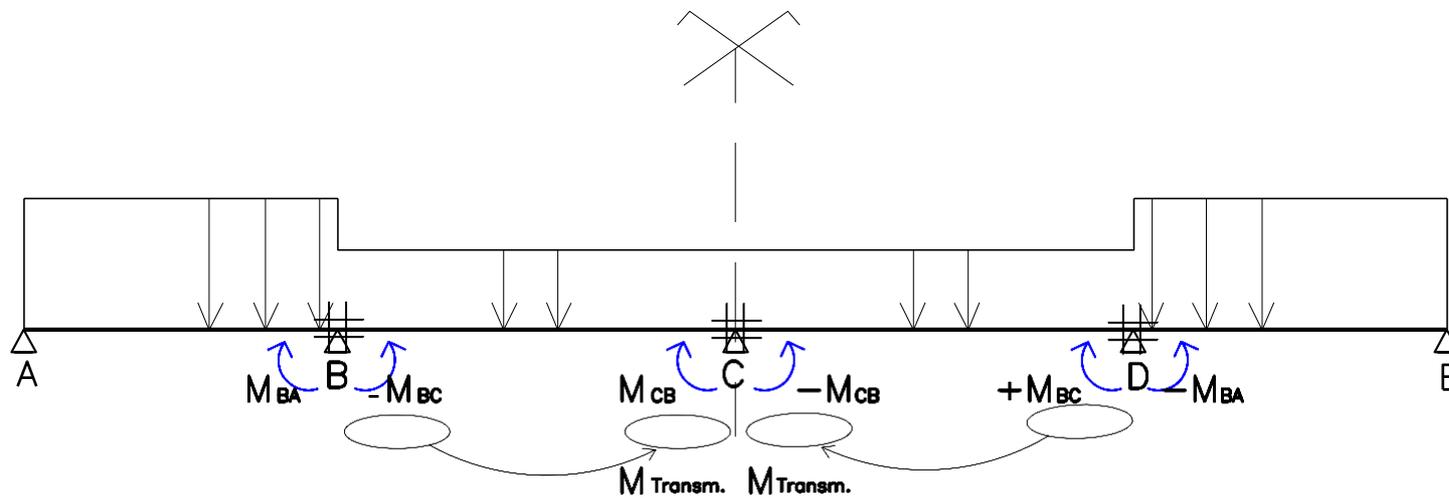






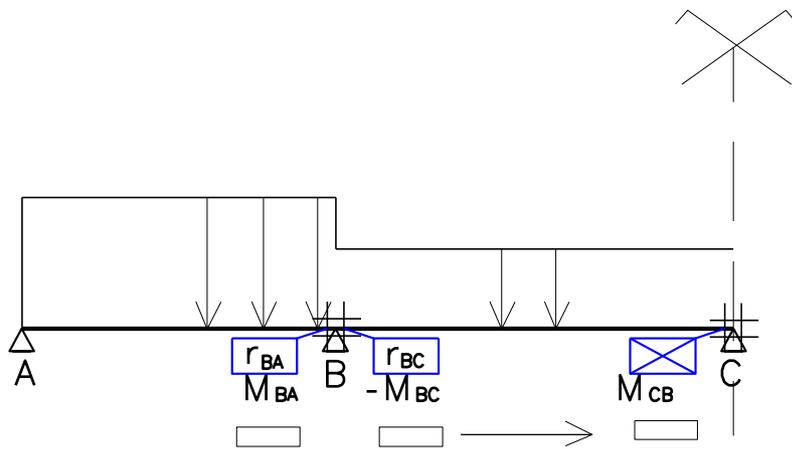


Los momentos freno son iguales, pero de sentidos contrarios



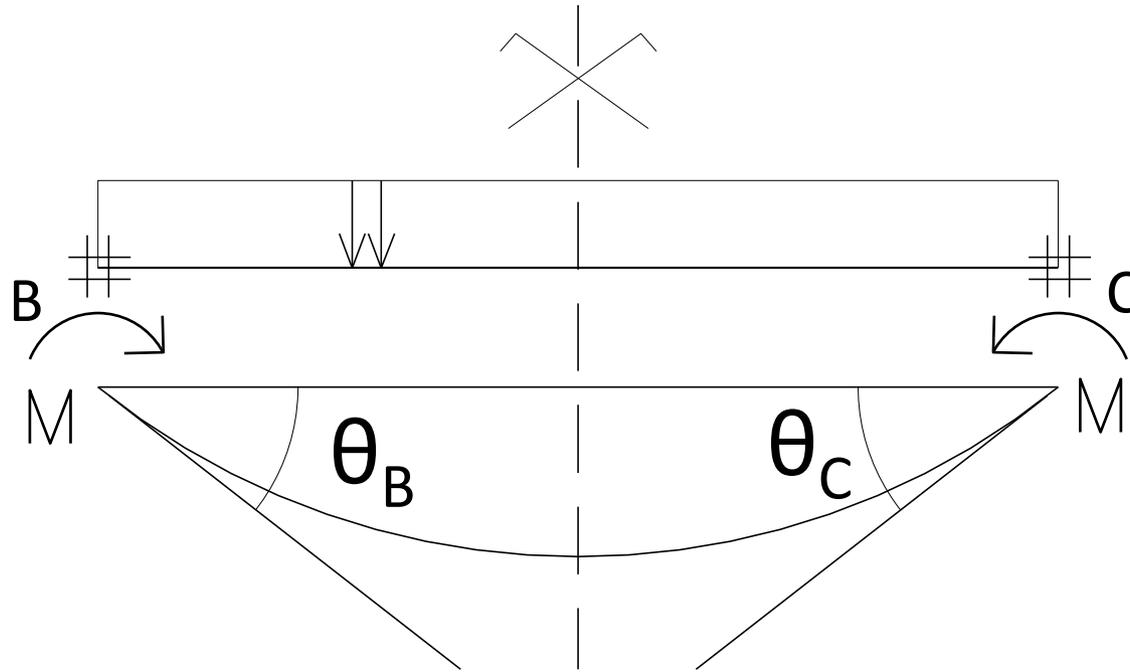
Los momentos freno son iguales, pero de sentidos contrarios

A cada lado del apoyo llegarán momentos transmitidos, desde el otro extremo de cada tramo, iguales, pero también de sentido contrario.

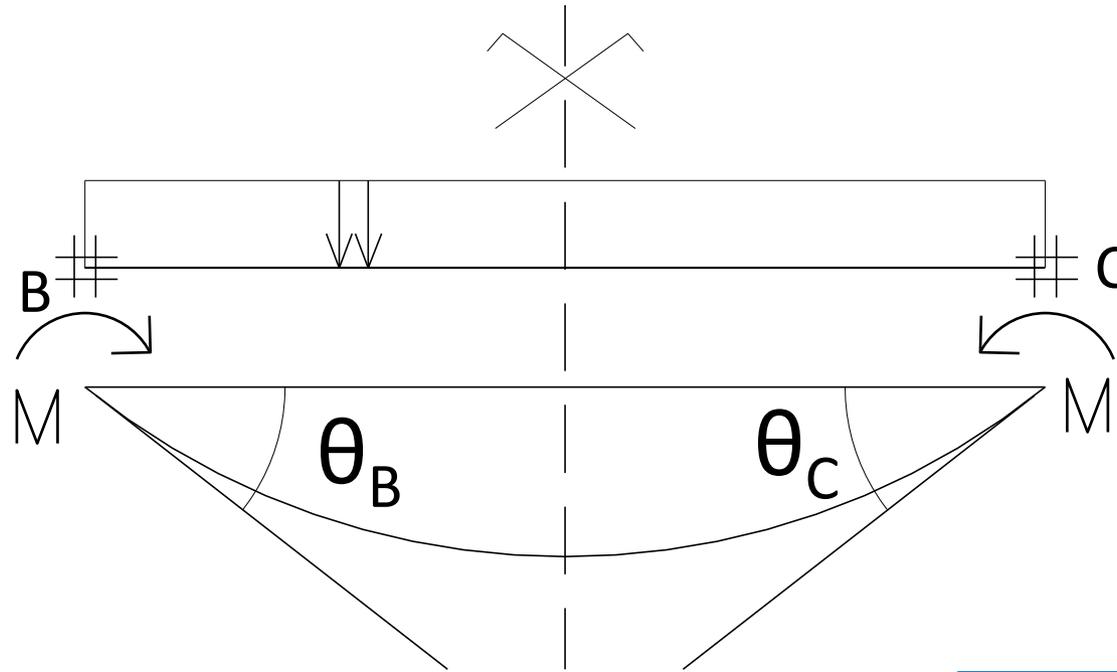


Por tanto, se puede estudiar media estructura quedando el nudo central C en condición de frenado siempre

El momento en C será el inicial (de empotramiento perfecto) más los transmitidos.



En B y C aparecerán momentos iguales pero de sentido contrario, los ángulos de giro θ también son iguales y con sentido contrario



La expresión del momento en un apoyo es, en general:

$$M = \gamma \cdot \kappa \cdot \theta$$

Siendo:

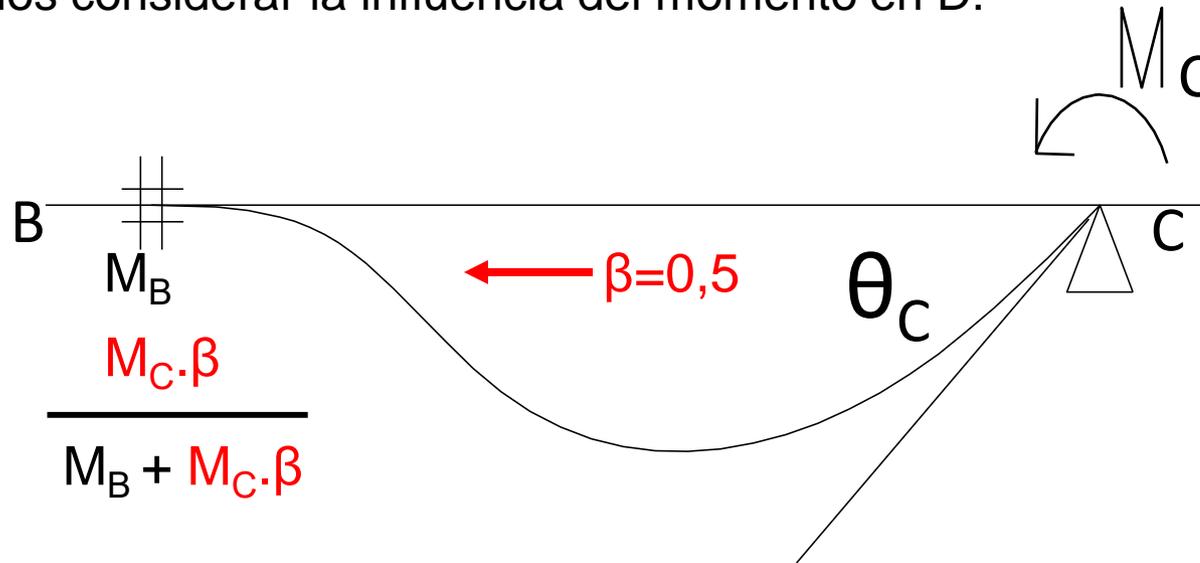
α : implica la consideración del tipo de apoyos

κ : la rigidez, que indica la mayor o menor oposición del tramo a ser deformado por un giro

θ : el ángulo de giro en el extremo

$$\kappa = \frac{E \cdot I}{L}$$

Si trabajamos con media estructura, cuando expresamos el valor del momento en C, debemos considerar la influencia del momento en D.



$$M_B = \gamma_B \cdot \kappa \cdot \theta_B + \beta \cdot (\gamma_C \cdot \kappa \cdot \theta_C)$$

Por simetría: $\gamma_B = \gamma_C$ κ es el mismo porque representa al tramo

Y por lo ya visto: $\theta_B = -\theta_C$

$$\text{Sustituyendo: } M_B = \overbrace{\gamma_B \cdot \kappa \cdot \theta_B}^{M_B} - \beta \cdot \overbrace{(\gamma_B \cdot \kappa \cdot \theta_B)}^{M_B}$$

$$\text{Sacando factor común: } M_B = (1 - \beta) \cdot \overbrace{\gamma_B \cdot \theta_B \cdot \kappa}^{M_B}$$

$$M_B = 1 - \beta \cdot \overbrace{(\gamma_B \cdot \kappa \cdot \theta_B)}^{M_B} \quad \gamma \cdot \kappa \cdot \theta \text{ es la expresión de un giro}$$

$\gamma\kappa$ es la rigidez de la barra

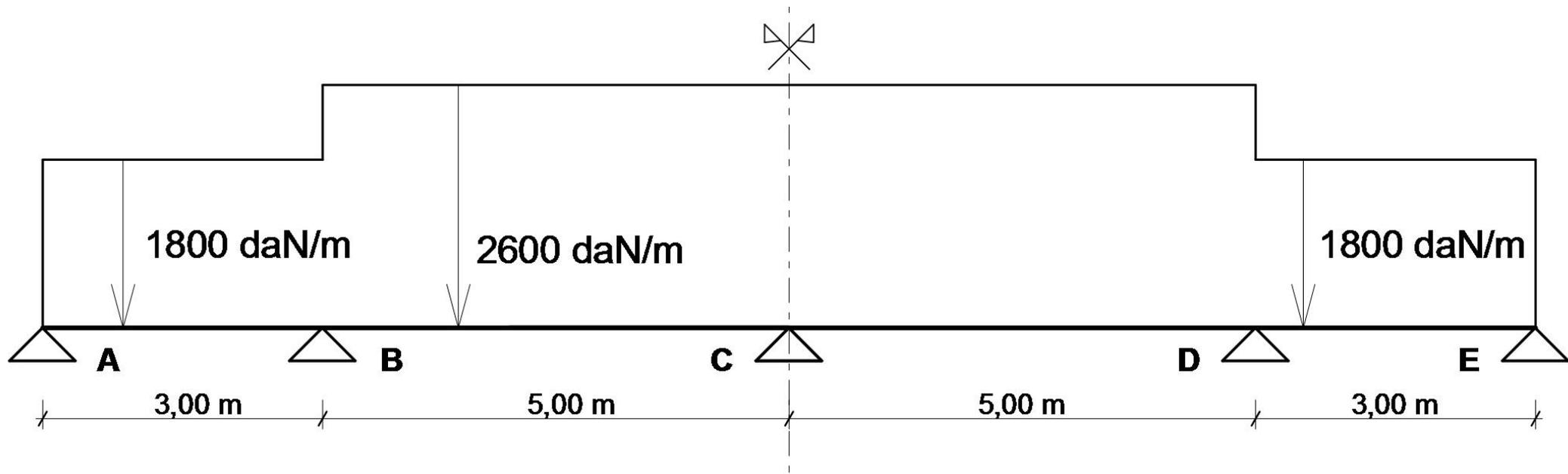
Esto significa que podemos operar con media estructura, siempre que en el tramo central se afecte su rigidez (para determinar los coeficientes de repartición) por el valor $(1-\beta)$.

Trabajaremos con media estructura, sabiendo que el $\alpha\kappa$ de la barra por la que pasa el eje de simetría será $\alpha\kappa(1-\beta)$ para determinar los coeficientes de repartición.

En inercia constante: $(1-\beta)=0,5$.

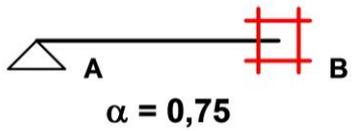
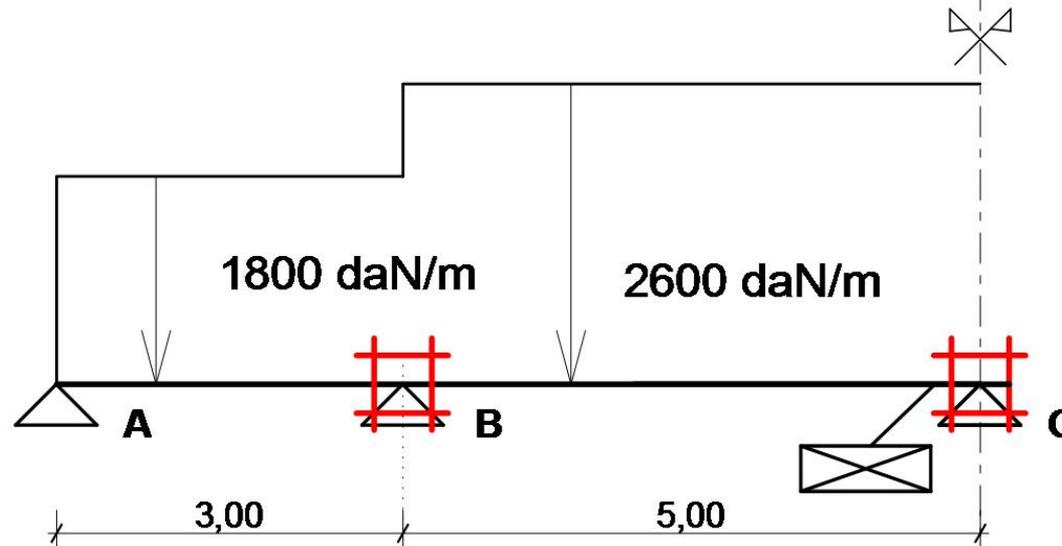
Los demás valores, momentos de empotramiento perfecto, κ , etc. debe determinarse con la luz real del tramo.

EJEMPLO DE SIMETRÍA POR NUDO



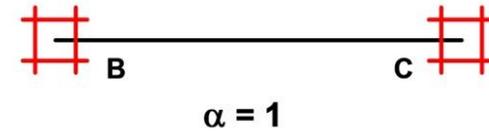
EJEMPLO DE SIMETRÍA POR NUDO

Coeficientes de repartición



$\alpha = 0,75$
 $\chi = 0,333$
 $\alpha\chi = 0,25$

$\alpha = 1$
 $\chi = 0,2$
 $\alpha\chi = 0,20$



$\Sigma\alpha\chi = 0,45$

$r = \frac{\alpha\chi}{\Sigma\alpha\chi} \quad \Sigma = 1$

$r_{BA} = \frac{0,25}{0,45} = 0,56$

$r_{BC} = \frac{0,20}{0,45} = 0,44$

$\beta = 0$

0,56

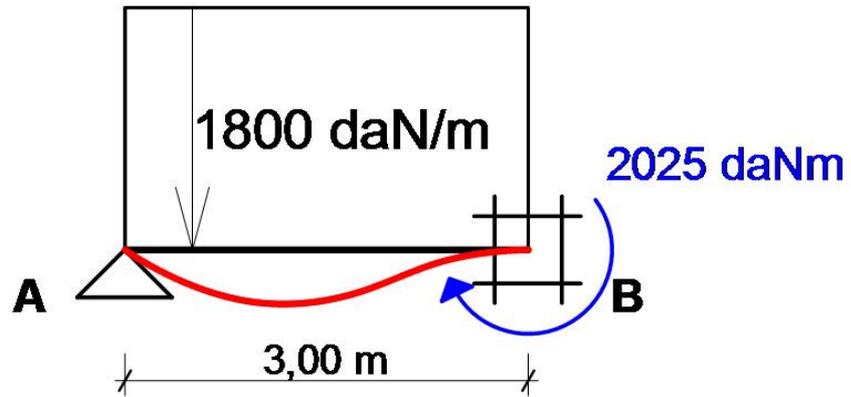
0,44

$\beta = 0,5$



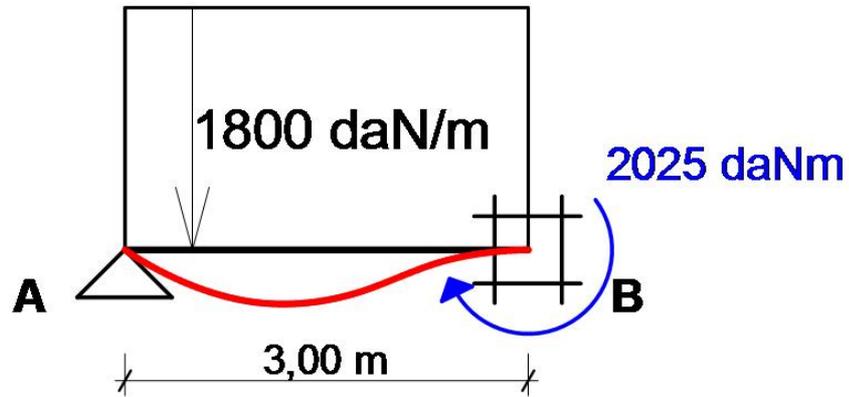
EJEMPLO DE SIMETRÍA POR NUDO

Momentos de
empotramiento
perfecto MEP



EJEMPLO DE SIMETRÍA POR NUDO

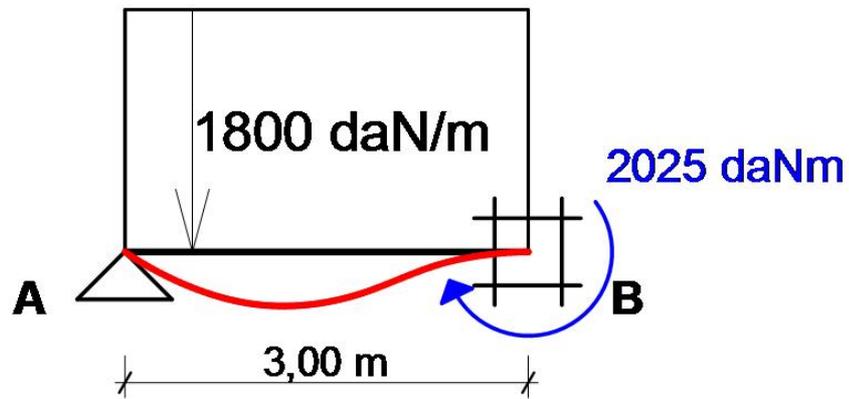
Momentos de
empotramiento
perfecto MEP



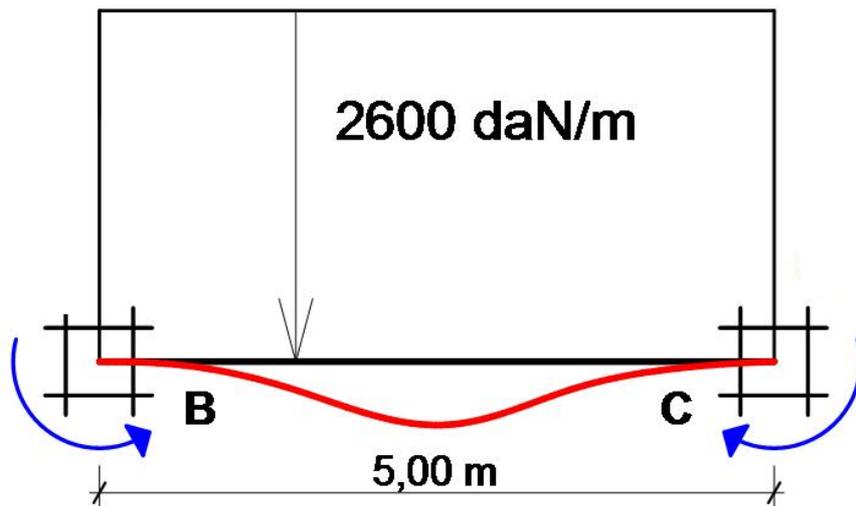
$$M_{BA} = \frac{pl^2}{8} = \frac{1800 \times 3^2}{8} = 2025 \text{ daNm}$$

EJEMPLO DE SIMETRÍA POR NUDO

Momentos de empotramiento perfecto MEP

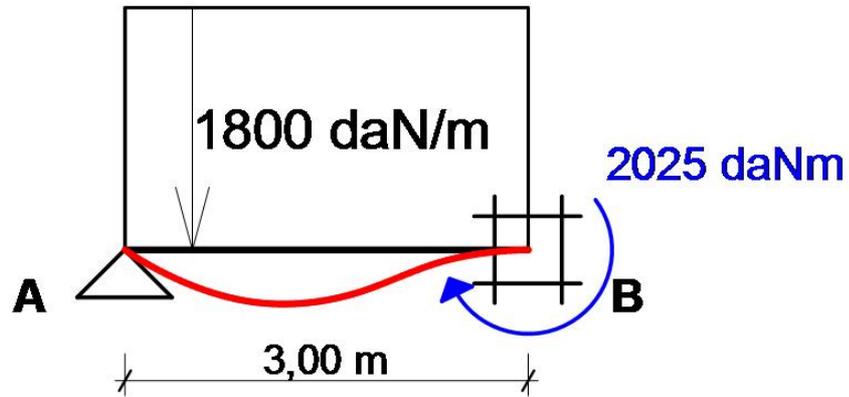


$$M_{BA} = \frac{pl^2}{8} = \frac{1800 \times 3^2}{8} = 2025 \text{ daNm}$$

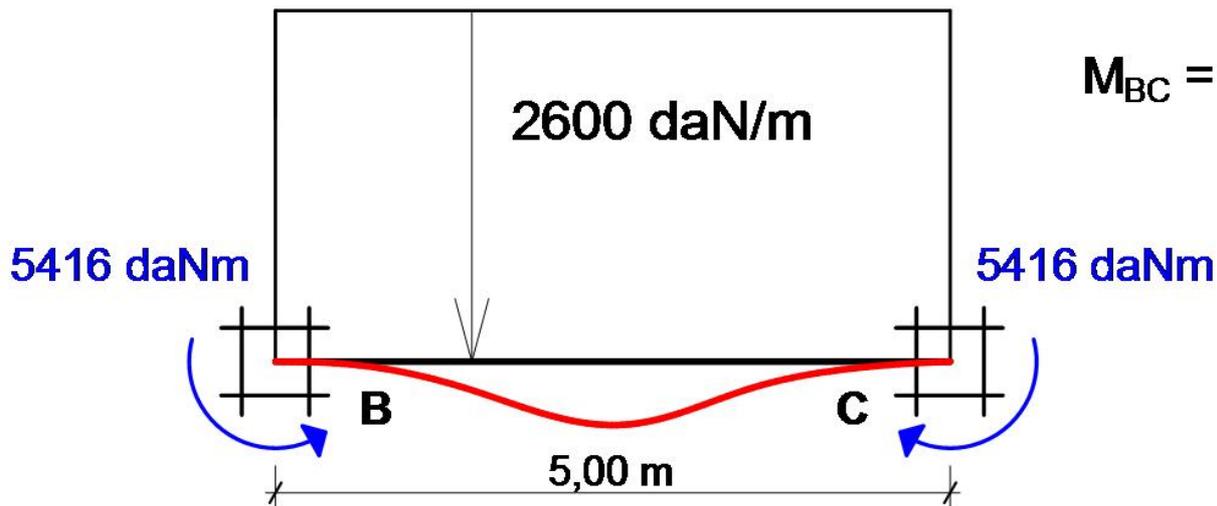


EJEMPLO DE SIMETRÍA POR NUDO

Momentos de
empotramiento
perfecto MEP



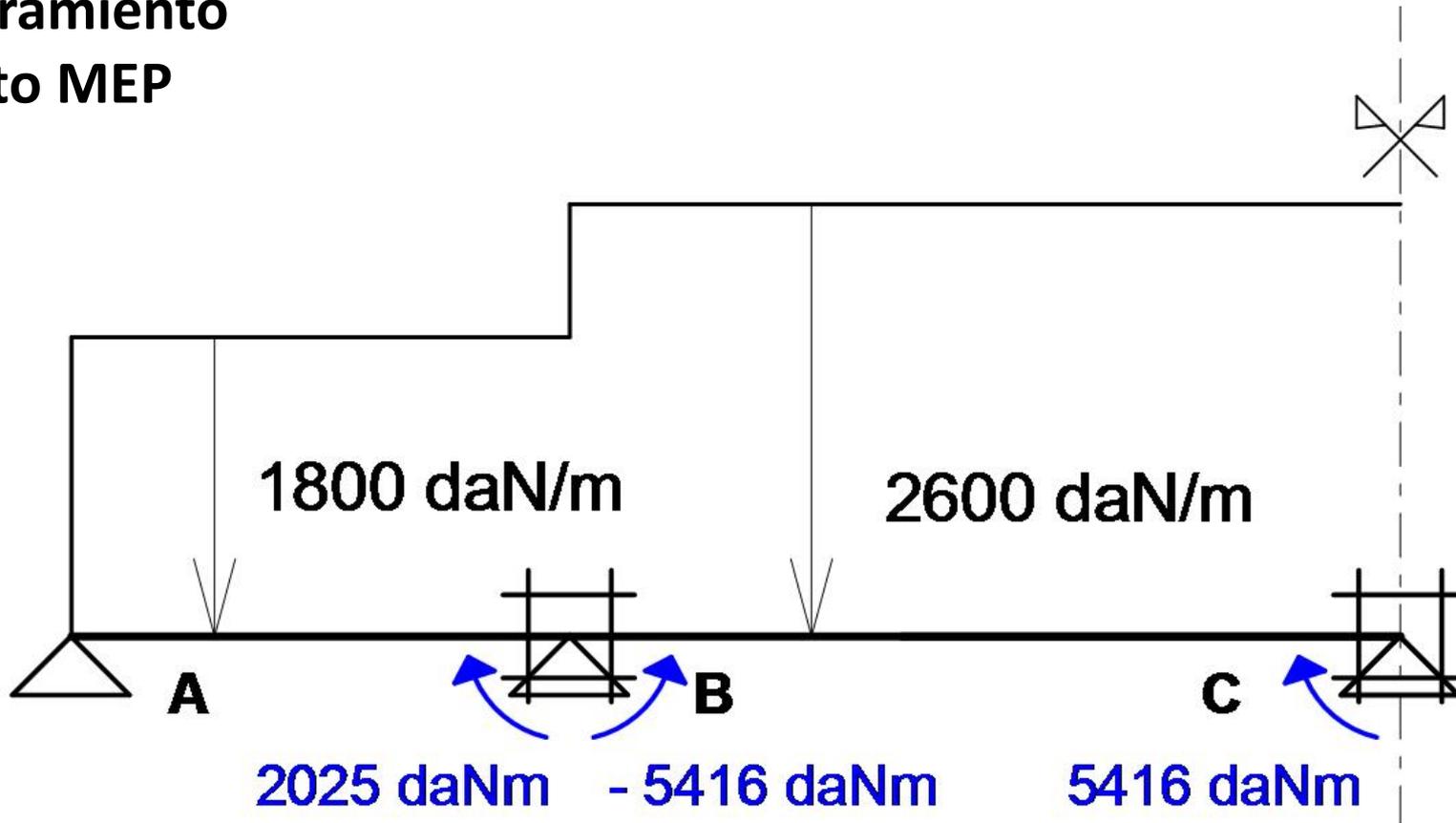
$$M_{BA} = \frac{pl^2}{8} = \frac{1800 \times 3^2}{8} = 2025 \text{ daNm}$$



$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{pl^2}{12} = \frac{2600 \times 5^2}{12} = 5416 \text{ daNm}$$

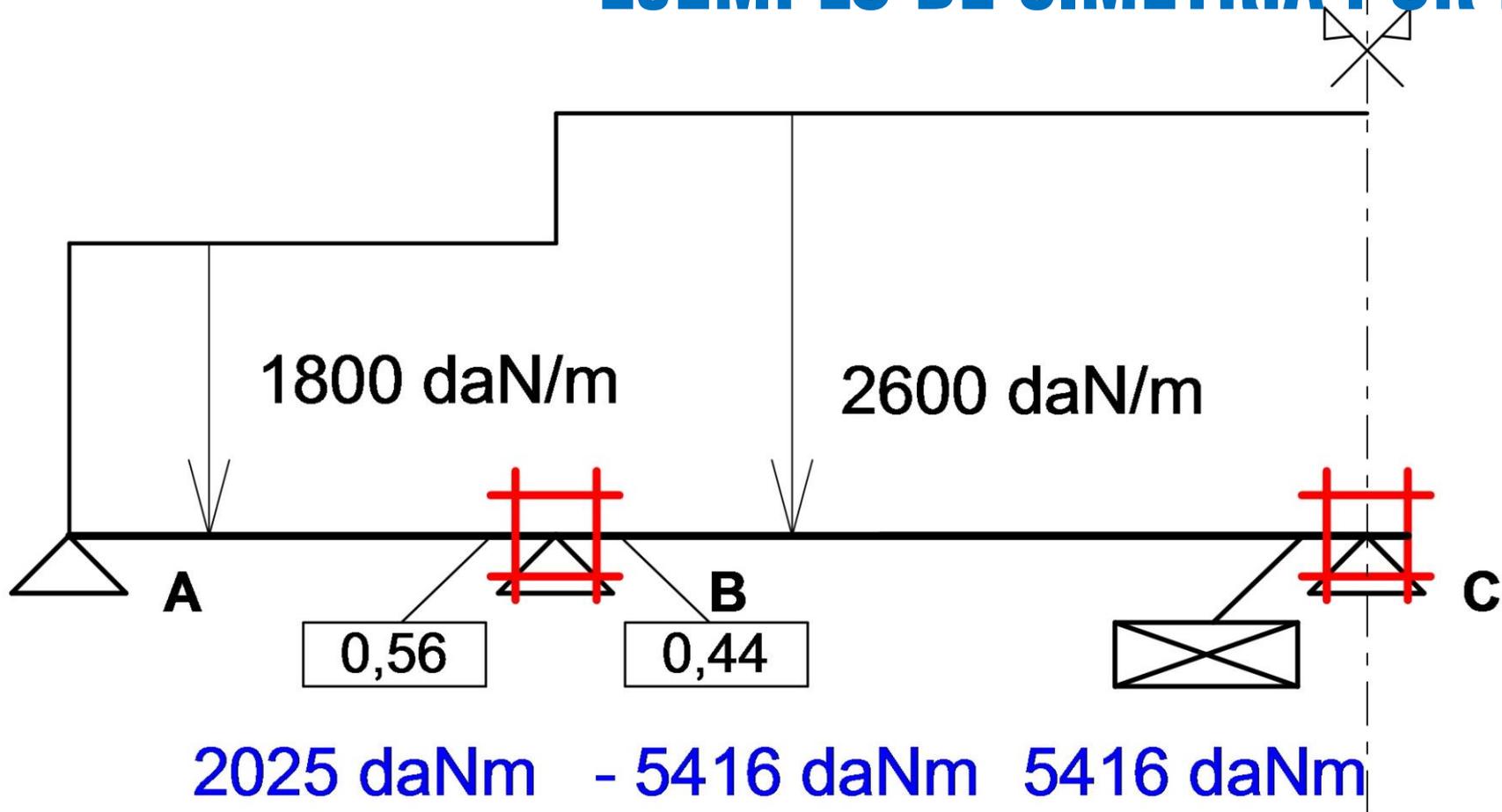
EJEMPLO DE SIMETRÍA POR NUDO

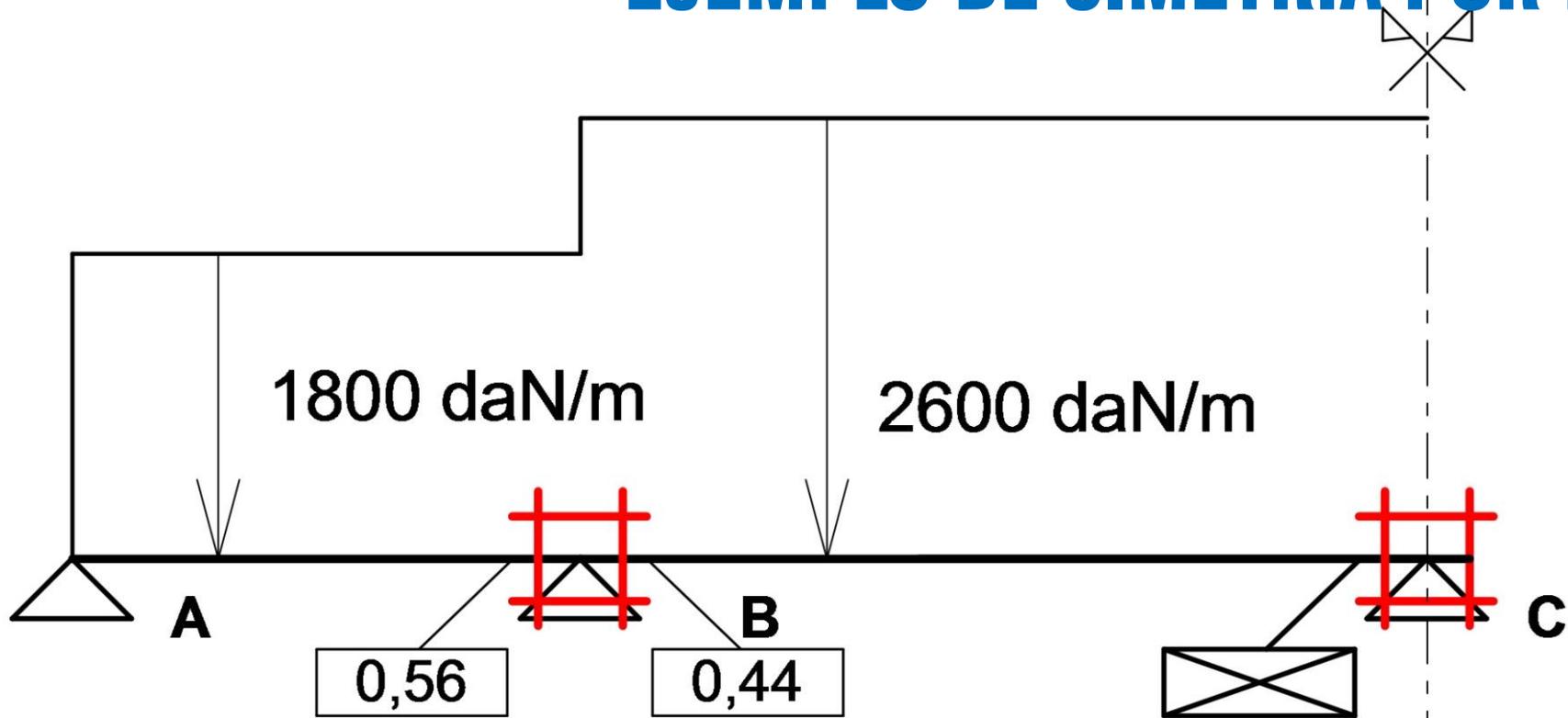
Momentos de
empotramiento
perfecto MEP



Artificio de Cross

EJEMPLO DE SIMETRÍA POR NUDO





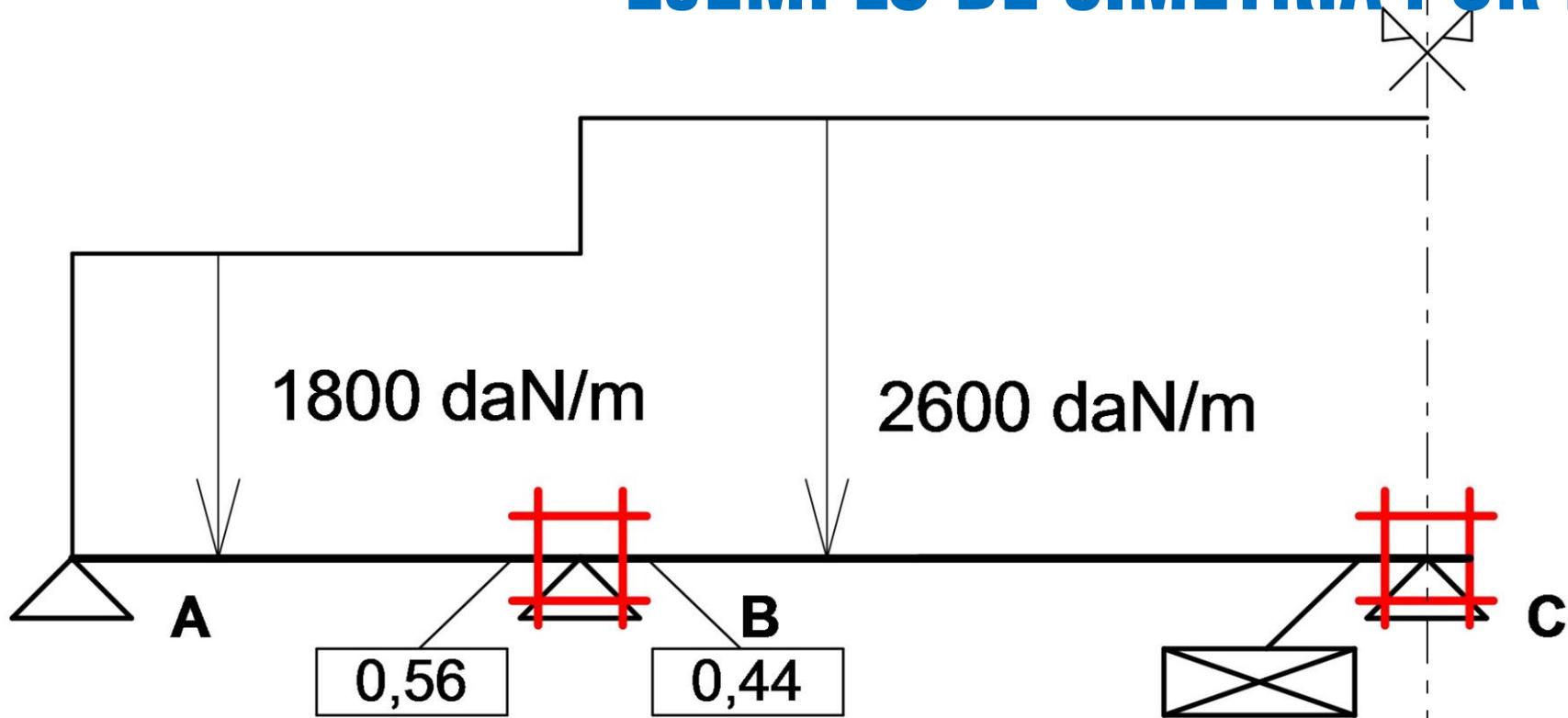
2025 daNm - 5416 daNm 5416 daNm

1899 daNm 1492 daNm 746 daNm

Nudo B $\Sigma M = 2025 - 5416 = -3391$ opuesto $\rightarrow 3391$

$3391 \times 0,56 = 1899$ daNm

$3391 \times 0,44 = 1492$ daNm



0,56

0,44

2025 daNm - 5416 daNm 5416 daNm

1899 daNm 1492 daNm 746 daNm

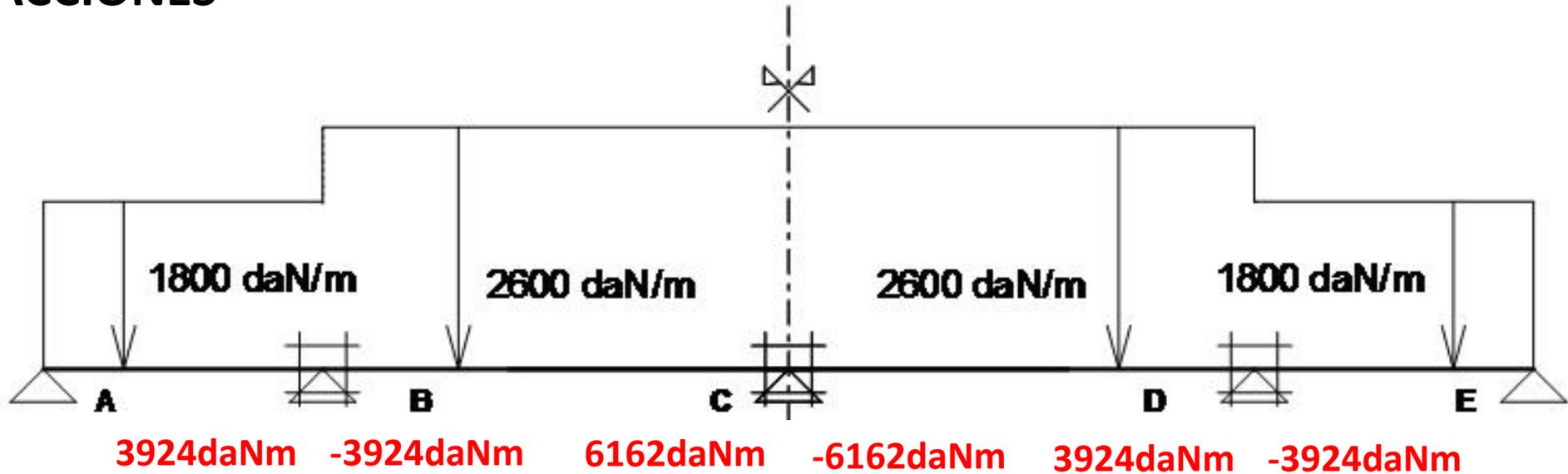
3924 daNm

- 3924 daNm

6162 daNm

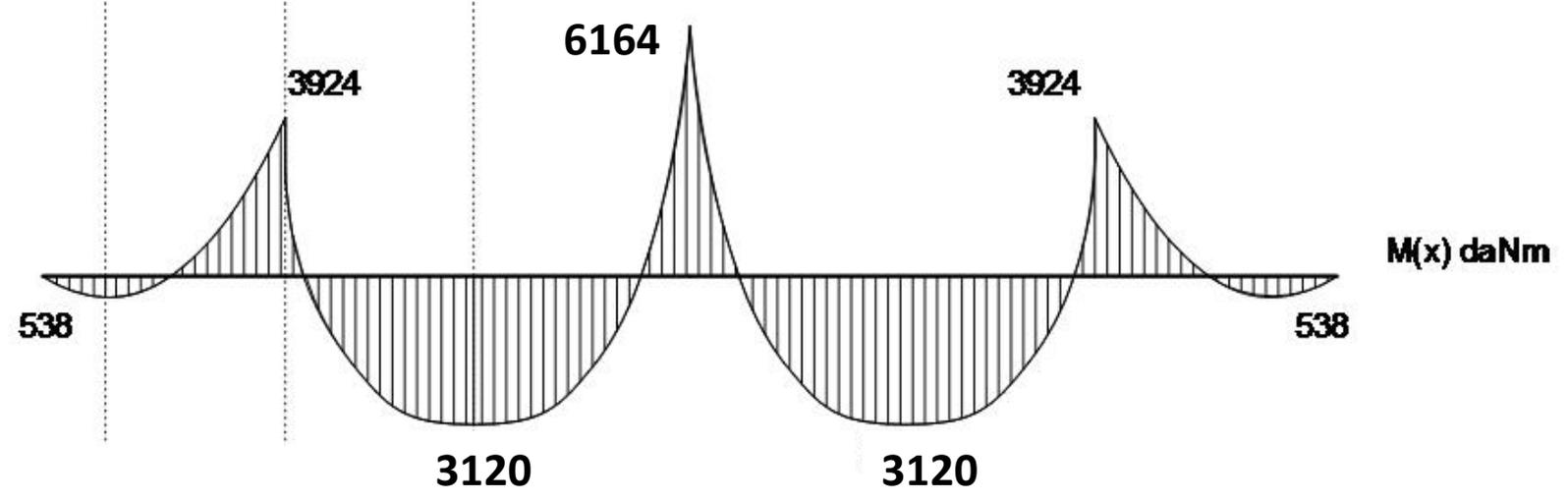
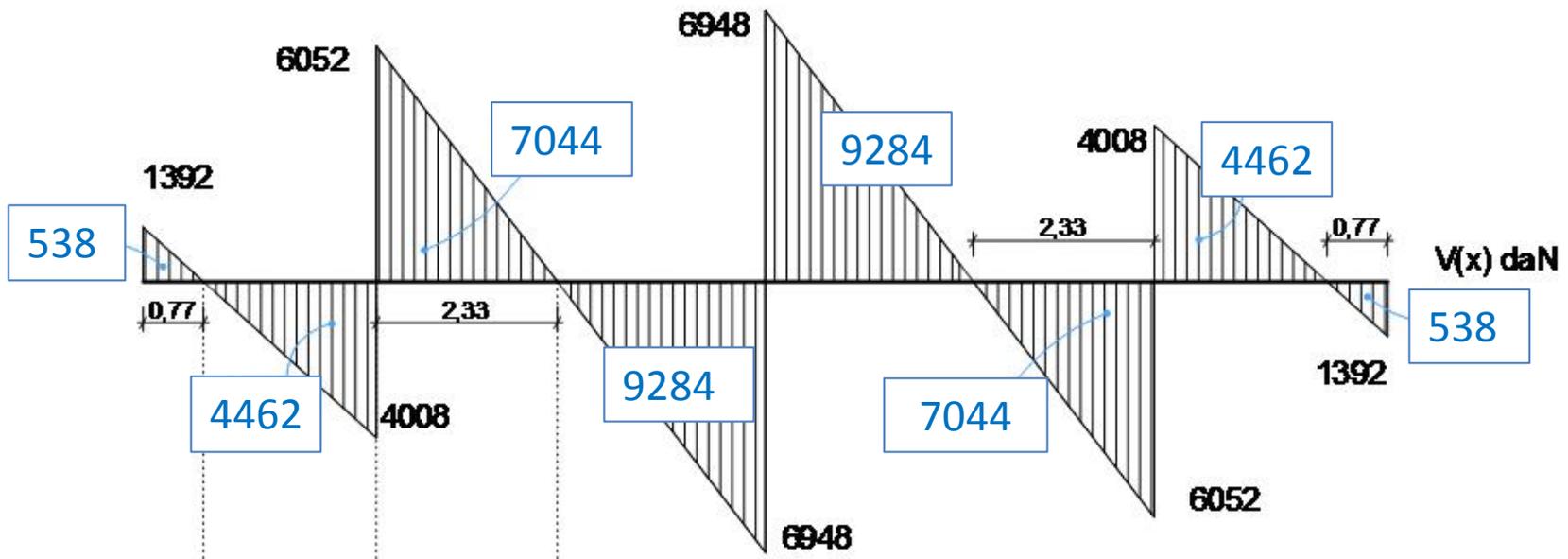
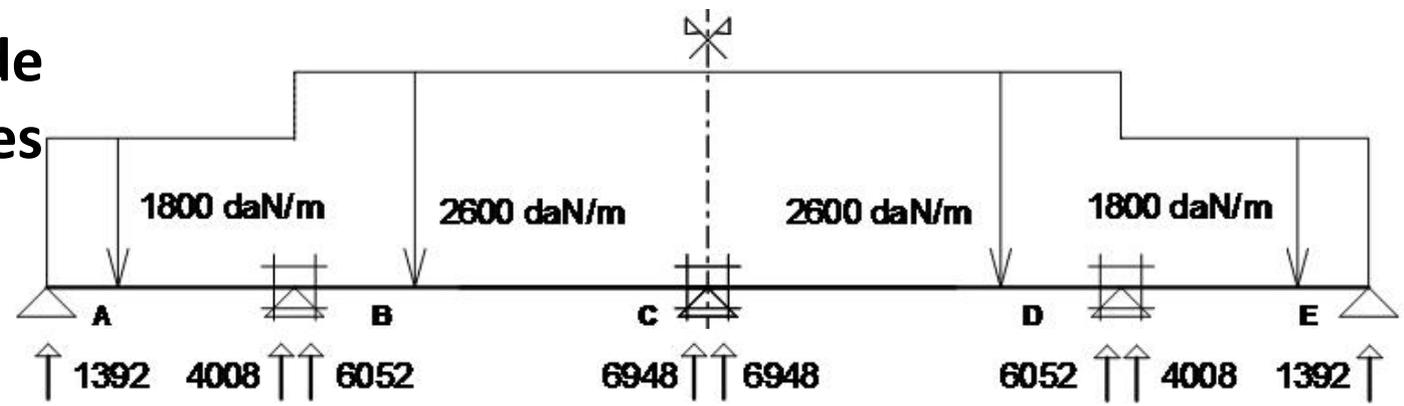
- ✓ DESCARGAS (de cargas y momentos)
- ✓ REACCIONES

EJEMPLO DE SIMETRÍA POR NUDO



Carga $\frac{p l}{2}$	↓ 2700	↓ 2700	↓ 6500	6500	↓ ↓ 6500	6500	↓ ↓ 2700	↓ 2700	
Momento $\frac{\Sigma M}{l}$	↑ 1308	↑ 1308	↑ 448	448	↓ ↓ 448	448	↑ ↓ 1308	↑ 1308	
Descargas	↓ 1392	↓ 4008	↓ ↓ 6052	6948	↓ ↓ 6948	6948	↓ ↓ 6052	↓ 400	↓ 1392
Reacciones	↑ 1392	↑ 4008	↑ ↑ 6052	6948	↑ ↑ 6948	6948	↑ ↑ 6052	↑ 4008	↑ 1392

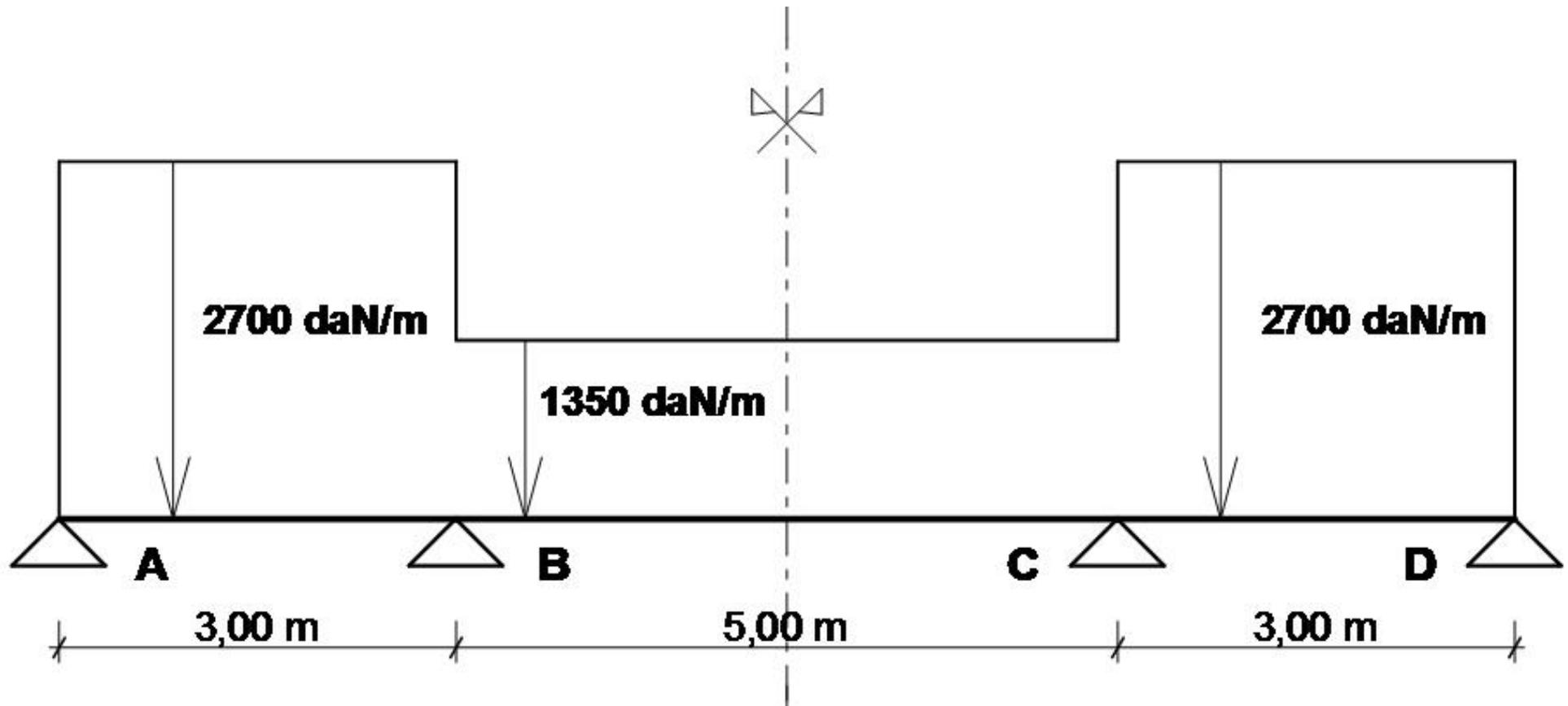
Diagramas de Solicitaciones



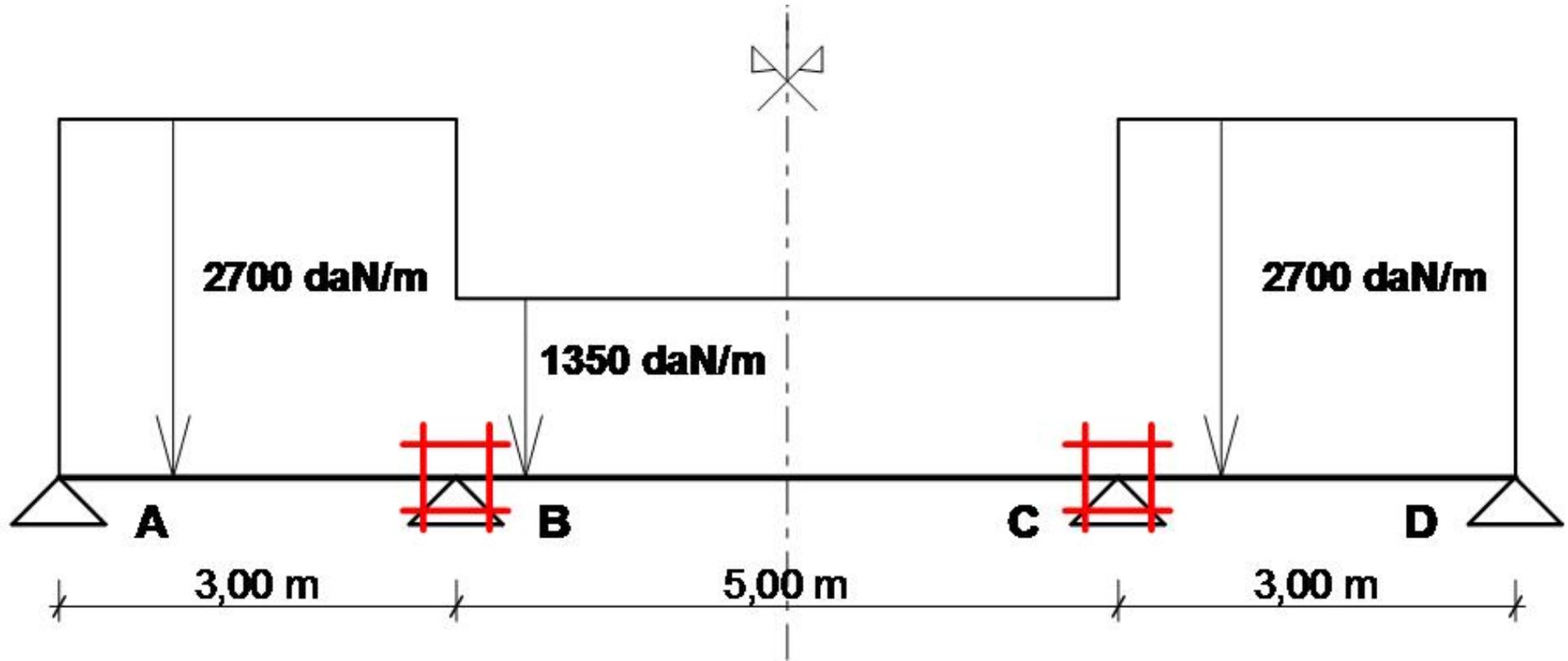
EJEMPLO DE SIMETRÍA POR NUDO

EJEMPLO EJE QUE CORTA A UNA BARRA

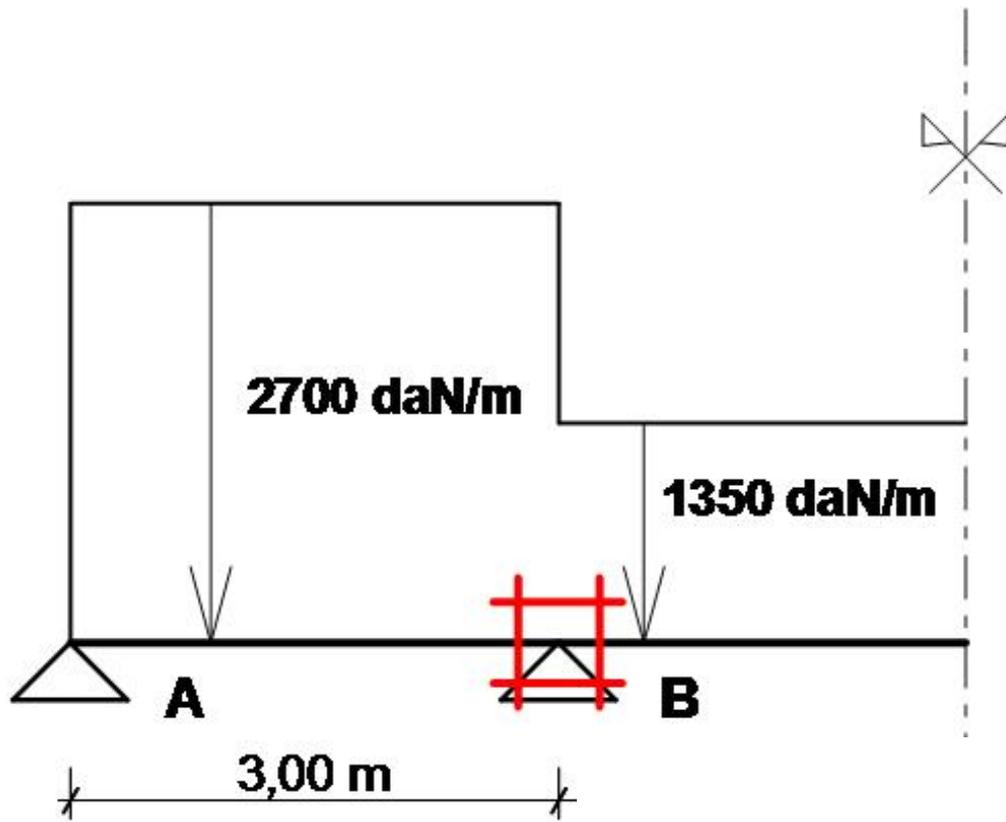
EJEMPLO EJE QUE CORTA A UNA BARRA



EJEMPLO EJE QUE CORTA A UNA BARRA



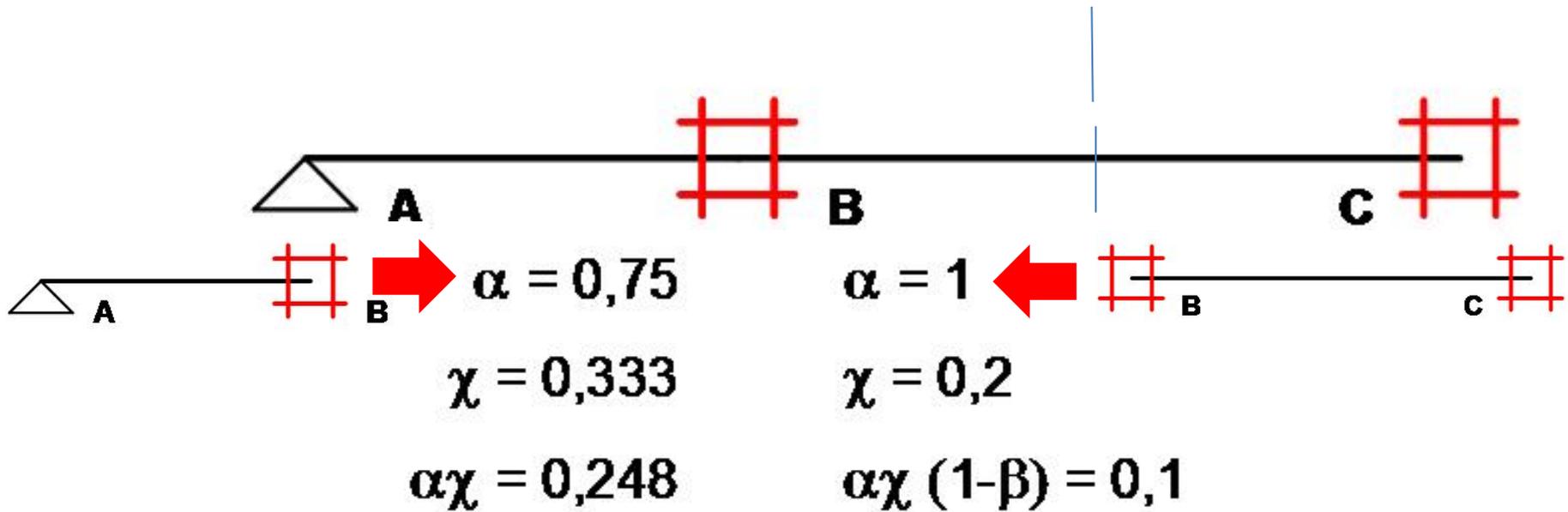
EJEMPLO EJE QUE CORTA A UNA BARRA



EJEMPLO EJE QUE CORTA A UNA BARRA

Coeficientes de repartición:

$$\Gamma = \frac{\alpha\chi}{\sum\alpha\chi}$$

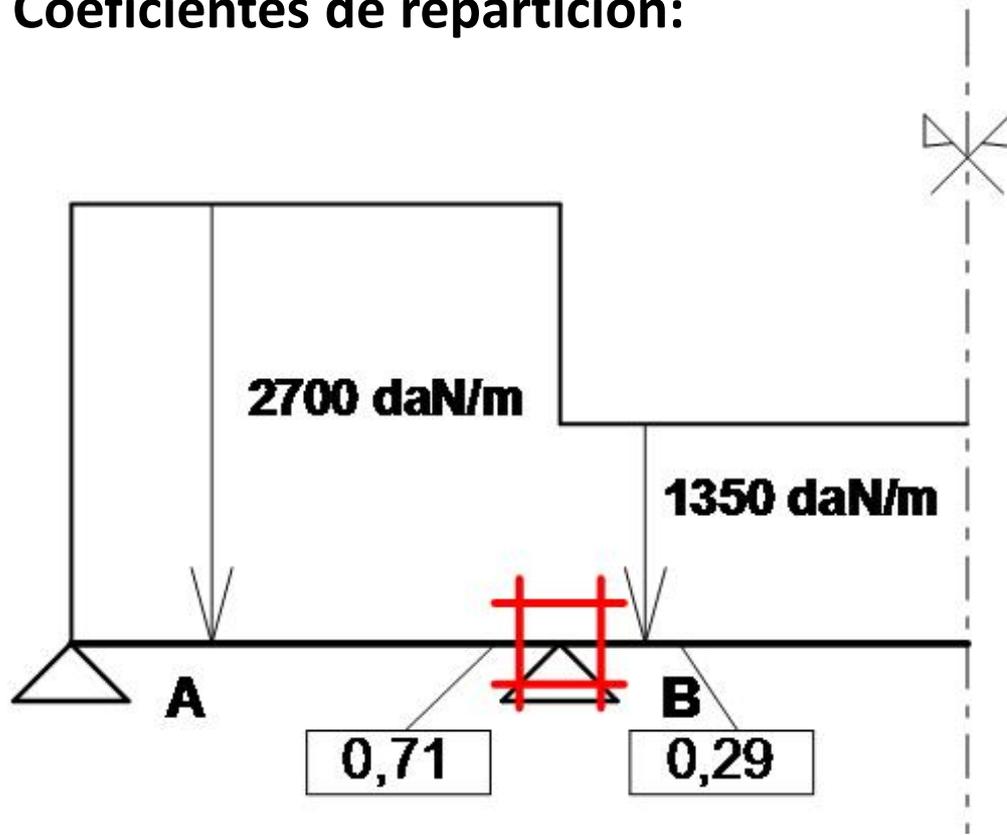


$$\sum\alpha\chi = 0,348$$

$$\left. \begin{aligned} r_{BA} &= \frac{0,248}{0,348} = 0,71 \\ r_{BC} &= \frac{0,1}{0,348} = 0,29 \end{aligned} \right\} \Sigma = 1$$

EJEMPLO EJE QUE CORTA A UNA BARRA

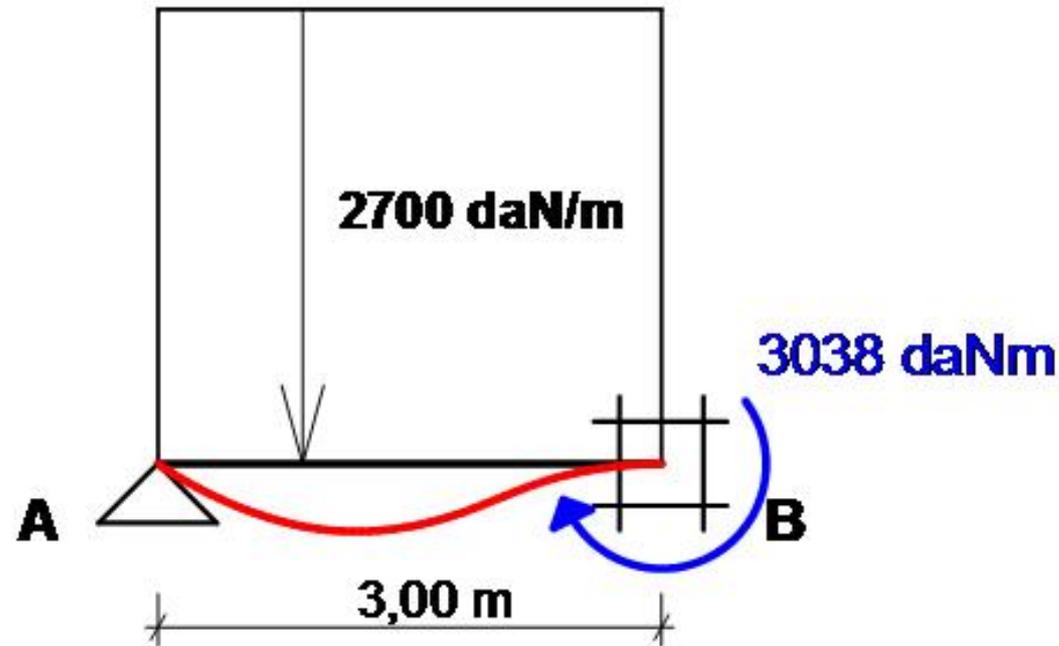
Coeficientes de repartición:



EJEMPLO EJE QUE CORTA A UNA BARRA

Momentos de empotramiento perfecto: MEP

Tramo AB

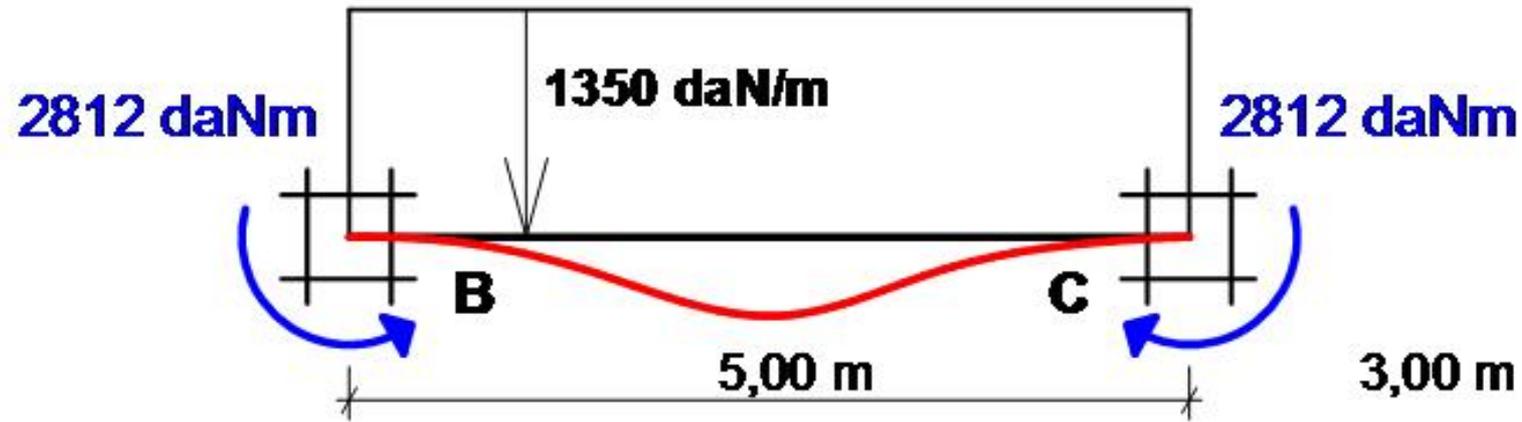


$$M_{BA} = \frac{pl^2}{8} = \frac{2700 \times 3^2}{8} = 3038 \text{ daNm}$$

EJEMPLO EJE QUE CORTA A UNA BARRA

Momentos de empotramiento perfecto: MEP

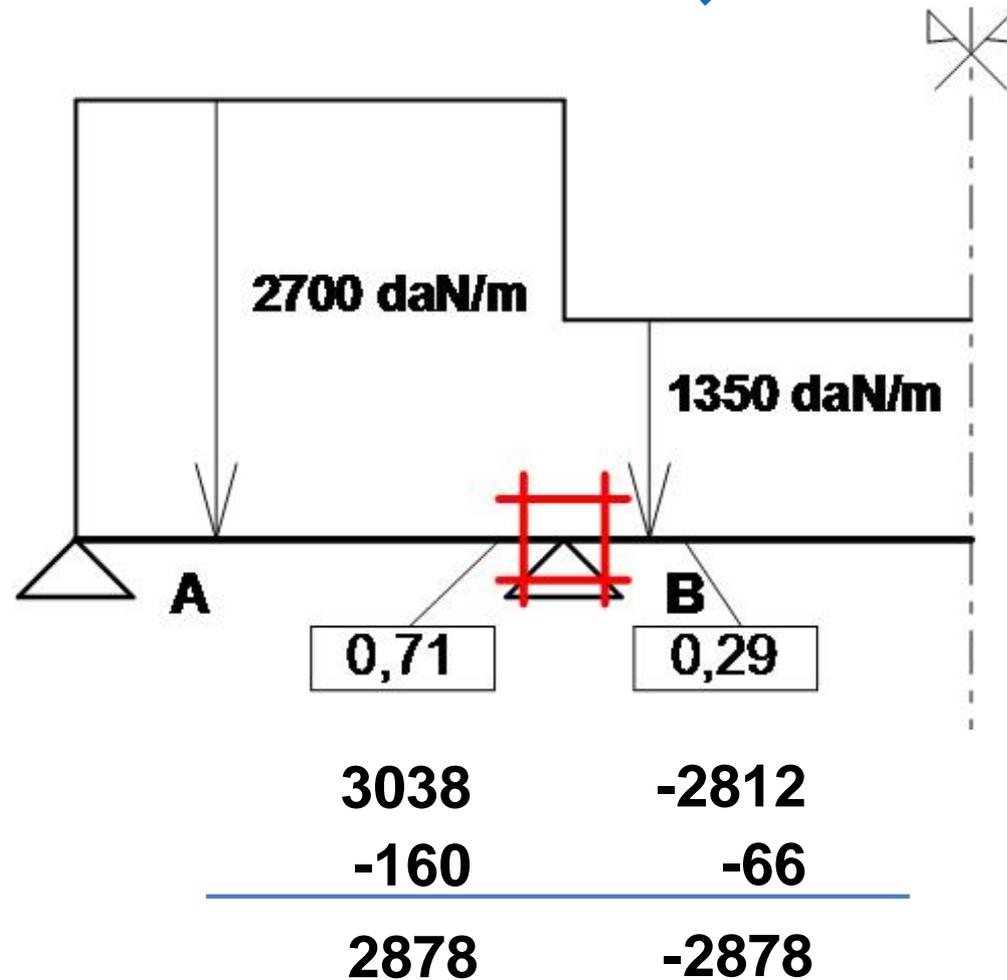
Tramo BC



$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{pl^2}{12} = \frac{1350 \times 5^2}{12} = 2812 \text{ daNm}$$

EJEMPLO EJE QUE CORTA A UNA BARRA

Artificio de
Cross

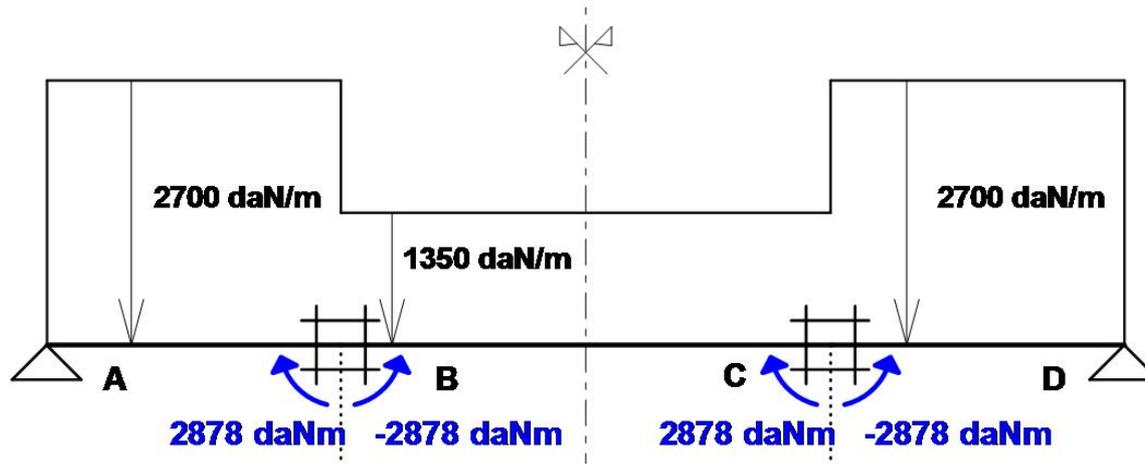


$$\Sigma M = 3038 + (-2812) = 226 \text{ daNm}$$

$$226 \text{ daNm} \times 0,71 = 160 \text{ daNm} \xrightarrow{\text{opuesto}} -160 \text{ daNm}$$

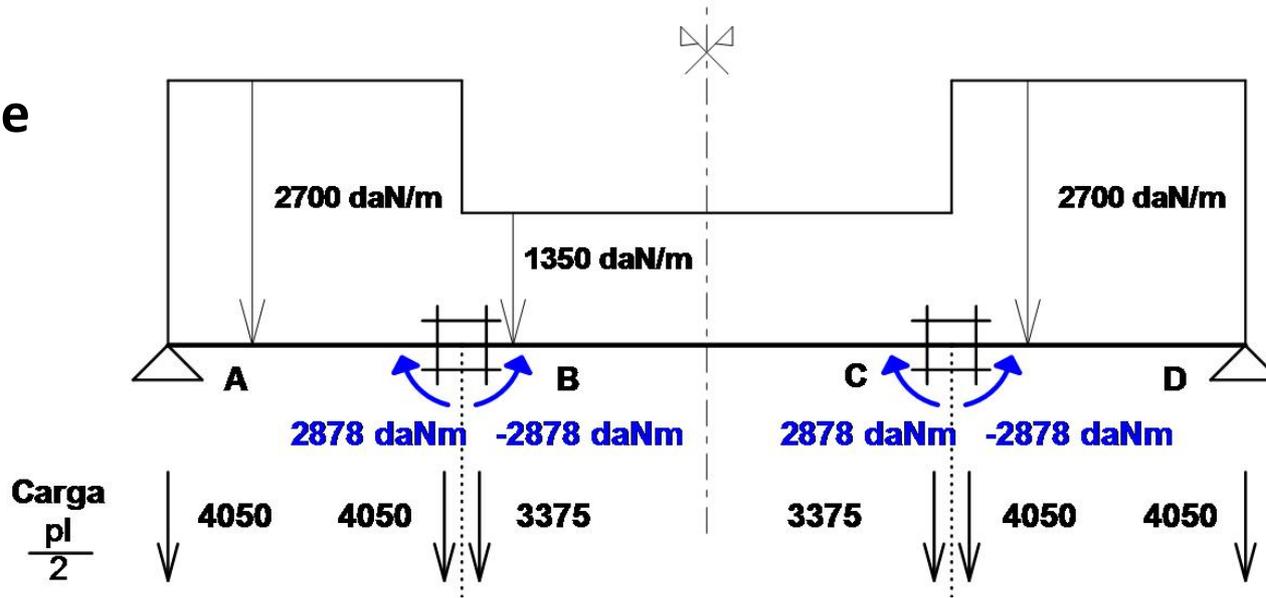
$$226 \text{ daNm} \times 0,29 = 66 \text{ daNm} \xrightarrow{\text{opuesto}} -66 \text{ daNm}$$

Descarga de
cargas y
momentos



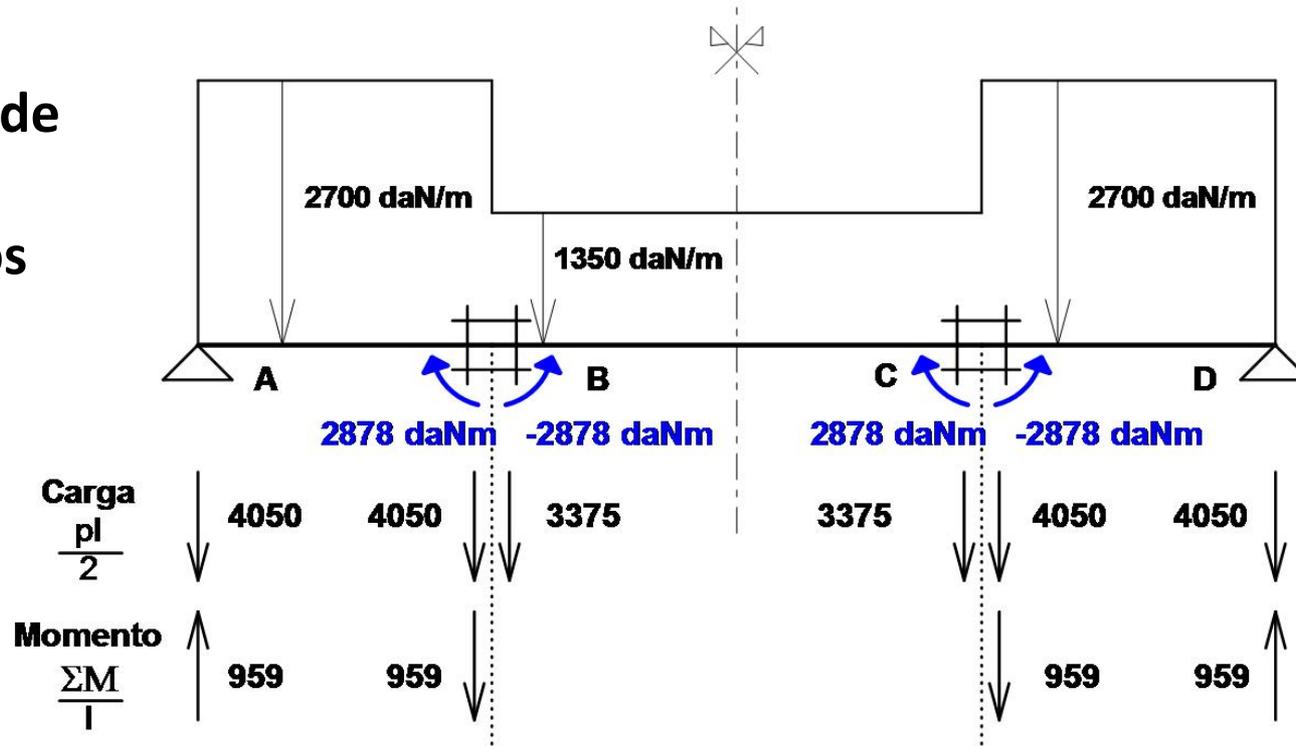
**EJEMPLO EJE
QUE CORTA A
UNA BARRA**

Descarga de
cargas y
momentos



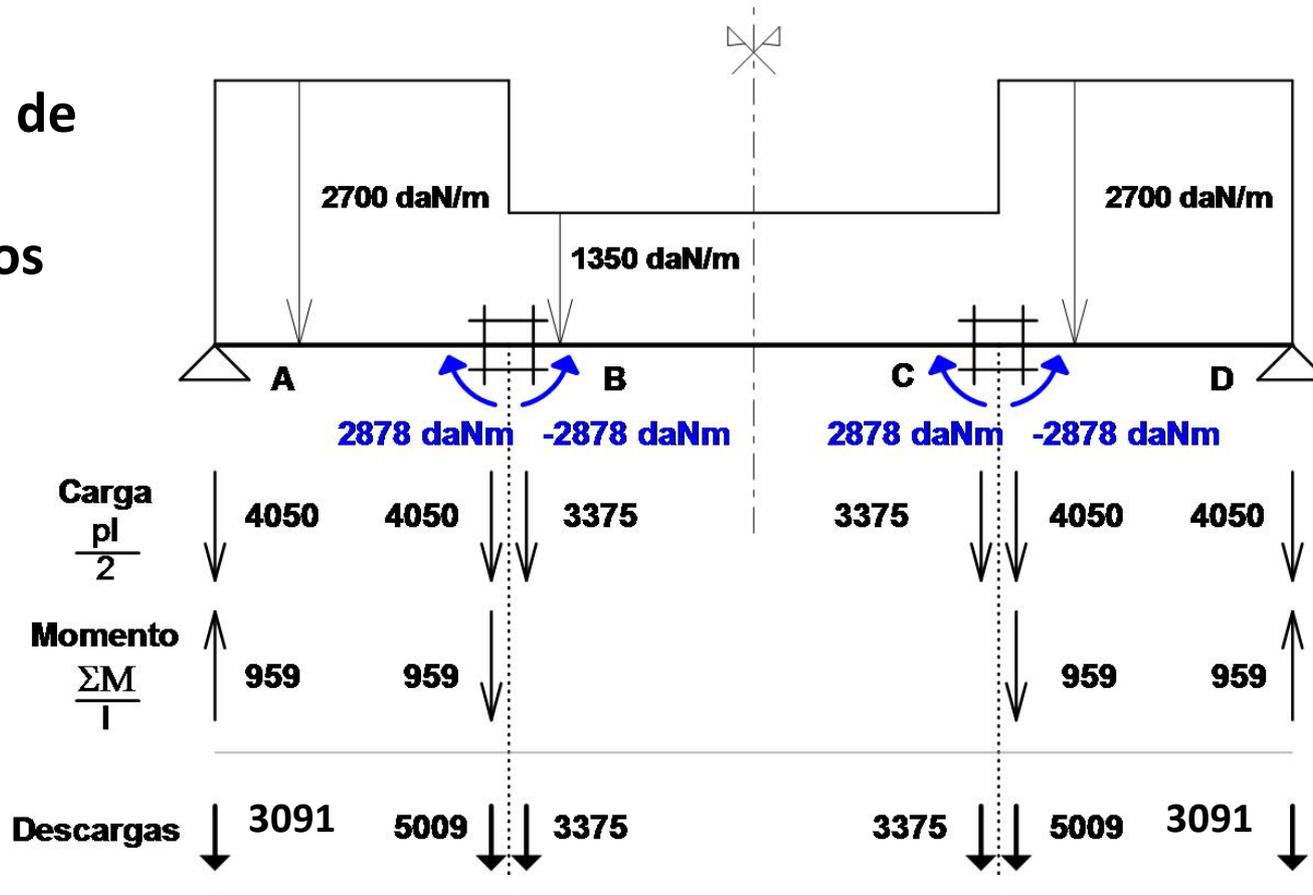
**EJEMPLO EJE
QUE CORTA A
UNA BARRA**

Descarga de
cargas y
momentos



EJEMPLO EJE
QUE CORTA A
UNA BARRA

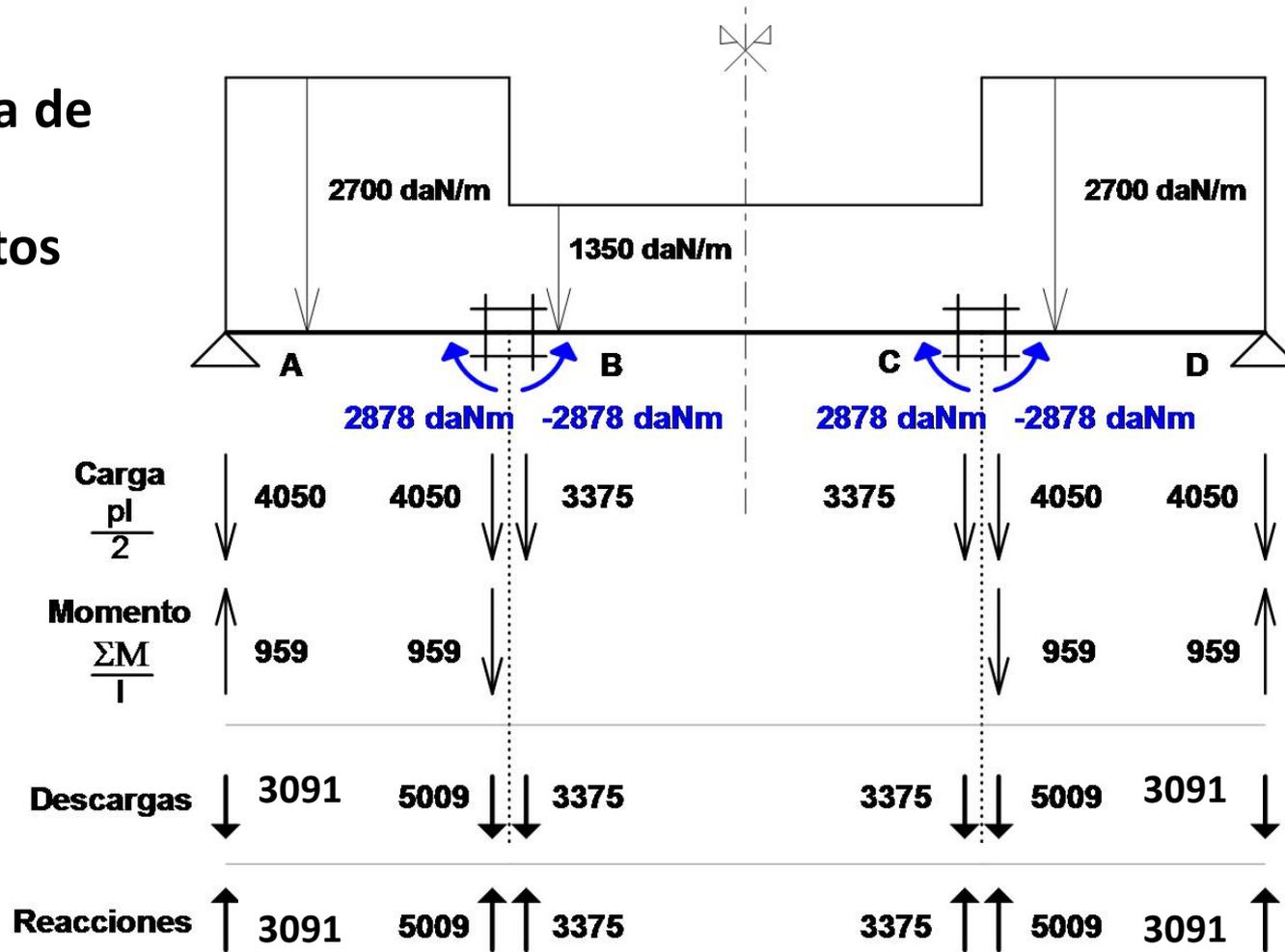
Descarga de
cargas y
momentos



**EJEMPLO EJE
QUE CORTA A
UNA BARRA**

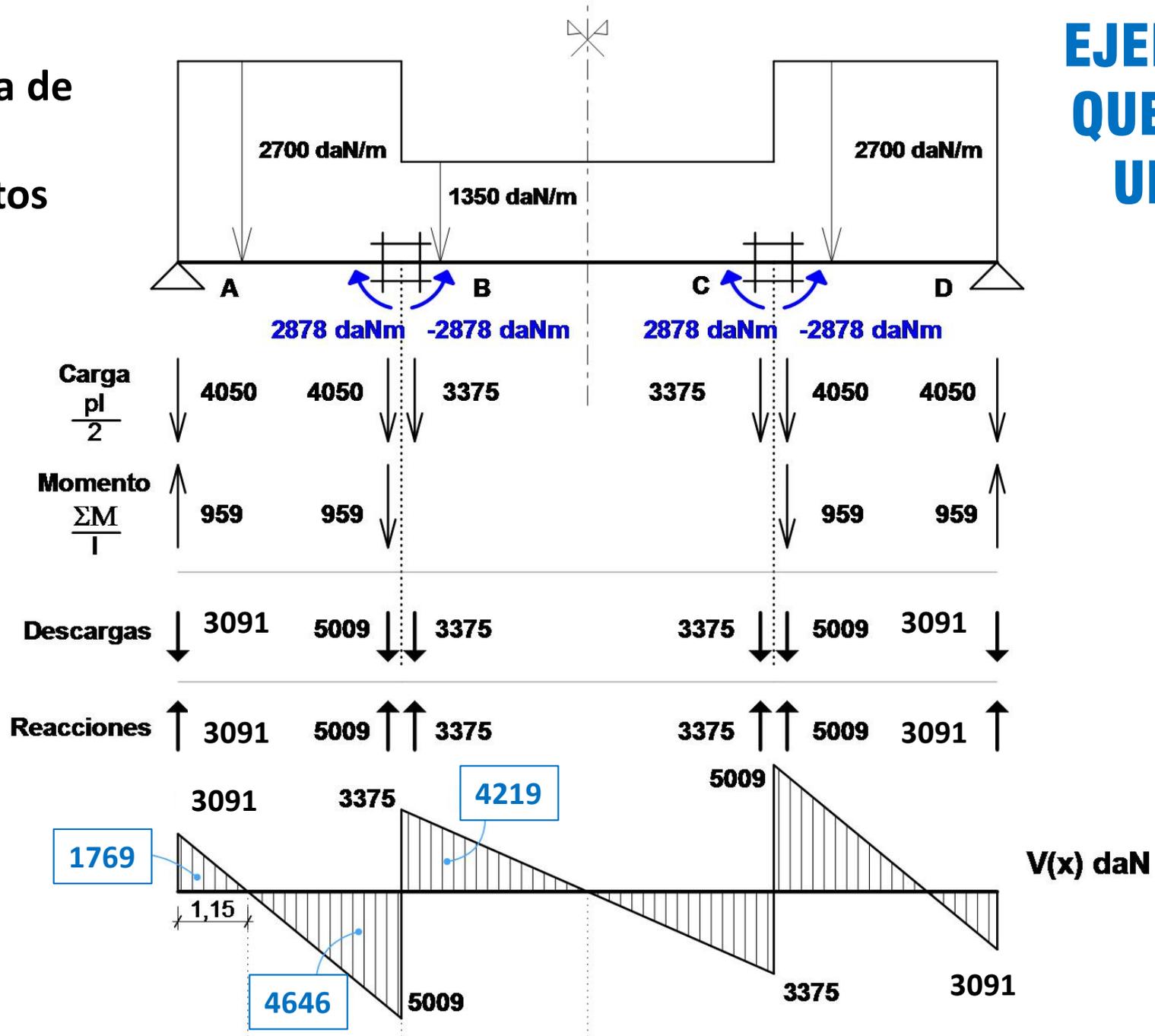
Descarga de cargas y momentos

EJEMPLO EJE QUE CORTA A UNA BARRA



Descarga de cargas y momentos

EJEMPLO EJE QUE CORTA A UNA BARRA



Descarga de cargas y momentos

EJEMPLO EJE QUE CORTA A UNA BARRA

