

FLEXION

MATERIAL DE APOYO PARA LAS CLASES

I. PRESENTACIÓN DEL TEMA

A. Introducción:

Para la presentación de esta familia se utilizará el método de las secciones, determinando las sollicitaciones a partir de la resultante izquierda.

Como en todos los casos en estudio, la base conceptual fundamental radica en el equilibrio. Todas las conclusiones que puedan sacarse en el estudio, sólo son válidas cuando se cumplen las condiciones de equilibrio.

A diferencia de lo que sucede en los cables y en los reticulados, esta resultante izquierda podrá tener cualquier dirección y sentido, y cualquier ubicación en el plano. En consecuencia su reducción al centro de gravedad de la sección en estudio, podrá tener componente axial, componente cortante y generar un momento.

Estudio de una dovela. Se toma una dovela tal como se muestra en la figura y se analiza como cambia su forma al curvarse la pieza.

Se constata que la dovela modifica su forma, acortándose fibras de un lado y alargándose del opuesto (en el caso de la figura, se acortan las superiores y se alargan las inferiores)

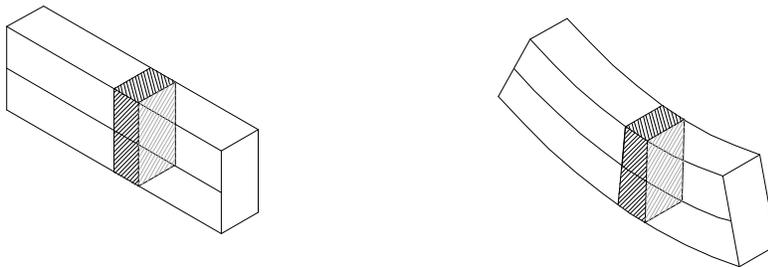
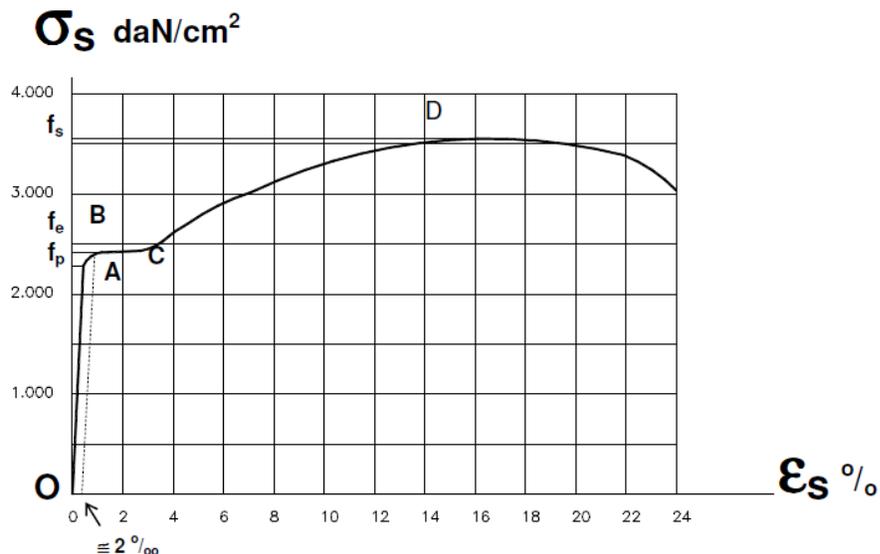


Gráfico de tensiones-deformaciones del acero común

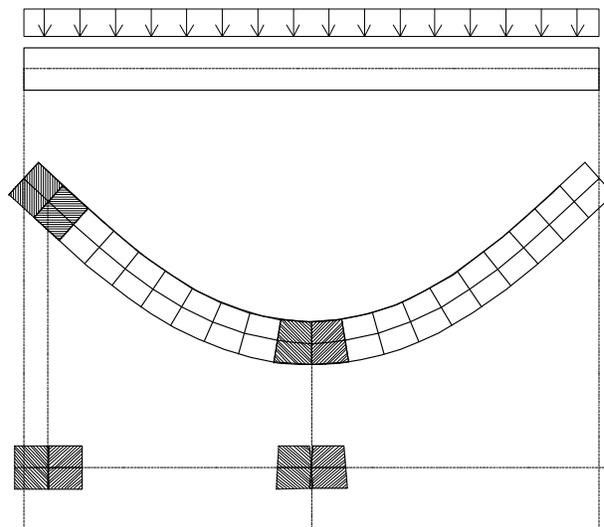


A partir de este gráfico se comprueba que para cada valor de deformación relativa corresponde un valor de tensión. En la construcción se utilizan los materiales en el período elástico (Ley de Hooke), por lo que, además, esa relación es de proporcionalidad.

Si se constatan acortamientos, significa que hay tensiones de compresión con un valor que puede deducirse de Hooke. Lo mismo para los alargamientos, los que producirán tensiones de tracción.

Por lo tanto comprobamos que al aplicar acciones y surgir las respectivas reacciones que impiden, a través de los vínculos, todo tipo de movimiento, han aparecido deformaciones y por lo tanto tensiones interiores. La energía que se aportó a la pieza con la fuerzas, queda retenida interiormente como **energía potencial de deformación** y se liberará, recuperándose la forma original, una vez desaparecidas dichas fuerzas.

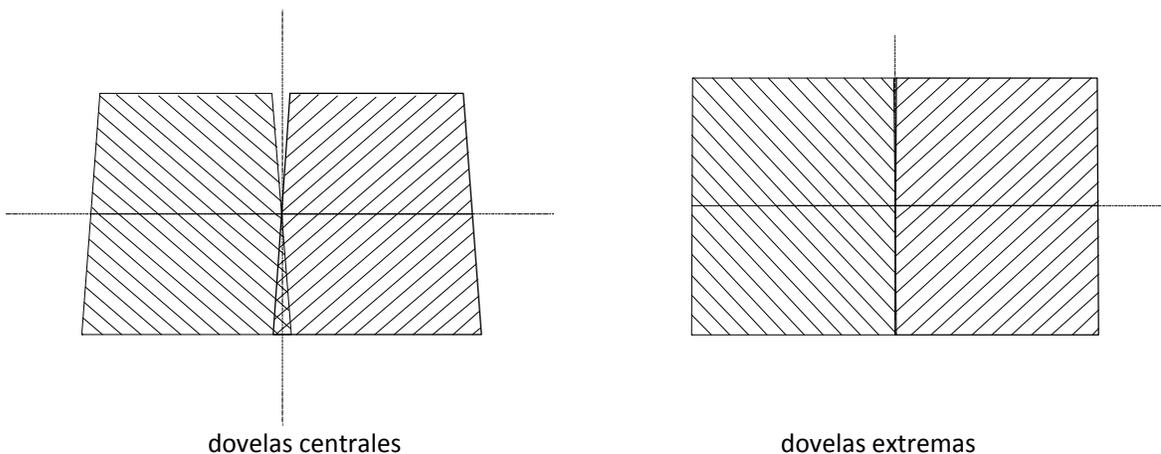
Observando la pieza deformada, se puede deducir que la flexión del eje es variable punto a punto, existiendo, como en la pieza de la figura, sectores con mayor curvatura al centro y con muy poca curvatura hacia los extremos (apoyos).

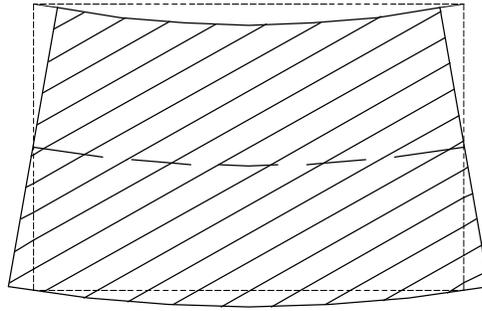


Las dovelas centrales se deforman mucho y las extremas poco o casi nada.

Asimismo en una dovela, no todas las fibras se deforman igual, quedando las más alejadas del plano medio muy exigidas y, sin afectar, las del plano neutro (de ahí el nombre).

De la ley de Hooke se deduce entonces que existirá variación de tensiones en cada sección, debido al cambio de la resultante izquierda y en cada punto de cada sección según su distancia al plano neutro, reconociéndose un valor máximo y el valor nulo. Máxima deformación en el centro y mínima hacia los extremos de la pieza y en una misma sección, máxima tensión en las fibras extremas y nula en el plano neutro.





En este caso, acortamiento superior y alargamiento inferior, lo cual permite reconocer compresiones arriba y tracciones abajo. En el plano medio, no hay variantes y, por ende, no hay esfuerzos ni de tracción ni de compresión.

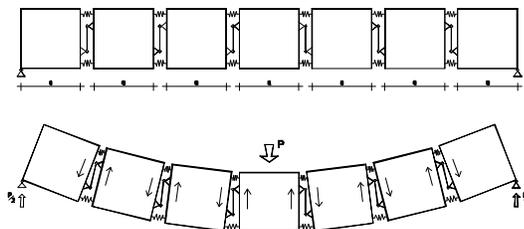
B. CARACTERÍSTICAS

- Las acciones que actúan sobre este tipo de estructuras tienen componente normal (perpendicular) a los ejes principales de sus unidades funcionales.
- Se comprueba que la deformación característica es la flexión del eje de las piezas.
- En el análisis de las solicitaciones siempre aparecen momentos flectores, casi siempre acompañados de esfuerzos cortantes y eventualmente de esfuerzos axiales.
- La curva que toma el eje de la pieza deformada (ELÁSTICA) depende del sistema de cargas y de las características de la pieza. Puede hacerse un modelo matemático que la represente perfectamente. Tiene la particularidad de que su curvatura es diferente en cada punto. Cuando se producen fallos, estos aparecen casi sin excepción en los puntos de máxima curvatura. Estudiando la resultante izquierda, esos puntos también coinciden con los máximos valores de los momentos.
- La derivada de esa función dará la pendiente en cada punto, por lo que permitirá determinar los valores máximos, necesarios para definir el máximo valor de flecha para el diseño.
- La derivada segunda proporcionará, con su signo, el de la concavidad, y con su valor podrá definirse la curvatura.

C. Modelos a utilizar

1. De visualización

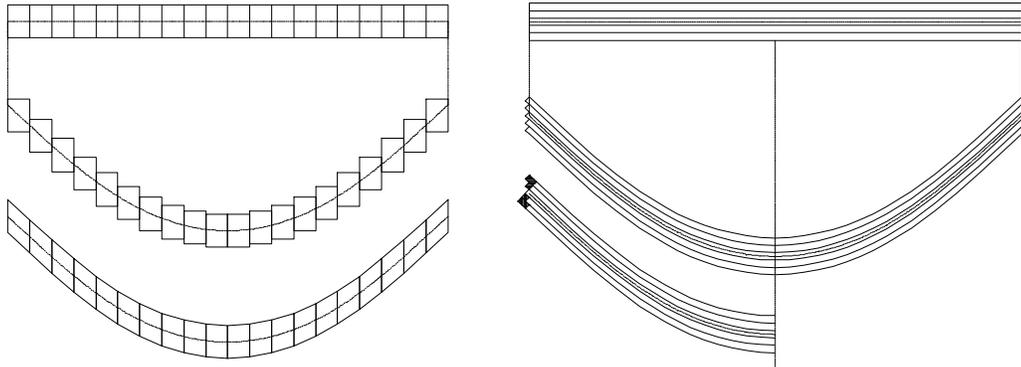
a. de las dovelas



Los resortes más exigidos son los centrales

En este modelo se visualizan principalmente las deformaciones y esfuerzos generados por el momento flector. Se aprecia la presencia de los cortantes en las bielas verticales.

b. de las tablillas

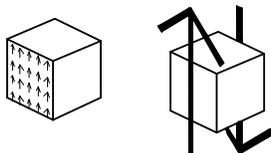
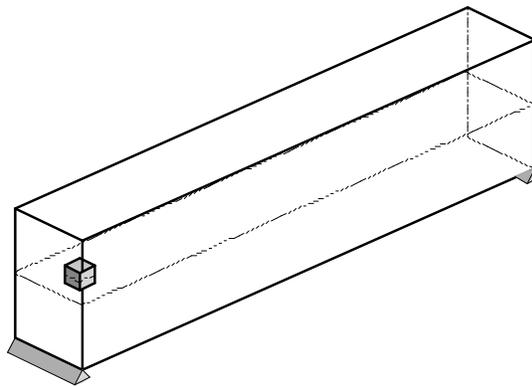


Los mayores deslizamientos se dan cercanos a los apoyos

Este modelo permite visualizar los deslizamientos provocados por los cortantes, tanto en las secciones normales al eje de la barra como en aquellas paralelas a él.

Es necesario reconocer que la existencia de tensiones rasantes en un plano, suponen la existencia de tensiones rasantes en un plano perpendicular.

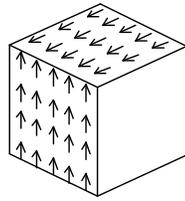
Para visualizar este fenómeno se toma un cubo de lado diferencial ubicado en el plano neutro en las cercanías de los apoyos, tal como se ve en la figura:



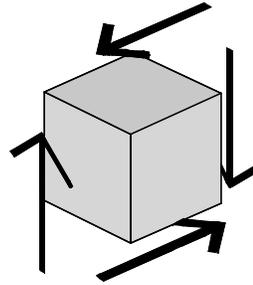
A



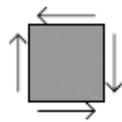
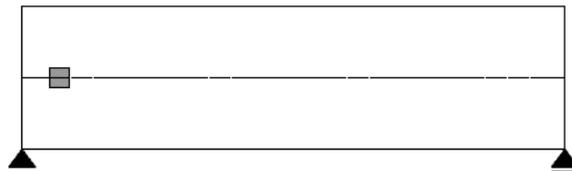
B



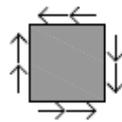
C



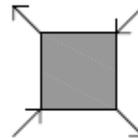
D



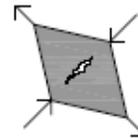
E



F



G



H

El análisis del equilibrio de ese cubo comienza reconociendo la diferencial de tensión tangencial que existe en cada una de sus caras verticales, que deben ser iguales y de sentido opuesto, por corresponder a las resultantes izquierda y derecha. Pero esas fuerzas no están en la misma línea de acción, por lo que generan un momento expresado por el par de fuerzas (figura A). Dado que existe equilibrio (el cubo elemental en estudio no se mueve), es necesario que exista un momento igual y opuesto y que sólo podría ser generado por tensiones tangenciales en las caras horizontales, tal como se ve en la figura B. Estas tensiones se llaman **tensiones conjugadas** y pueden visualizarse en el modelo de “las tablillas”. En las figuras C y D se aprecian todas las fuerzas que aparecen y que generan el equilibrio. Cada una de esas fuerzas resultantes de las tensiones en las caras, podría tomarse como dos iguales cuya suma equivalga al total como se representa en la figura F. De este modo es posible componerlas dos a dos en cada esquina, obteniendo los vectores a 45° que se muestran en la figura G. La acción de estos vectores supondría la variación de la forma del cuadrado a la del rombo (en su proyección vertical). Un material con poca capacidad resistente a las tracciones, como sería el caso del hormigón, delataría estas tracciones con una fisuración tal como se ve en la figura H.

2. De los materiales

Corresponde recordar el carácter siempre aproximado de los modelos.

a. Homogéneo

Las mismas propiedades en todos los puntos

b. Continuo

No se considera el carácter discreto de la materia

c. Isótropo

Iguals propiedades en todas las direcciones

D. De comportamiento teórico

1. Deformaciones

Recordar la relación tensión-deformación para reconocer que los puntos donde se producen los máximos acortamientos o alargamientos, serán los de mayor tensión y por consiguiente, los **puntos críticos**, fácilmente vinculables a los puntos de mayores solicitaciones (V y M) y de mayores deformaciones (remi-tirse a los modelos de visualización).

E. Matemáticos

Los que se utilizarán para la cuantificación y diseño.

II. RELACIÓN p , V y M

A. PREVIO - Gragea matemática (ver archivo correspondiente)

1. FUNCIÓN, INCREMENTOS, CONTINUIDAD, DERIVADA, DIFERENCIAL, INTEGRAL

- DEPENDENCIA FUNCIONAL
- INCREMENTO DE LA FUNCIÓN
- CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN
- DERIVADA DE UNA FUNCIÓN
- INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA
- RELACIÓN ENTRE LA DIFERENCIABILIDAD DE LA FUNCIÓN Y SU CONTINUIDAD
- SEGUNDA DERIVADA, O DERIVADA DE SEGUNDO ORDEN
- DIFERENCIAL
- REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIFERENCIAL

2. ELEMENTOS DE LAS CURVAS PLANAS DEFINIDAS COMO $y = f(x)$

- PENDIENTE
- CURVATURA
- RADIO DE CURVATURA

3. INTEGRALES

- INTEGRAL INDEFINIDA
- INTEGRAL DEFINIDA
- FUNCIÓN INFINITÉSIMA E INFINITA – Orden de un infinitésimo

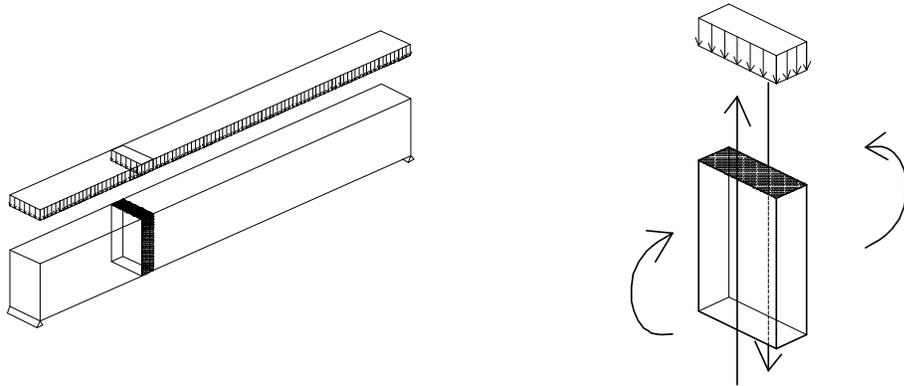
4. CARACTERÍSTICAS DE UNA SECCIÓN PLANA

- AREA
- MOMENTO ESTÁTICO – Centro de gravedad

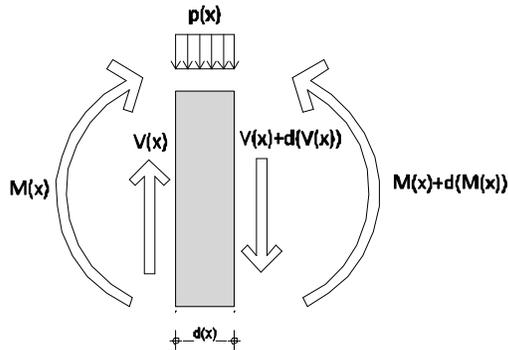
- MOMENTO DE INERCIA – Steiner

B. SOLICITACIONES

1. Equilibrio de las partes aplicado a una dovela infinitesimal



a. $\Sigma F_{\text{vert}} = 0$



$$\Sigma F_{\text{vert}} = V(x) + p(x) \cdot d(x) - [V(x) + d(V(x))] = p(x) \cdot d(x) - d(V(x)) = 0$$

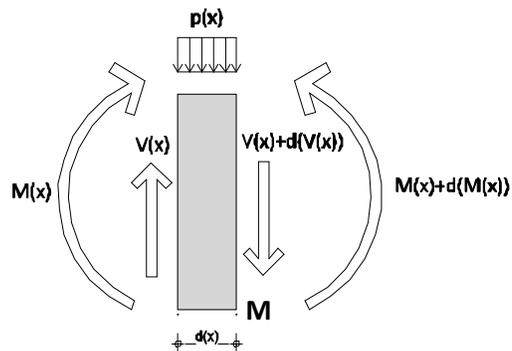
por lo tanto:

$$p(x) = \frac{d(V(x))}{d(x)} = V'(x)$$

Se deduce que la carga es la derivada primera del cortante

- 1) Desde el punto de vista físico. Para una dovela infinitesimal el incremento de carga (p) se corresponde con un incremento del cortante (V).
- 2) Desde el punto de vista matemático. La función que representa la variación de la carga resulta ser la derivada primera de la función que representa la variación del cortante

b. $\Sigma M = 0$ respecto a “M”



$$\Sigma M_M = M(x) + V(x).d(x) - p(x).d(x).d(x)/2 - [M(x) + d(M(x))] = 0$$

$p(x).d(x)^2/2$ resulta ser un infinitésimo de mayor orden que $d(x)$ (tiende más rápidamente a cero) por lo que se puede despreciar por lo tanto:

$$V(x) = \frac{d(M(x))}{d(x)} = M'(x)$$

Se deduce que el cortante es la derivada primera del momen-

- 1) Desde el punto de vista físico. Para una dovela infinitesimal el incremento del cortante (V) se corresponde con un incremento del momento (M).
- 2) Desde el punto de vista matemático. La función que representa la variación del cortante resulta ser la derivada primera de la función que representa la variación del momento
- 3) En consecuencia la carga resulta ser la derivada segunda del momento, pudiéndose plantear lo que se llama la ecuación fundamental de las vigas rectas:

$$p = V' = M'' \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad M = \int V = \int \int p$$

- 4) Esta relación matemática tiene relevante aplicación práctica para el trazado de estas funciones

2. Diagramas de solicitaciones

Para el diseño de una pieza, importa conocer los puntos donde se presentan las máximas tensiones, las cuales no deben superar la tensión de diseño del material utilizado determinada mediante ensayos. Estos puntos críticos son aquéllos en que las solicitaciones son máximas. Para su determinación es conveniente visualizar la variación punto a punto de las mismas. Dado que las funciones matemáticas que las representan son conocidas, el trazado de estas funciones permite su determinación con gran facilidad.

Estos trazados se conocen como **diagramas de solicitaciones**.

Para trazar estos diagramas **se debe partir del elemento en equilibrio**.

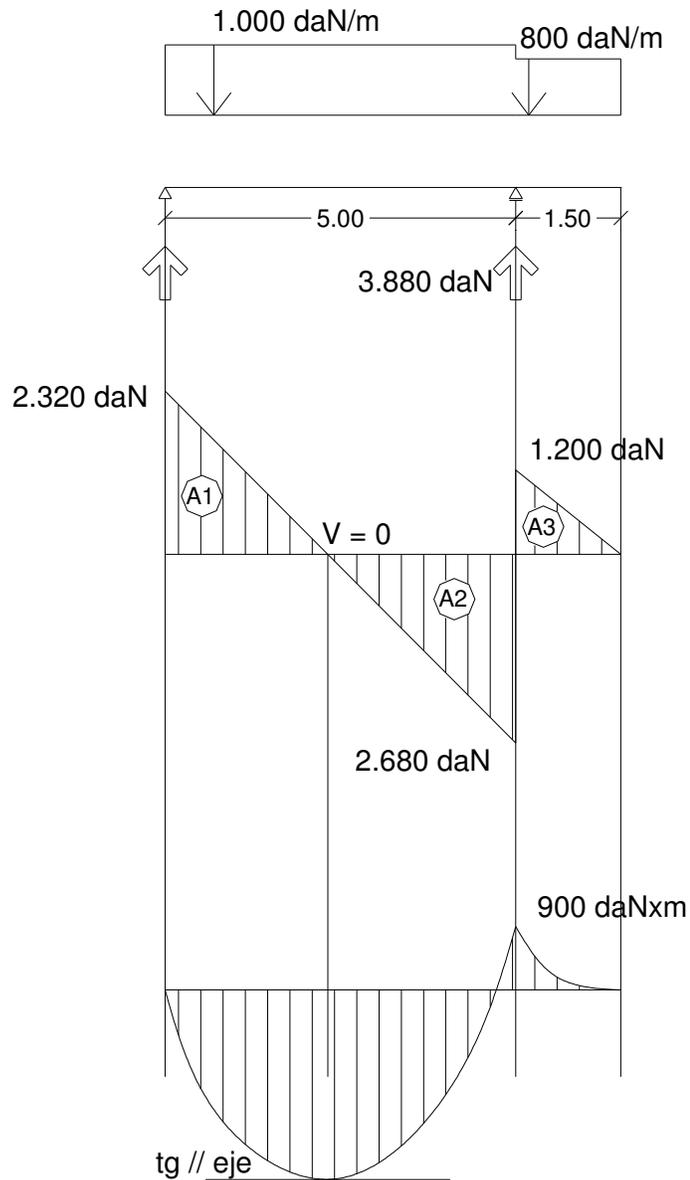
Definiendo el valor y la ubicación en el plano de situación de la resultante izquierda en algunos puntos (los apoyos, los extremos de las ménsulas, etc.), es posible determinar en ellos el valor de las solicitaciones. A partir de esos puntos se pueden completar los diagramas aprovechando las propiedades que tienen las relaciones matemáticas que vinculan a las tres funciones (carga, cortante y momento). Concretamente en el punto en que la función carga se anula, la función cortante tendrá un máximo o un mínimo relativo. El área debajo de la función que representa la carga y el eje de la pieza en un entorno dado, representa el incremento en más o en menos del valor del cortante en el mismo entorno. Análogamente, en el punto en que la función cortante se anula, la función que representa al momento tendrá un máximo o un mínimo relativo. El área debajo de la función que representa al cortante y el eje de la pieza, en un entorno dado, representa el incremento en más o en menos del valor del momento en el mismo entorno.

Por lo tanto, conocida una pieza en estado de equilibrio estático, quedan determinados los valores para cada punto del cortante y del momento flector, indepen-

dientemente de las características particulares de la pieza de que se trate. Conocidos los diagramas, es inmediato determinar los puntos de máximas sollicitaciones.

También es posible trazar un diagrama de axiles, si los hubiere, sólo que estos no se vinculan tan directamente a los diagramas de cortante y flector.

3. Ejemplo



$$A1 = 2.691 \text{ daNm}$$

$$A2 - A3 = 2.691 \text{ daNm}$$

$$A1 - A2 + A3 = 0$$

III. DISEÑO EN FLEXIÓN SIMPLE

A partir de la existencia de deformaciones en una pieza flexada se puede establecer el tipo y la magnitud de las tensiones que se dan en cada punto de una pieza.

Se denomina “tensión” al valor límite al que tiende una fuerza interna que actúa sobre una superficie elemental de una sección cualquiera, cuando el área considerada tiende a cero. Esta sección puede, en principio ser cualquiera. Cuando en una sección determinada se tiene una distribución de esfuerzos uniforme, se puede definir a la tensión como el cociente entre la fuerza y el área en la que actúa

$$\boxed{Tension = \frac{Fuerza}{Área}}$$

y por lo tanto,

$$\boxed{Fuerza = Tension \cdot Área}$$

Para poder determinar sus características (dirección, sentido y módulo) debemos conocer el tipo de deformación que las produjo o, lo que es equivalente para este caso, las sollicitaciones que generaron la deformación.

Podrá verse que el Momento Flector puede expresarse como un par de fuerzas perpendiculares a la sección, las cuales son responsables de las compresiones y tracciones que modifican la forma de la dovela. Las tensiones que se generan se denominan tensiones normales y se las suele representar con la griega σ (Sigma). Es de destacar que los flectores generan el mismo tipo de deformaciones que los esfuerzos axiales (tracciones o compresiones) y por lo tanto generan el mismo tipo de tensiones. La diferencia radica en la distribución a lo largo de la sección para una y otra sollicitación.

Análogamente se desprende que los esfuerzos cortantes resultan ser la resultante de un estado tensional en donde las fuerzas unitarias están contenidas en la propia sección, por lo que se llaman tensiones tangenciales y se las suele representar con la letra griega τ (Tau). Estas tensiones producen en la sección un efecto cizallante de deslizamiento. La distribución no resulta uniforme a lo largo de la sección.

Es de destacar que los materiales tienen distinto comportamiento frente a uno u otro tipo tensiones, por lo que es de la mayor importancia cuantificar cada una y determinar sus valores máximos, a los efectos del diseño.

A. Diseño para el momento flector

1. Vinculación del radio de curvatura con la variación de longitud de un plano de fibras a una distancia determinada del eje de la pieza

Observando el diagrama de momentos flectores y de acuerdo con la experiencia, se puede constatar que la curvatura mantiene una relación de proporcionalidad con el momento flector en la sección correspondiente, de modo que podríamos vincularlos por medio de una constante, de este modo:

$$M(x) = cte. K(x)$$

Simplemente echando mano un poco a la experiencia y utilizando otro poco de sentido común es fácil reconocer que esa constante está vinculado a aquellas propiedades de la pieza que se oponen a la flexión. Concretamente su rigidez, o sea su capacidad de resistir el doblado. Y también es fácil aceptar que esa rigidez depende del material y de la forma de la sección de la pieza. En cuanto al material, de la gráfica tensión-deformación, se desprende que el aumento del módulo de elasticidad supone que es necesaria una tensión mayor (un esfuerzo mayor) para lograr una determinada deformación. Cosa bien evidente si se compara acero y madera. En cuanto a la forma, la experiencia cotidiana indica que la forma de un elemento modifica su comportamiento frente al doblado, pudiéndose demostrar que ese cambio de forma se vincula

al momento de inercia de la sección con respecto al eje baricéntrico. Para lograr el máximo rendimiento de una sección frente a la flexión, conviene colocar la pieza de modo que el eje que corresponde a la mayor inercia se ubique perpendicular al plano donde se ubican las cargas, ya que de ese modo la capacidad de impedir el encurvamiento de la pieza es también máximo. Ese eje suele elegirse como el x .

De lo cual se desprende que:

$$M(x) = E.I_x \cdot K(x)$$

Siendo I_x el momento de inercia mayor y E el módulo de elasticidad o módulo de Young, que caracteriza el comportamiento de cada material. Es en realidad el coeficiente angular del tramo de proporcionalidad recto de la función tensión – deformación (ver gráfica en páginas anteriores).

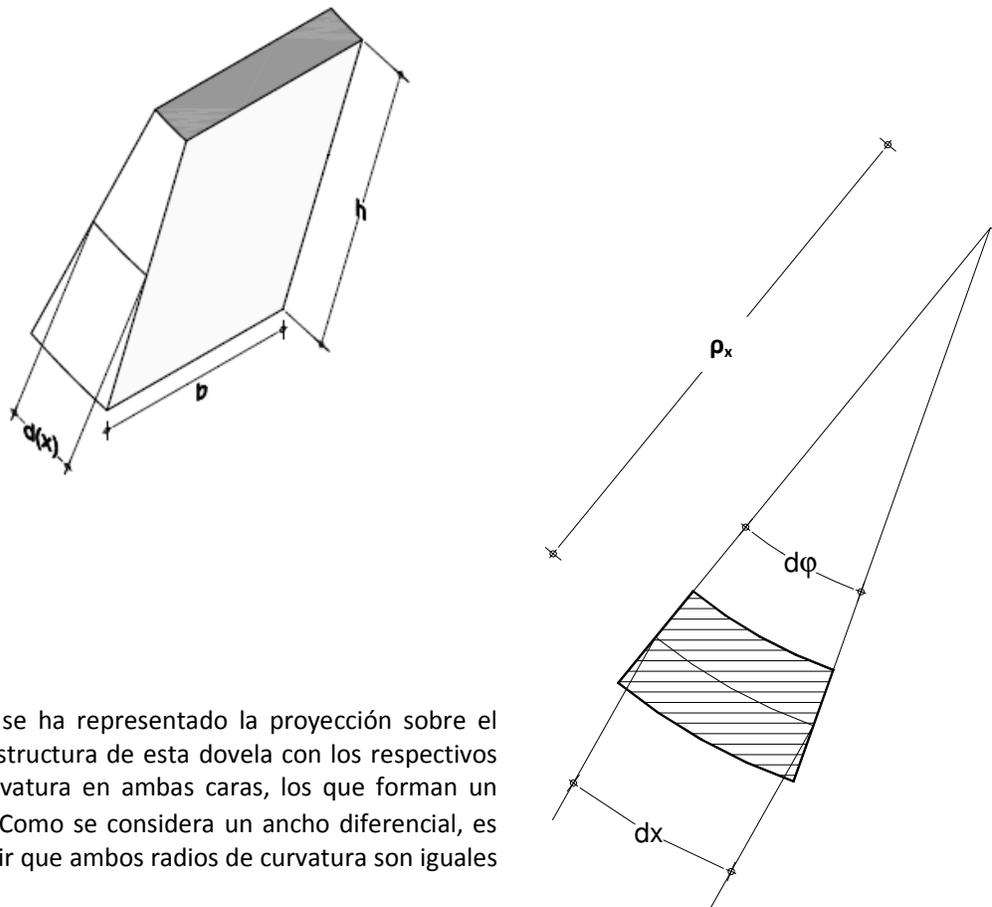
También se podría llegar a este resultado por un camino analítico.

Se puede comprobar que la máxima curvatura (o, lo que es lo mismo, el mínimo radio de curvatura) estará en coincidencia con el máximo valor del momento flector.

Si se considera un trozo de viga separado por dos cortes muy próximos (“dovela”) en algún sector en que se haya producido curvatura notoria, su puede visualizar esta relación.

Conociendo la relación entre tensiones y deformaciones estudiadas en laboratorio, basta con recurrir a la gráfica que vincula la deformación relativa ϵ con las tensiones normales σ .

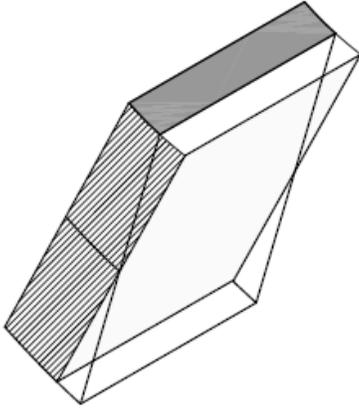
Se toma una dovela de ancho diferencial (un valor variable que tiende a cero) de una viga de base b y altura h , ya deformada por la flexión.



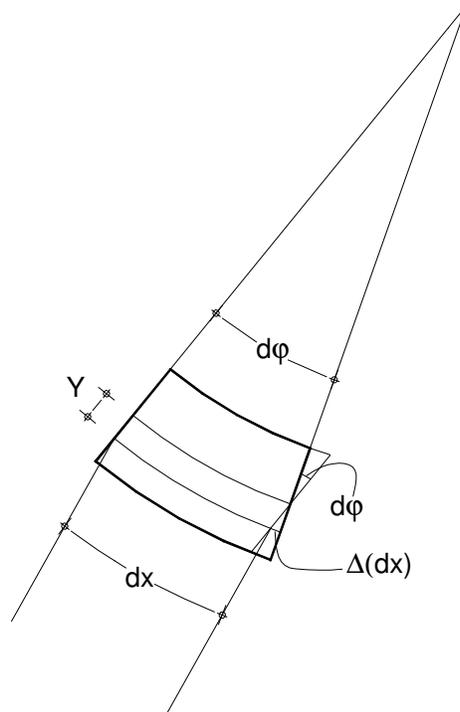
En la figura se ha representado la proyección sobre el plano de la estructura de esta dovela con los respectivos radios de curvatura en ambas caras, los que forman un ángulo $d\varphi$. Como se considera un ancho diferencial, es posible admitir que ambos radios de curvatura son iguales

y que el arco que representa la longitud de la dovela deformada, coincide prácticamente con la cuerda correspondiente

2. Determinación matemática de la deformación relativa ϵ para fibras a determinada distancia del plano neutro



Si en el extremo derecho de la dovela trazamos un plano paralelo al plano que forma ahora la sección izquierda, obtenemos lo representado en las figuras y reconocemos al mismo ángulo $d\phi$ que queda definido por la diferencia de inclinación entre las caras a derecha e izquierda. En la figura de la derecha, a una distancia Y del eje, puede reconocerse que el largo de la dovela se incrementó en un valor $\Delta(dx)$, valor que aumenta a medida que aumenta Y , valiendo cero en el propio eje y resultando máximo en la fibra extrema.



Del análisis de estas figuras puede deducirse la proporcionalidad entre el radio de giro con el valor de la ordenada Y con respecto al ancho dx y al incremento de ese ancho Δdx a través de la expresión:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{Y}{\rho_x}$$

Por definición:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \epsilon \quad \text{y} \quad \frac{1}{\rho_x} = K$$

de donde, la expresión queda:

$$\varepsilon = K \cdot Y$$

Se define matemáticamente la curvatura:

$$K = \frac{z''(x)}{(1-z'(x))^{\frac{3}{2}}}$$

Dado que se trata de curvaturas muy pequeñas (radios de curvatura que tienden a infinito) la pendiente de esa curva (definida por el valor de la derivada primera) tiende a cero, por lo que el denominador tiende a la unidad, pudiéndose aceptar que la curvatura equivale al valor de la derivada segunda. Esto es una aproximación totalmente válida para este caso.

$$K \cong z''(x)$$

por lo que

$$\varepsilon = Y \cdot z''(x)$$

3. A partir de la relación tensión - deformación (Hooke) se puede determinar la tensión correspondiente

De la relación entre tensiones y deformaciones se concluye que

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

de lo que se desprende que

$$\sigma = E \cdot Y \cdot K(x)$$

O lo que es lo mismo para este caso

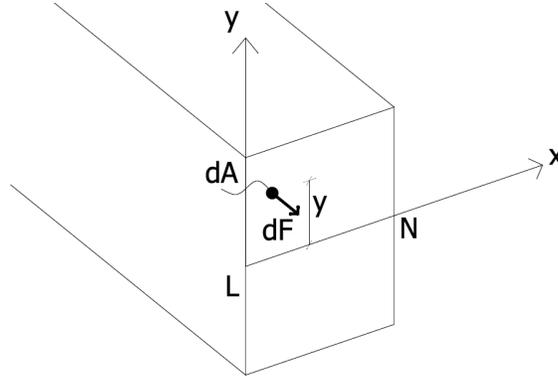
$$\sigma = E \cdot Y \cdot z''(x)$$

De esta expresión se pueden extraer algunas conclusiones muy importantes:

- La tensión depende de **E** lo que resulta evidente, ya que cuanto mayor sea el módulo de elasticidad más tensión habrá que ejercer para lograr una deformación.
- La tensión aumenta a medida que se consideran fibras que se van alejando de la línea neutra, lo que también resulta evidente, ya que coincide con el aumento de la deformación (más alargamiento o más acortamiento)
- La tensión aumenta con la curvatura, lo que también resulta claro a partir de la experiencia (para romper un elemento hay que curvarlo cada vez más)

4. Considerando el equilibrio de la sección a partir de $\Sigma M = 0$ quedan vinculados el momento flector (M_f), la tensión normal (σ) y la Inercia de la sección con respecto al eje neutro (I_x) en función de la distancia de las fibras al plano neutro.

Como la **curvatura** surge con el **momento flector**, se hace un análisis del momento interno, como resultante total de las tensiones existentes de modo de poder vincularlos matemáticamente.



Para ello consideremos un diferencial de área de la sección normal de valor dA sobre el que actúa una tensión, cuya resultante en el área vale dF

$$dF = \sigma \cdot dA$$

Considerando momentos con respecto a la Línea Neutra de la sección (coincidente en este caso con el eje de las abscisas) tendremos que el momento total de toda el área para cada uno de los diferentes y variables valores de dF vendría dado por la expresión

$$M_f = M_{\text{int}} = \int_{\text{área}} \sigma \cdot dA \cdot Y$$

Tomando el valor de σ de la ecuación en que se la relaciona con la curvatura $K(x)$, nos queda

$$M_f = \int_{\text{área}} E \cdot Y \cdot K(x) \cdot dA \cdot Y$$

Retirando las constantes del valor afectado por la integral, quedaría:

$$M_f = K(x) \cdot E \int_{\text{área}} dA \cdot y^2$$

El valor de la integral que queda así determinada, corresponde al momento de inercia de la sección con respecto al eje desde el que se han tomado las distancias, en este caso el eje x, o sea, la Línea Neutra.

Con lo que la expresión queda:

$$M_f = K(x) \cdot E \cdot I_x$$

Que es la expresión que nos vincula el momento flector con la curvatura.

Despejando la curvatura de la expresión que la vincula con σ y de esta última expresión, se puede establecer:

$$K(x) = \frac{\sigma}{E \cdot Y} \quad K(x) = \frac{Mf}{E \cdot I_x}$$

Esta última expresión es muy importante, ya que vincula la elástica (a través de su derivada segunda) con el momento flector. Esto será de aplicación a la hora de encontrar el valor de la flecha máxima en el diseño a flexión.

Igualando los segundos términos:

$$\frac{Mf}{E \cdot I_x} = \frac{\sigma}{E \cdot Y}$$

$$Mf = \frac{\sigma \cdot I_x}{Y}$$

o sea

$$\sigma = \frac{Mf \cdot Y}{I_x}$$

De donde se desprende que

- la tensión que aparece en cada punto de la sección es directamente proporcional al momento flector (generado por las acciones externas)
- el valor de las tensiones aumenta a medida que se consideran fibras que se alejan de la Línea Neutra
- las tensiones en cada punto resultan inversamente proporcionales al Momento de Inercia de la sección con respecto al eje baricéntrico, que es también la Línea Neutra.

Se suele definir **Módulo Resistente w** :

$$w = \frac{I_x}{Y}$$

de donde la expresión queda:

$$\sigma = \frac{Mf}{w}$$

para secciones simétricas

El Módulo Resistente así definido resulta ser una característica geométrica de la sección y se medirá en cm^3 (cociente de una inercia que se mide en cm^4 y una distancia medida en cm).

Queda claro que para un aumento de la altura de la pieza, el valor de **w** crece mucho más rápidamente que para un aumento de su base, dado que el valor de la altura está afectado a la segunda potencia, lo que es coherente con la experiencia.

Para las secciones más habituales de perfilaría de acero y de escuadrías de madera, los valores del módulo resistente aparecen tabulados y será el punto de entrada para un diseño, ya que

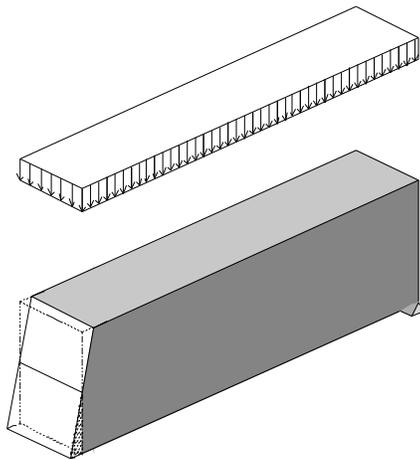
parte de la base que la tensión nunca deberá superar la de diseño, para lo que se utilizará la expresión:

$$f_d \geq \sigma_{m\acute{a}x} = \frac{Mf}{w}$$

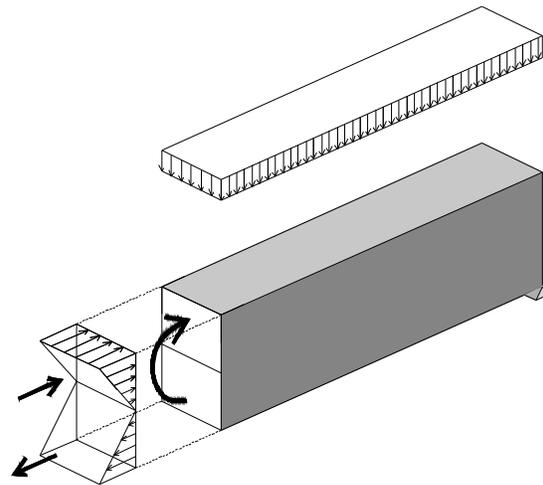
$$w = \frac{Mf}{fd}$$

No olvidando poner todos los valores en las mismas unidades, por ejemplo, daN y cm.

Conocida la deformación de la pieza, se deducen por Hooke, las tensiones emergentes punto a punto en una sección dada:



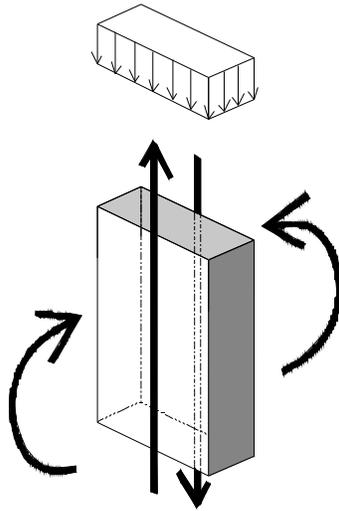
Deformación de la dovela por flector



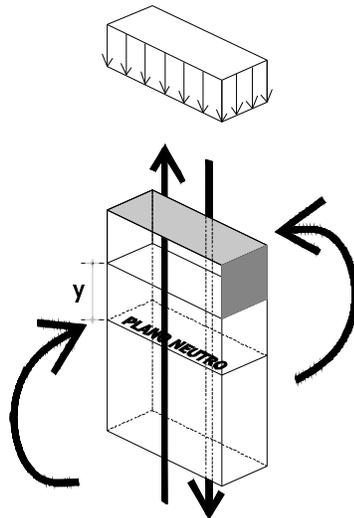
Estado tensional por flector

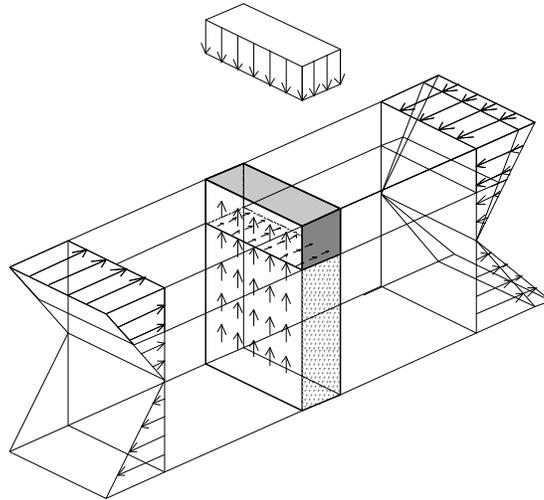
B. Diseño para el esfuerzo cortante

1. Considerando el equilibrio de una dovela de ancho infinitesimal de análogas características a la estudiada para el diseño a momento flector, considerando los esfuerzos cortantes y los momentos expresados por vectores



2. Se considerará el equilibrio de la porción superior de esta dovela al ser cortada por un plano paralelo al plano neutro a una distancia cualquiera y .



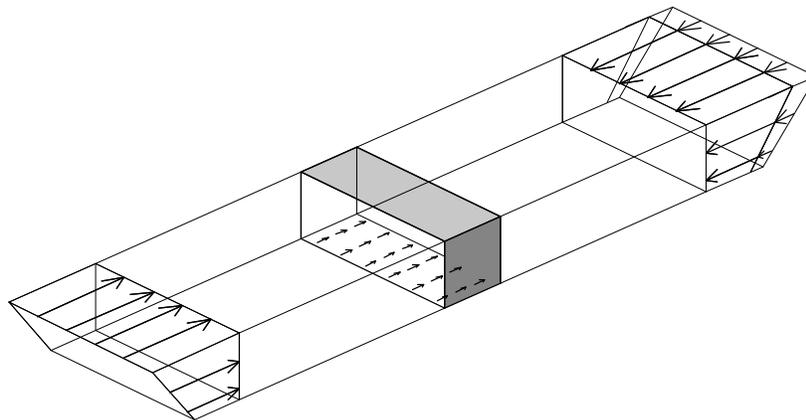


3. Considerando las tensiones en cada punto de la sección, a izquierda y derecha

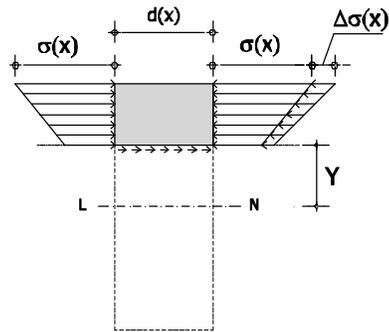
Se ha visto que existe, un incremento del valor de estas tensiones a uno y otro lado, ya que ha habido una variación de las solicitaciones, incremento que en la figura se expresa en la parte superior del plano situado a la distancia x del plano situado a la distancia y del plano neutro

4. Aislado ese trozo de dovela y estableciendo el nuevo equilibrio de esta parte, únicamente para $(\Sigma F_{horiz} = 0)$

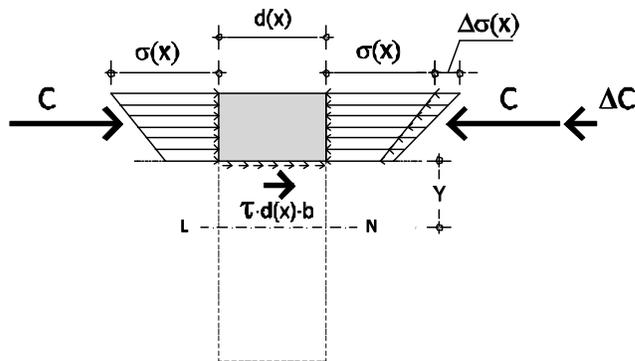
Todas las caras de este trozo donde se seccionó presentan tensiones provenientes de la continuidad del material. Se podrán reconocer tensiones normales y tangenciales donde hubo contacto, no así en las superficies exteriores (parte superior y laterales de la viga)



5. Proyección del sector de dovela en el plano principal



Tensiones en todas las caras



Resultantes de las tensiones

6. Se concluye que la resultante de las tensiones tangenciales en el plano de corte paralelo al plano neutro es igual al incremento total de tensiones normales en las secciones perpendiculares al eje. Se llega a la formulación de Jourawsky

Se aplica la ecuación de equilibrio $\sum F_{horizontales} = 0$

Las fuerzas horizontales que actúan sobre la porción de dovela son:

- La resultante de las tensiones normales generadas por el momento flector que actúan sobre la cara de la izquierda C
- La resultante de las tensiones normales generadas por el momento flector que actúan sobre la cara de la derecha $C + dC$, que difieren de las que actúan a la izquierda en un incremento diferencial, ya que se trata de una dovela de ancho diferencial sobre la que actúan cargas.
- Sobre la cara superior exterior no actúan fuerzas horizontales. Tampoco actúan

fuerzas de ningún tipo en las caras exteriores laterales.

- Dado que la dovela está en equilibrio, para que éste sea posible debe haber una fuerza igual a dC en dirección y módulo pero de sentido opuesto. Esta fuerza no puede ser otra que la resultante de las tensiones tangenciales que existen sobre esa cara, que son las tensiones conjugadas a las que actúan sobre la sección, tal como se estudió el modelo de visualización de las tablillas.

$$dC = \tau \cdot b \cdot d(x)$$

Del estudio del momento flector, podemos deducir el valor de la tensión máxima está dado por la expresión:

$$\sigma = \frac{M_{fl}}{W_{res}}$$

En este caso, dado que se trata de un diferencial de tensión variable en la sección, la expresión puede plantearse:

$$d\sigma = \frac{dM_{fl}}{I_x} \cdot Y$$

El valor del incremento ΔC será el valor de la integral de $d\sigma$ en el área de sección por encima del plano paralelo a una distancia Y del PN.

$$dC = \int_{Area} d\sigma \cdot dA \quad \Delta C = \int_{Area} \frac{dM_{fl}}{I_x} \cdot Y \cdot dA$$

Para una sección dada, tanto el valor del momento flector como el de la I_x son constantes, por lo que salen del símbolo de integración:

$$dC = \frac{dM_{fl}}{I_x} \int_{Area} y \cdot dA$$

Por definición, $\int_{Area} y \cdot dA$ es el **Momento Estático S** del área con respecto al plano neutro

$$dC = \frac{dM_{fl}}{I_x} \cdot S$$

Dado que

$$dC = \tau \cdot b \cdot d(x)$$

Resulta

$$\tau \cdot b \cdot d(x) = \frac{dM_{fl}}{I_x} \cdot S$$

Por lo que

$$\tau = \frac{dM_{fl} \cdot S}{d(x) \cdot b \cdot I_x}$$

Sabiendo que el Cortante es la derivada primera del Momento Flector, la expresión $\frac{dM}{d(x)} = V$

Con lo que la expresión del valor de la tensión tangencial resulta ser:

$$\tau = \frac{V \cdot S_{LN}}{b \cdot I_x}$$

conocida como la expresión de Jourawsky.

De la expresión se deduce que para una determinada sección, el valor del cortante V , el momento de inercia I_x y en ancho b de la pieza son constantes. El único valor variable para una misma sección es el del momento estático con respecto a la Línea Neutra S_{LN} , que cambia a medida que se toman áreas a diferente distancia de la misma.

Para el caso del rectángulo, esta variación se estudia tomando el área que se encuentra por encima de una recta a una distancia Y (variable) medida desde el eje neutro.

El valor del momento estático S para esa área vendrá dado por el producto de su valor, multiplicado por la distancia desde el eje neutro hasta el centro de gravedad del área considerada:

$$S_{LN} = \left(\frac{h}{2} - Y\right) \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) \cdot \frac{1}{2}$$

siendo:

$$\left(\frac{h}{2} - Y\right) \cdot b = AREA$$

$$\left(\frac{h}{2} + y\right) \cdot \frac{1}{2} = DISTANCIA$$

La distancia surge de tomar el promedio entre

$\frac{h}{2}$ e Y (valor hasta el punto G)

Sacando

$\frac{b}{2}$ de factor común y haciendo el producto de los

Binomios conjugados quedaría:

$$S_{LN} = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Sustituyendo este valor en la fórmula de Jourawsky:

$$\tau = \frac{V}{b \cdot I_x} \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

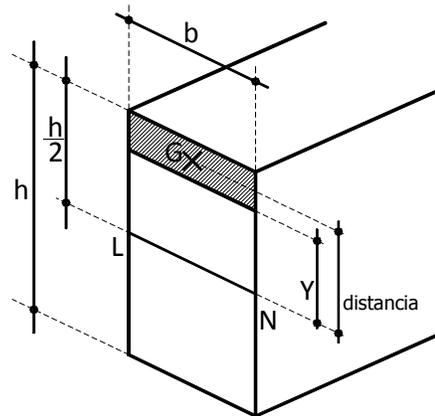
Simplificando,

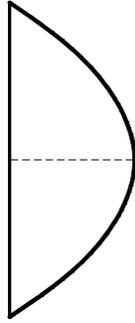
$$\tau = \frac{V}{2 \cdot I_x} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \text{ que es la ecuación de una parábola de 2º grado.}$$

$$\text{Para } Y=0 \quad \tau = \frac{V}{2 \cdot I_x} \cdot \left(\frac{h^2}{4}\right) = \frac{V \cdot h^2}{8 \cdot I_x}$$

$$\text{Para } Y=h/2 \quad \tau = 0$$

Estas tensiones τ están contenidas en la propia sección por tratarse de tensiones rasantes o tangenciales. Para graficarlas y poder apreciar la variación se recurre al artificio de rotar los valores de modo de ubicarlos perpendiculares a la sección quedando un diagrama de este tipo:





donde se puede apreciar la variación del valor de las tensiones rasantes a medida que varía la distancia a la línea neutra. Se ve que el valor de la tensión se anula en las fibras extremas y es máxima sobre la propia línea neutra.

S

La expresión del valor máximo se puede simplificar, sustituyendo I_x por su valor para el rectángulo:

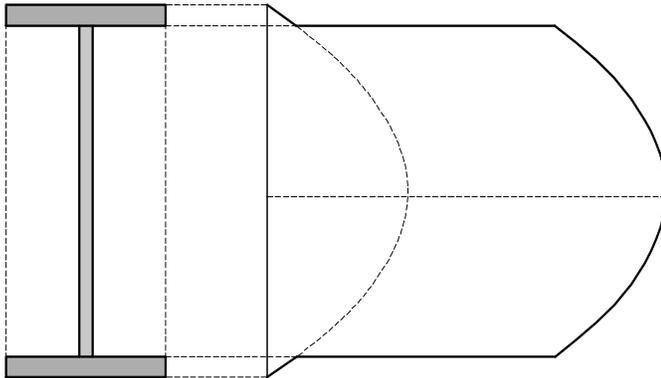
$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \text{de donde} \quad \tau = \frac{V \cdot h^2}{8} \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Simplificando

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{V}{b \cdot h}$$

que es la fórmula de aplicación práctica para secciones rectangulares.

Para el caso de los perfiles, por ejemplo el **I** ("I" ó "doble T"), se puede hacer una aproximación considerando que se trata de tres rectángulos, dos representando las alas y uno al alma:



Si la forma fuese un rectángulo completo de base b igual al ancho de las alas, el diagrama sería el punteado. Como la base b se angosta abruptamente al llegar al alma, y dado que en la formulación de Jourawsky el valor de b está en el denominador, la tensión crece también abruptamente, dando un diagrama como el de la figura. En ese diagrama se aprecia que es el alma del perfil quien enfrenta las máximas tensiones rasantes.

Simplificando, se puede admitir que el valor de la tensión tangencial máxima vale, para los perfiles:

$$\tau = \frac{V}{A_{alma}}$$

Siendo el denominador el área del alma del perfil.

Para hallar esta área, habrá que recurrir a los datos que proporciona la tabla y que son:

h = altura del perfil (que coincide con su denominación)

b = ancho del alma

d = espesor del ala

Estos valores están en milímetros en la tabla. Conviene pasar todo a centímetros para que se ajusten las unidades.

El área del alma resultará entonces:

$$A_{alma} = b \cdot (h - 2d)$$

C. Flecha

Dado que es condición del Equilibrio Estable la estabilidad de la forma, en todo diseño corresponde analizar y cuantificar la deformación para verificar que se mantendrá dentro de los parámetros aceptados por el proyecto.

En el caso de la flexión, habrá que verificar que el apartamiento en la forma de la pieza deformada con respecto a la forma original sea menor que un determinado valor que se establecerá para cada caso. En condiciones generales, se puede aceptar que la flecha máxima no superará un valor de un quinientosavo de la luz para piezas principales y un trescientosavo de la luz para piezas secundarias.

Tal como se señaló, es posible determinar matemáticamente la curva que representa a la elástica ("deformada") para una pieza determinada y un sistema de cargas dado. Por lo tanto hallando los máximos relativos de esa curva, se obtendrá el valor de la flecha correspondiente. Sin embargo, dado que la determinación matemática de la curva de la elástica es compleja, a la hora de su aplicación práctica, existen tablas que dan valores aproximados, pero válidos a todos los efectos.

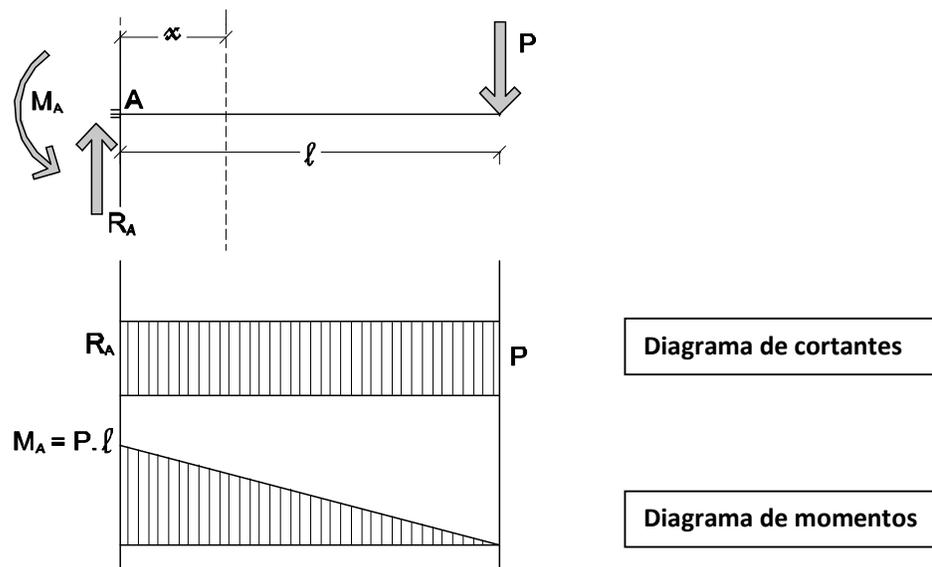
Es oportuno recordar la relación matemática que se estableció entre la derivada segunda de la elástica, que vinculamos a la curvatura $K(x)$ y el momento flector

$$K(x) = \frac{Mf}{E \cdot I_x} \quad \text{o, lo que es lo mismo} \quad z''(x) = \frac{Mf}{E \cdot I_x}$$

sustituyendo la curvatura $K(x)$ por la derivada segunda $z''(x)$ ya que como se vio, la curvatura puede tomarse como la derivada segunda de la elástica dado que se trata de curvaturas muy pequeñas, con pendientes cercanas a cero.

En definitiva, conociendo la función que define la variación del momento a lo largo de una pieza e integrando dos veces esa función, se podrá determinar la función de la elástica. Una vez conocida ésta, los valores máximos darán las flechas máximas.

A los efectos de entender el procedimiento, se calculará matemáticamente la flecha para un caso elemental de una ménsula con una carga puntual.

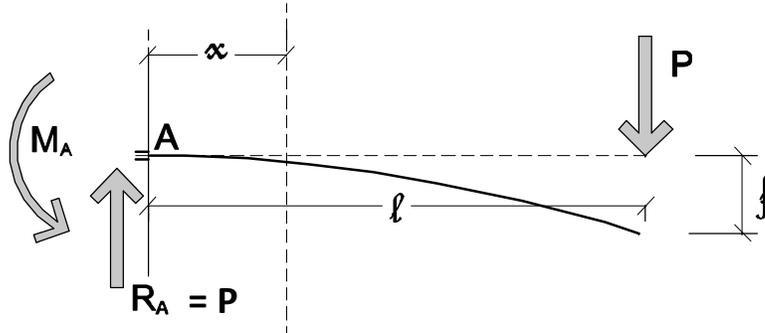


El diagrama de cortantes quedará definido por una constante (su valor no cambia a lo largo de

la pieza ya que la Resultante Izquierda es siempre la misma = R_A .

El diagrama de momentos es una recta con valor máximo en el apoyo = M_A y cero en el extremo libre.

Una vez deformada la ménsula, adoptará una forma de este tipo, con tangente horizontal en el apoyo y máxima flecha en el extremo libre.



Sólo con la observación de estos resultados, sabemos varias cosas que serán de utilidad para el análisis:

- La función Momento es una recta inclinada
- Tiene un valor máximo en el apoyo y cero en el extremo
- La elástica tiene en el apoyo tangente horizontal y flecha nula
- La flecha máxima está en el extremo libre.

Para plantear la ecuación de la función momento, basta con definir el valor del momento en un punto cualquiera de la pieza situado a una distancia x del apoyo, que se tomará como origen de coordenadas:

$$Mf_x = -M_A + R_A \cdot x = M_A + P \cdot x$$

Considerando los signos de los momentos (el sentido de giro relativo)

Como se conoce el valor de M_A se puede plantear la fórmula general

$$Mf_x = P \cdot x - P \cdot \ell$$

que resulta ser la ecuación de una recta.

Por lo tanto, integrando dos veces, se obtendría la ecuación de la elástica, con la salvedad hecha oportunamente que se trata de una curva de muy poca curvatura con pendiente infinitesimal.

Recordando que

$$z''(x) = \frac{Mf}{E \cdot I_x}$$

se sustituye el valor genérico del momento por el valor hallado en el caso concreto de la ménsula en estudio

$$z''(x) = \frac{P \cdot x - P \cdot \ell}{E \cdot I_x}$$

Integrando una vez, resulta la expresión de la derivada primera de la elástica, que dará el valor

del coeficiente angular de la tangente en cada punto, o sea su pendiente.

$$z'(x) = \frac{\frac{P \cdot x^2}{2} - P \cdot \ell \cdot x}{E \cdot I_x} + C_1$$

Dado que se trata de una integral indefinida, es necesario agregar una constante de integración, ya que existen infinitas funciones cuya derivada es la de partida que difieren en una constante.

Para el caso que se estudia, es posible determinar el valor de dicha constante porque se conocen algunas características de la función derivada. Concretamente, en el apoyo A existe un empotramiento, por lo que queda definido que allí no habrá giro y por lo tanto la derivada primera valdrá cero para x igual a cero (tangente paralela al eje de las abscisas).

En consecuencia, $C_1 = 0$.

Integrando una segunda vez, se obtendrá la función de la elástica

$$z(x) = \frac{\frac{P \cdot x^3}{2 \cdot 3} - \frac{P \cdot \ell \cdot x^2}{2}}{E \cdot I_x} + C_2$$

También en este caso se tendrá una constante de integración.

Su valor también puede determinarse por las condiciones concretas. Para $x=0$, se sabe que no hay flecha (descenso) por tratarse del empotramiento, por lo tanto el valor de la función también valdrá cero. En ese caso, también $C_2 = 0$

Con lo cual la ecuación de la elástica para esa ménsula resulta:

$$z(x) = \frac{\frac{P \cdot x^3}{6} - \frac{P \cdot \ell \cdot x^2}{2}}{E \cdot I_x}$$

Dado que en el ejemplo también se sabe que la flecha máxima se da en el extremo libre, para

$x = \ell$

resulta

$$z(\ell) = \frac{\frac{P \cdot \ell^3}{6} - \frac{P \cdot \ell \cdot \ell^2}{2}}{E \cdot I_x}$$

$$z(\ell) = \frac{\frac{P \cdot \ell^3}{6} - \frac{3 \cdot P \cdot \ell^3}{6}}{E \cdot I_x} = -\frac{2 \cdot P \cdot \ell^3}{6 \cdot E \cdot I_x}$$

$$z(\ell) = -\frac{P \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot I_x}$$

que indica el valor de la flecha máxima para el caso de una ménsula con una carga puntual en el extremo.

Para los demás casos, se utilizará una tabla donde figuran la ecuación de la elástica ("deforma-

da”), la ecuación derivada de la misma y los valores de las flechas máximas. Dado que la determinación de la flecha no exige, en general, una gran precisión, los casos que no están tabulados, se pueden deducir por superposición de situaciones o por aproximaciones que puedan admitirse como relevantes.

IV. Bibliografía

- | | |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stiopin, P.A. – | “Resistencia de Materiales” Editorial MIR – Moscú – 1968 |
| Féodosissiev. V. - | “Résistance des Matériaux” Éditions de la Paix – Moscou |
| Timoshenko, S. | “Resistencia de Materiales” Espasa-Calpé S.A.- Madrid – 1954 |
| Salvadori, Mario – | |
| Séller, Robert | “Estructuras para Arquitectos” Ediciones La Isla – Buenos Aires – 1966 |
| Torroja, E. | “Razón y Ser de los tipos estructurales” – Instituto Técnico de la Construcción y del cemento – Madrid – 1960 |
| Claudio A. Molanes | Estática - Ed. Answer Just in Time S.R.L. – Bs. As. |
| Heino Engel | Sistemas de estructuras – Ed. Gustavo Pili, SA – Barcelona - Madrid |

Montevideo, mayo de 2009