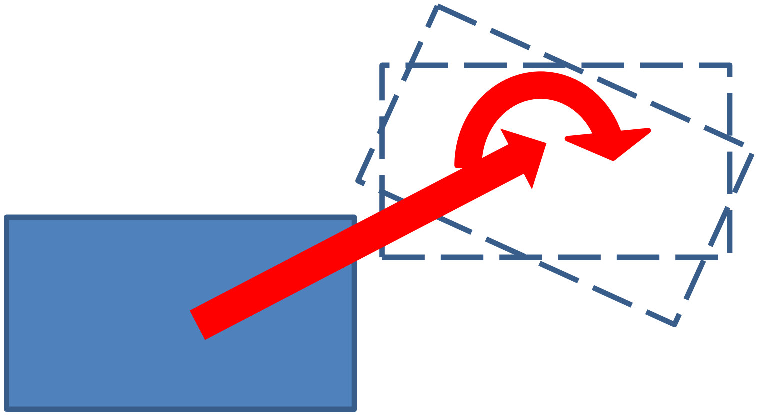
ESTRUCTURAS I

La **estructura** de una obra arquitectónica debe encontrarse en **equilibrio estático**:

- ✓ la estructura se mantiene **quieta** con respecto a un marco de referencia.
- ✓ la suma de fuerzas y momentos sobre cada partícula del sistema es cero.

Un cuerpo rígido plano, puede experimentar dos movimientos en el plano:



Estará en **equilibrio estático** si:

- ✓ $\Sigma Fx = 0$
- ✓ $\Sigma Fy = 0$
- ✓ $\Sigma M = 0$

La **estructura** de una obra arquitectónica debe encontrarse en **equilibrio estático**:

- ✓ $\Sigma Fx = 0$
- ✓ $\Sigma Fy = 0$
- ✓ $\Sigma M = 0$

❖ **Estructura hipostática**

No oponen resistencia a estímulos de movimientos externos

Nº ecuaciones de equilibrio > Nº incógnitas

❖ **Estructura isostática**

Puede ser analizada mediante los **principios de la Estática**

Nº ecuaciones de equilibrio = Nº incógnitas

Las reacciones en los apoyos se calculan aplicando: Cond. de equilibrio: $\Sigma Fx = 0$, $\Sigma Fy = 0$, $\Sigma M = 0$

❖ **Estructura hiperestática**

Tiene **vínculos sobreabundantes**, es decir, más de los estrictamente necesarios para la estabilidad del sistema.

"Grado de Hiperestaticidad": el número o cantidad de vínculos que se deben eliminar para que el sistema hiperestático se convierta en isostático

Nº ecuaciones de equilibrio < Nº incógnitas

Las reacciones en los apoyos se calculan aplicando:

- Cond. de equilibrio: $\Sigma Fx = 0$, $\Sigma Fy = 0$, $\Sigma M = 0$
- Cond. de Deformación: ~~**Ppio. de Rigidez Relativa de los Cuerpos**~~

¿Qué quiere decir que abandonamos el Ppio. de Rigidez Relativa de los Cuerpos?

REPASO DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

LA ESTÁTICA

Es el área de la Física, que estudia el equilibrio de los cuerpos sólidos.

HIPÓTESIS:

Estudia la acción de un sistema de fuerzas actuando **sobre un cuerpo ideal, indeformable, con rigidez y resistencia infinitas**, es decir que considera...

....que la geometría de los cuerpos permanece invariable antes y después de la aplicación de las acciones

....y que es capaz de soportar cargas de cualquier magnitud.

La **única condición impuesta a acciones y reacciones**, es el cumplimiento de las 3 ecuaciones de **equilibrio estático**:

$$\Sigma F_V = 0$$
$$\Sigma F_H = 0$$
$$\Sigma M = 0$$

SI RECORDAMOS…

Rigidez Relativa de los Cuerpos: está basado en que la mayoría de los casos la forma de los sólidos sometidos a las acciones exteriores, varía de un modo insubstancial.

Al formar las ecuaciones de equilibrio, esto permite considerar al sólido como indeformable y dotado de las mismas dimensiones geométricas que tenía antes de la aplicación de las cargas

SE ABANDONA

❖ **Estructura hiperestática**

Las reacciones en los apoyos se calculan aplicando:

Cond. de equilibrio:

Σ Fx = 0

Σ Fy = 0

Σ M = 0

Cond. de Deformación

∞ **ecuaciones**

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

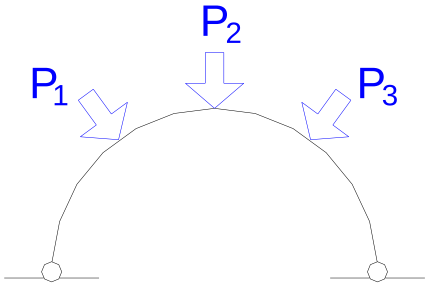
A. Método de las Fuerzas
B. Método de Cross
C. Métodos Matriciales

A. **Método de las Fuerzas**
B. Método de Cross
C. Métodos Matriciales

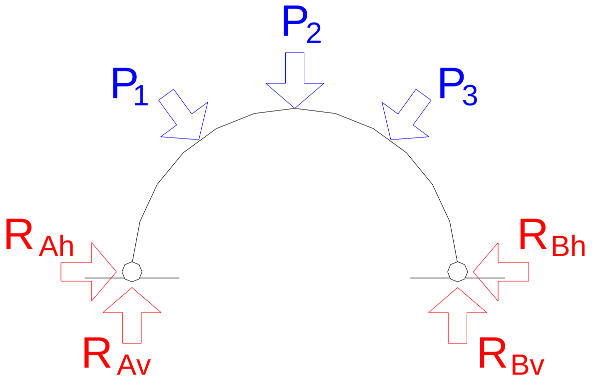
A. **Método de las Fuerzas**
B. Método de Cross
C. Métodos Matriciales

Consiste en eliminar vínculos superabundantes hasta que la estructura quede isostática, y luego, mediante el Principio de Superposición, restituir las acciones que los vínculos eliminados ejercían, y hallar qué valores deben tomar para que se restablezcan las condiciones originales.

A. Método de las Fuerzas

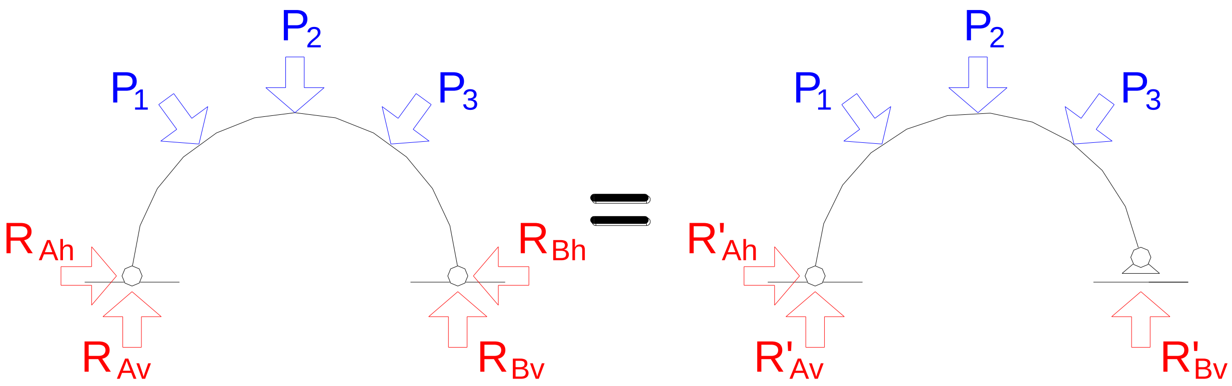


A. Método de las Fuerzas



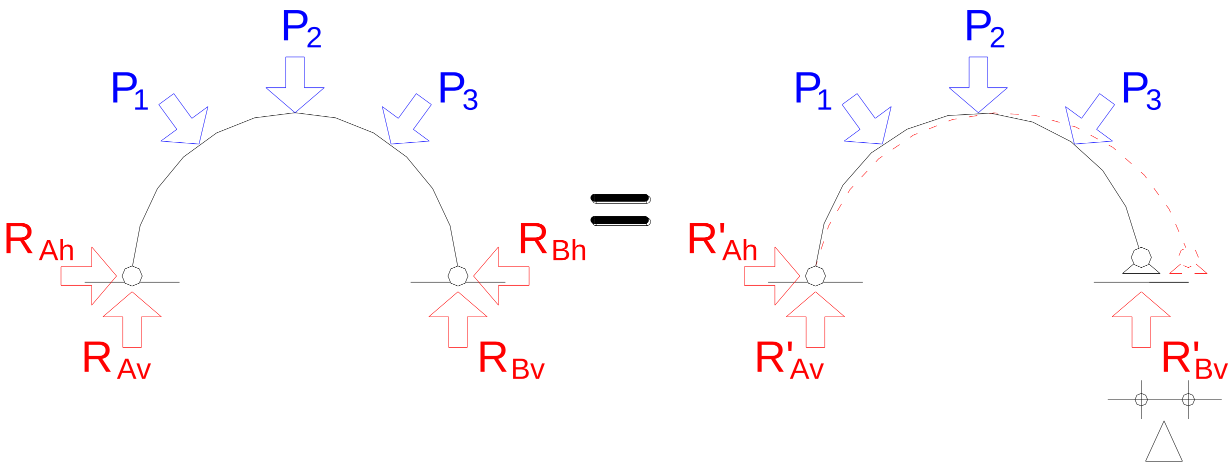
A. Método de las Fuerzas

Principio de Superposición



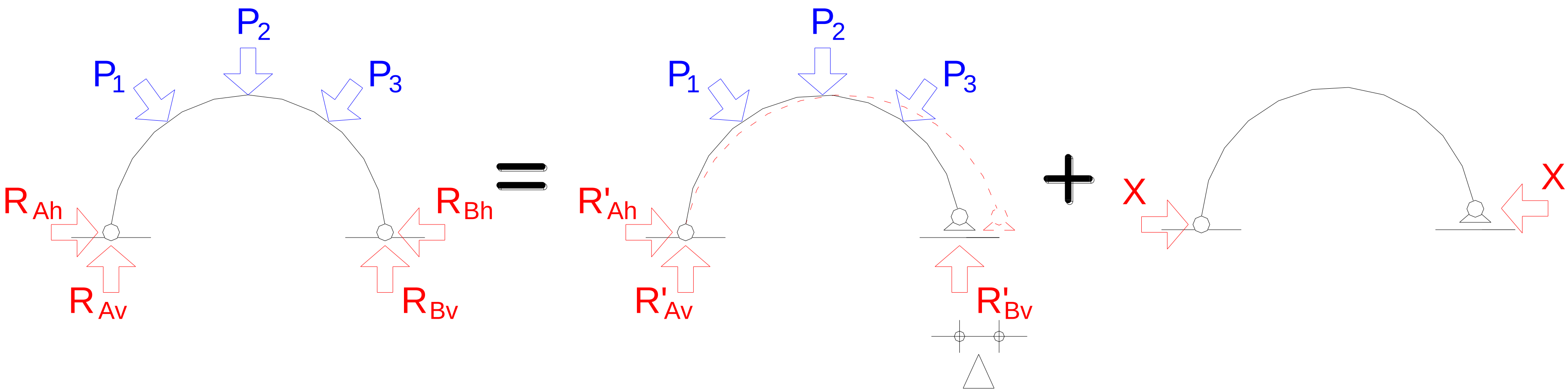
A. Método de las Fuerzas

Principio de Superposición



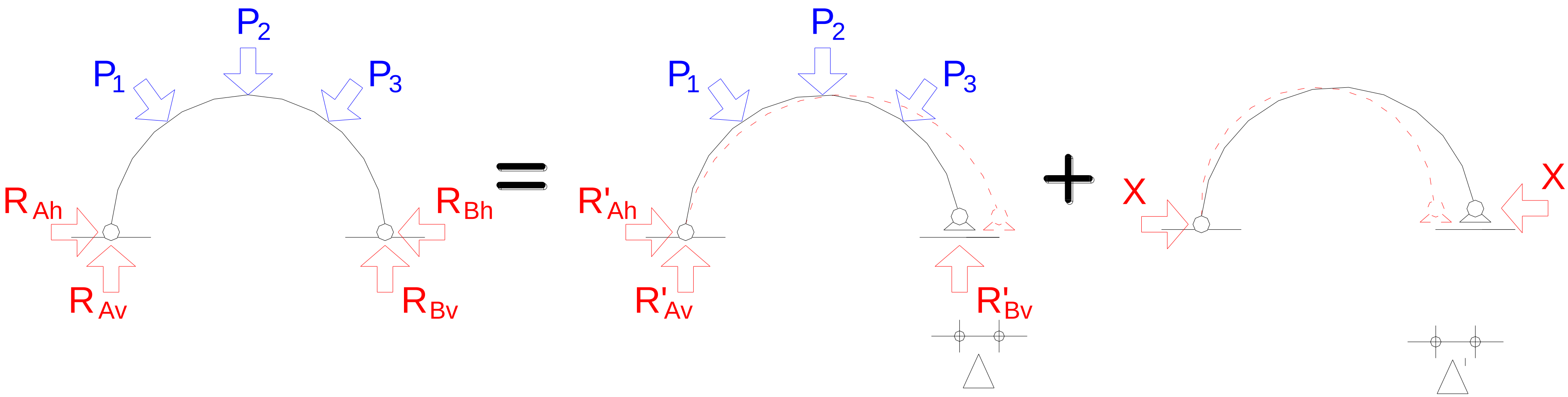
A. Método de las Fuerzas

Principio de Superposición



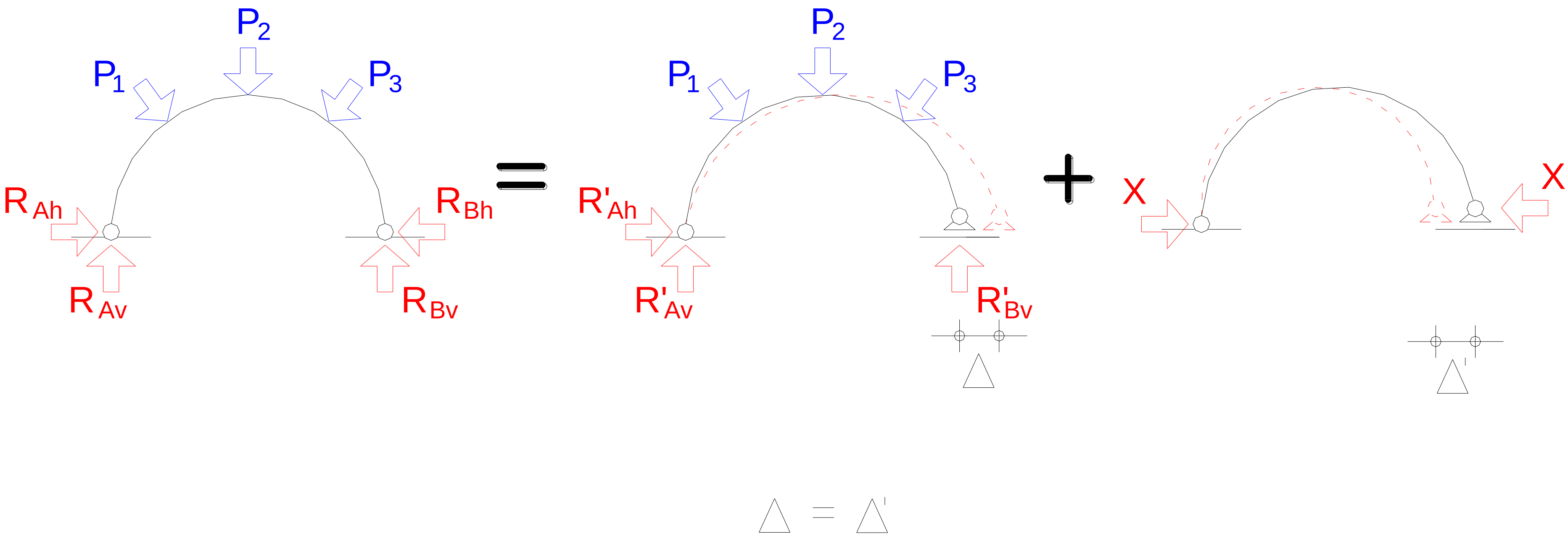
A. Método de las Fuerzas

Principio de Superposición



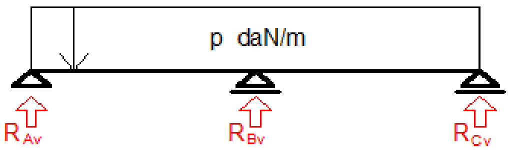
A. Método de las Fuerzas

Principio de Superposición



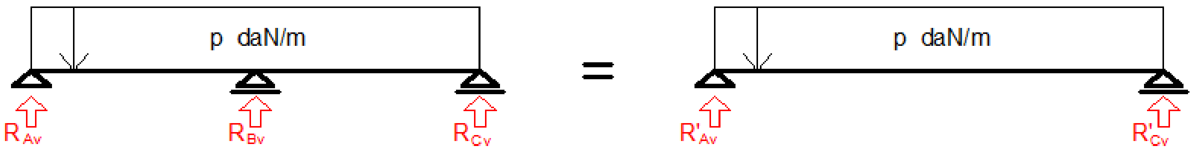
A. Método de las Fuerzas

A. Método de las Fuerzas



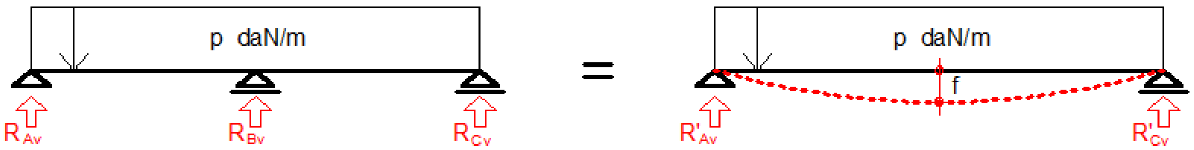
A. Método de las Fuerzas

Principio de Superposición



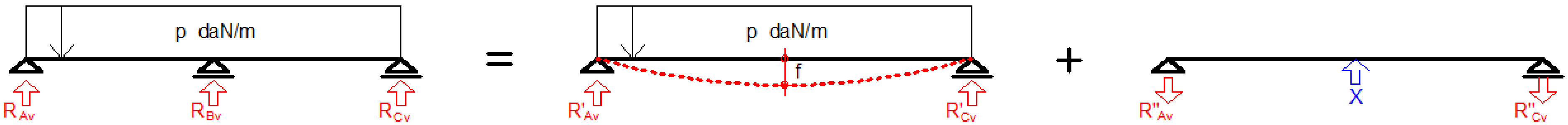
A. Método de las Fuerzas

Principio de Superposición



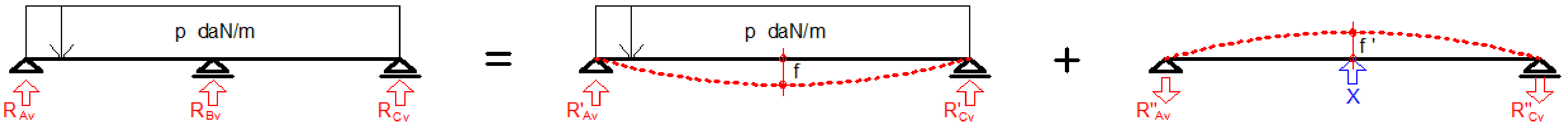
A. Método de las Fuerzas

Principio de Superposición



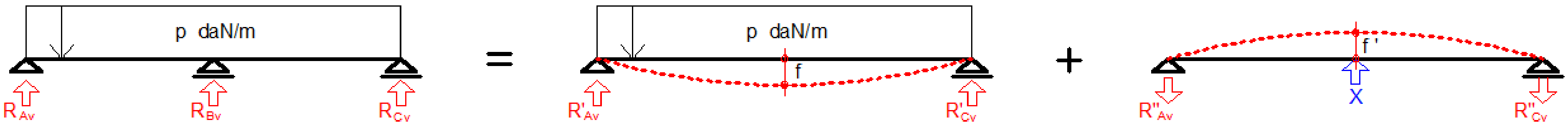
A. Método de las Fuerzas

Principio de Superposición



A. Método de las Fuerzas

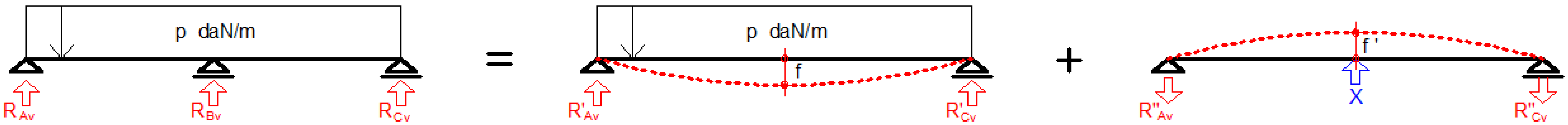
Principio de Superposición



$$f = f'$$

A. Método de las Fuerzas

Principio de Superposición



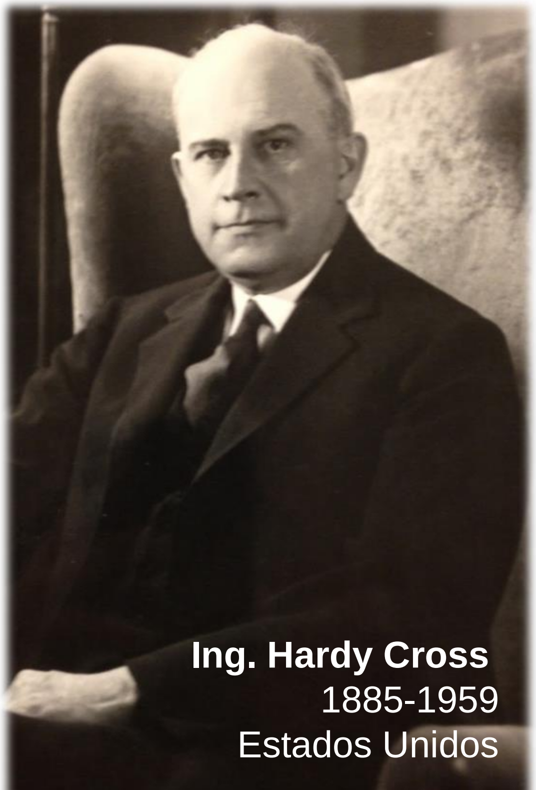
$$f = f'$$

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{p \cdot L^4}{E \cdot I}$$

$$f' = \frac{1}{48} \cdot \frac{X \cdot L^3}{E \cdot I}$$

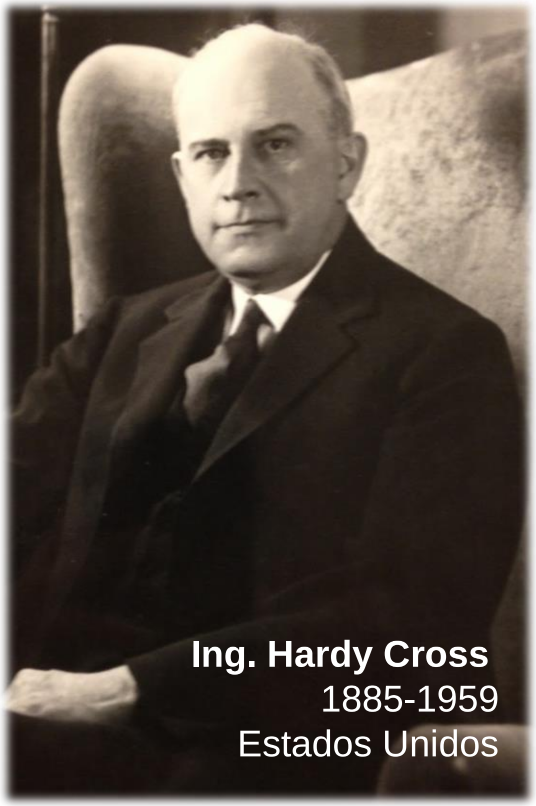
INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

A. Método de las Fuerzas
B. **Método de Cross (Método de Distribución de Momentos)**
C. Métodos Matriciales

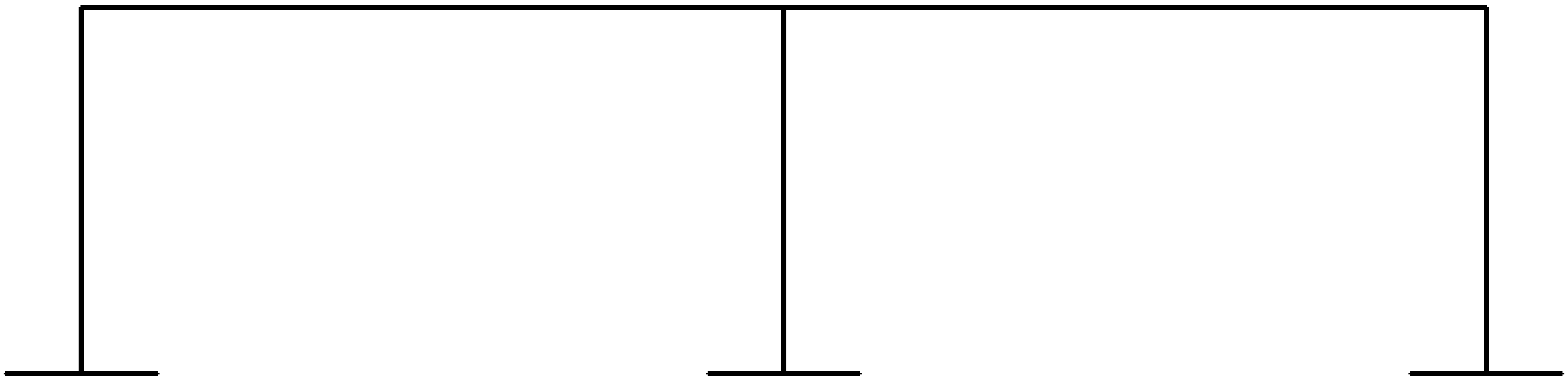


A. Método de las Fuerzas
B. **Método de Cross (Método de Distribución de Momentos)**
C. Métodos Matriciales

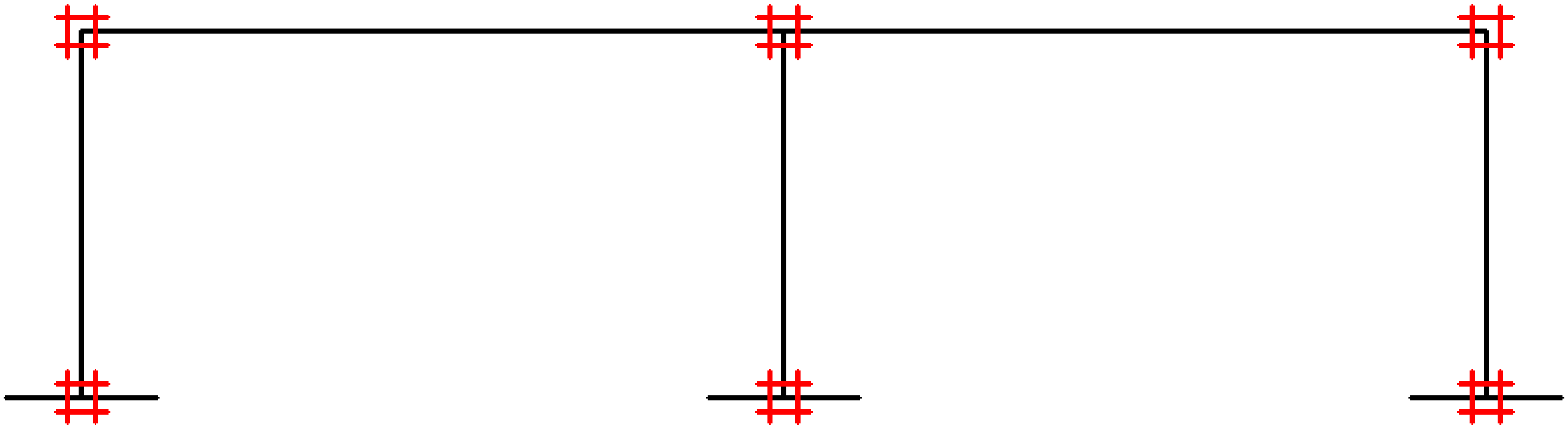
En un sentido opuesto al caso anterior, en lugar de quitarle vínculos, le agrega más, colocando los nudos en condición de giro nulo.
Lleva la estructura a una situación ficticia, pero conocida.
Luego se quitan de a uno los vínculos agregados hasta restablecer las condiciones originales de la estructura.



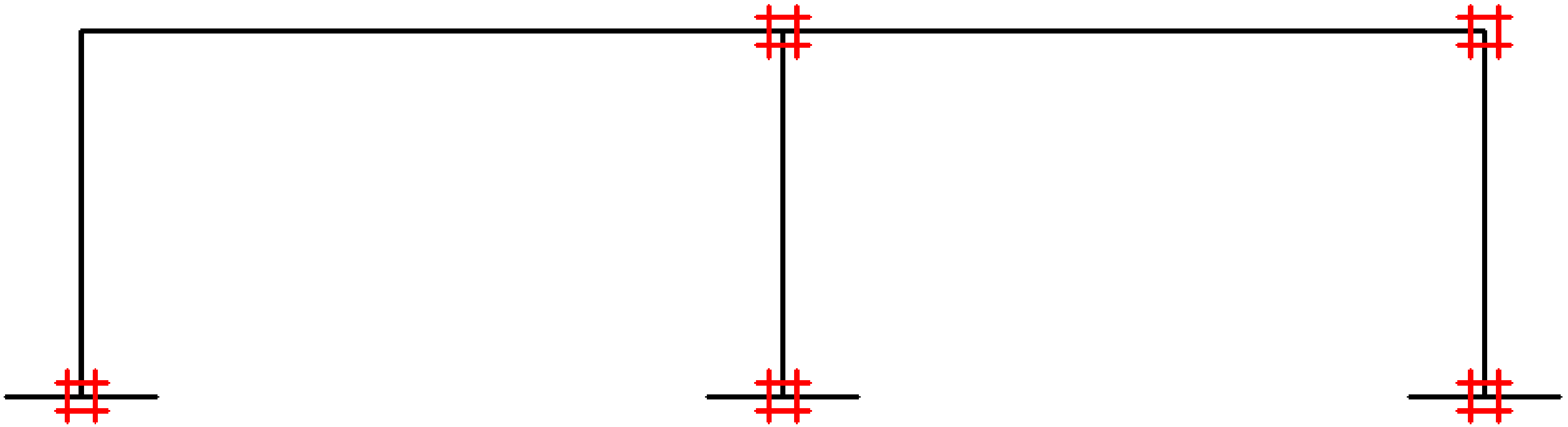
B. Método de CROSS



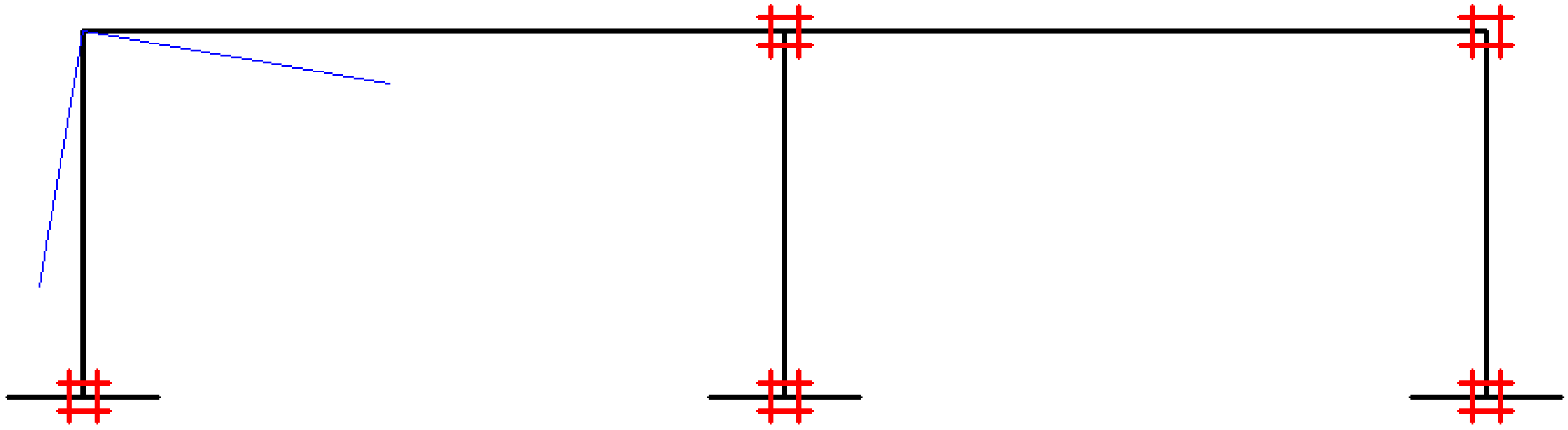
B. Método de CROSS



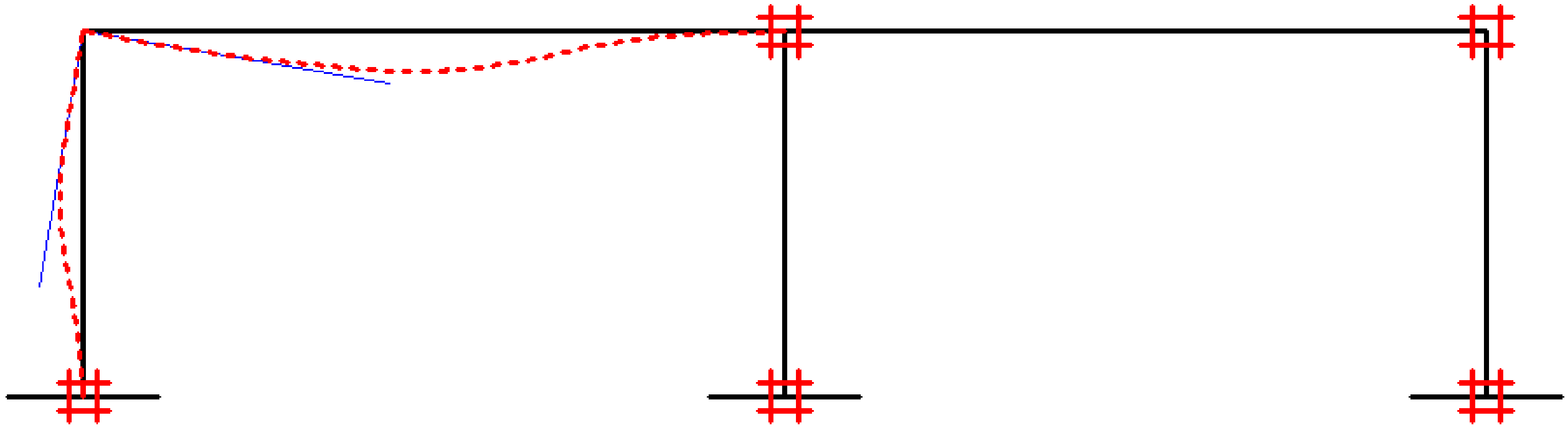
B. Método de CROSS



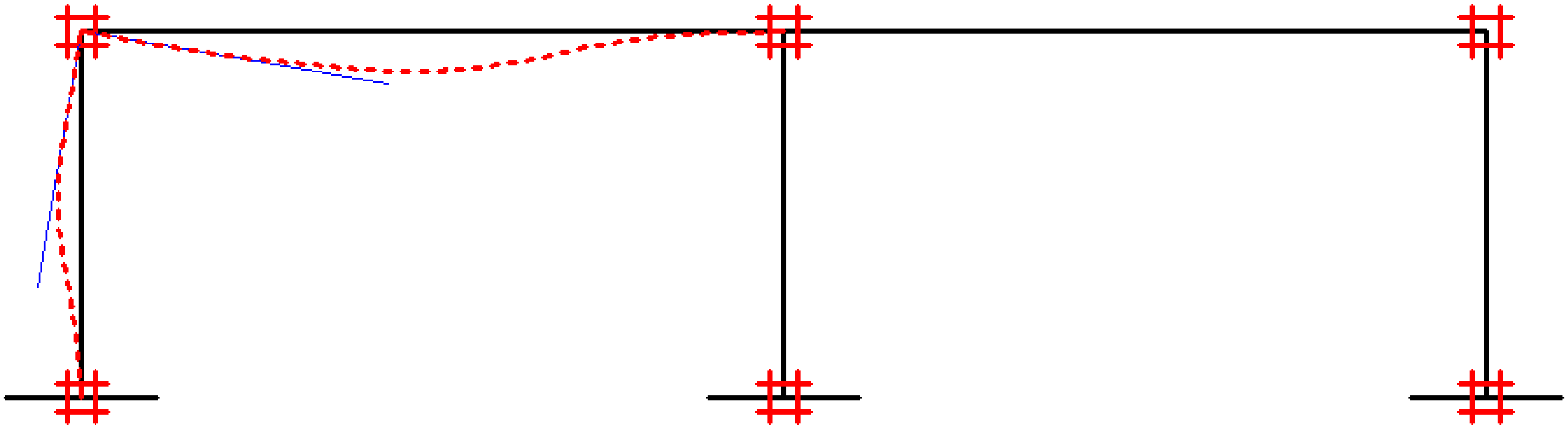
B. Método de CROSS



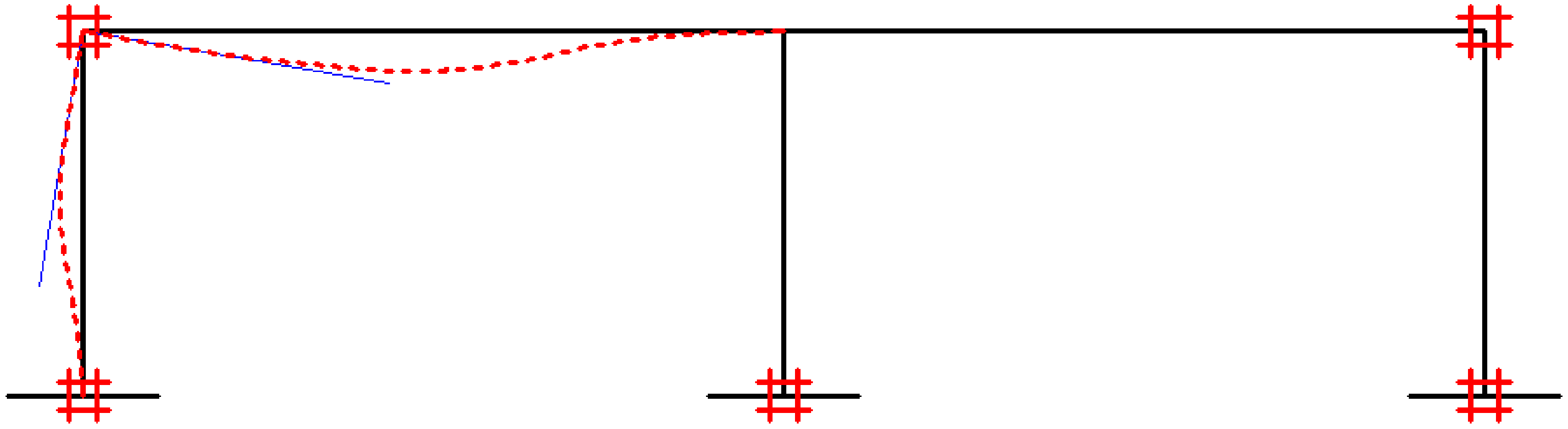
B. Método de CROSS



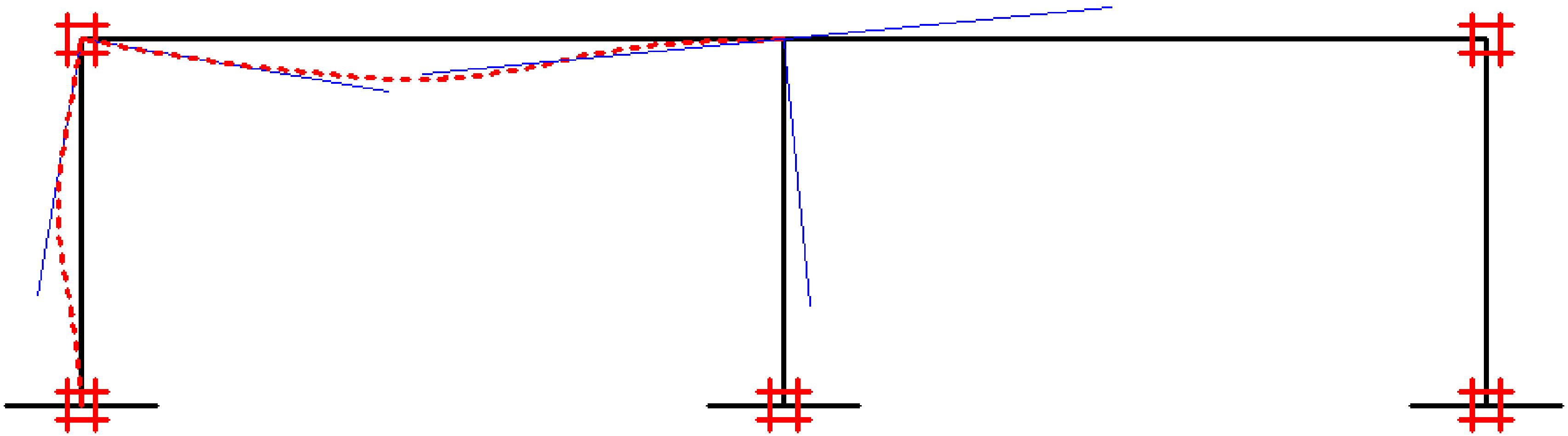
B. Método de CROSS



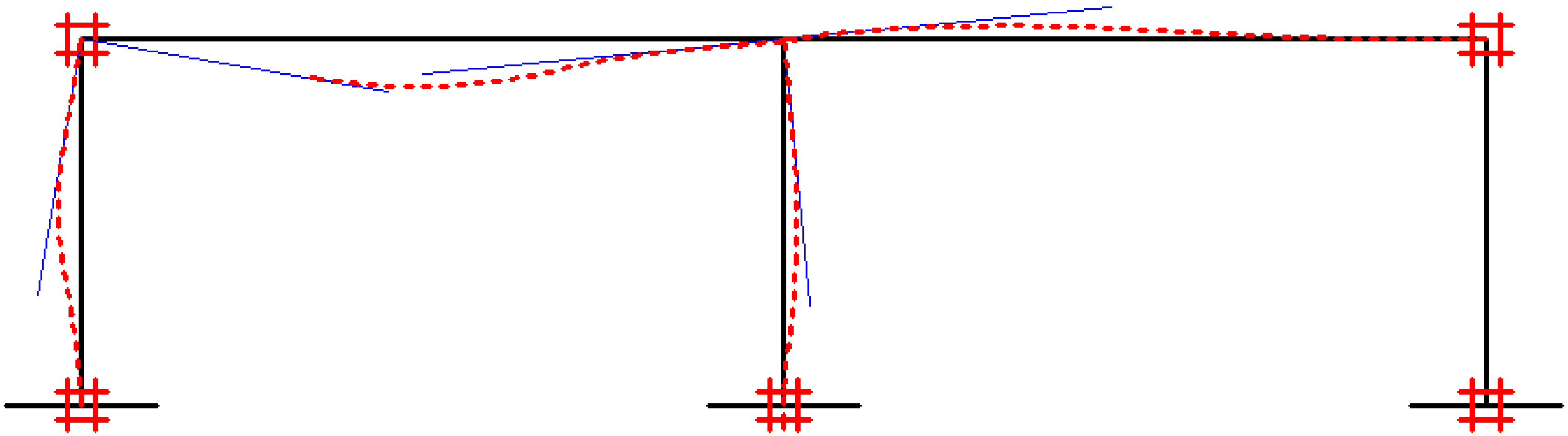
B. Método de CROSS



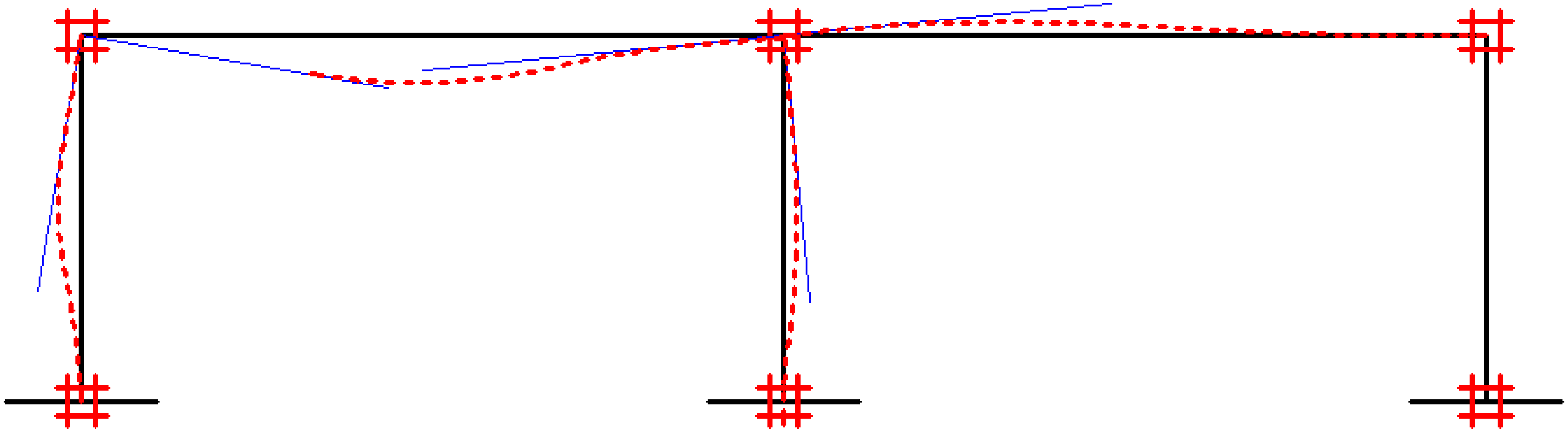
B. Método de CROSS



B. Método de CROSS



B. Método de CROSS



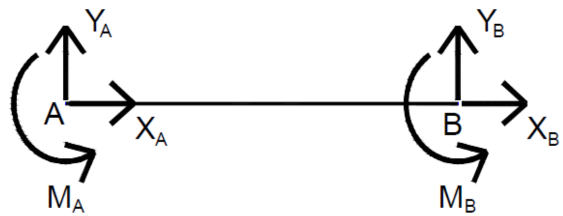
A. Método de las fuerzas
B. Método de Cross
C. **Métodos Matriciales**

A. Método de las fuerzas
B. Método de Cross
C. **Métodos Matriciales**

Consisten en utilizar el álgebra matricial, que permite un planteo muy compacto de las ecuaciones, lo que simplifica el algoritmo para generar un programa informático práctico y versátil.

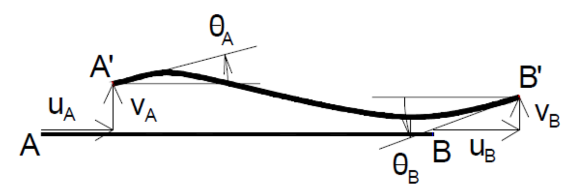
C. Métodos Matriciales

ACCIONES en los extremos de una barra



DEFORMACIONES en los extremos de una barra

Representación vectorial



Representación física

Representación en forma matricial:

DEFORMACIONES

ACCIONES

	u_A	v_A	θ_A	u_B	v_B	θ_B
X_A	$\frac{E.A}{L} u_A$			$-\frac{E.A}{L} u_B$		
Y_A		$\frac{12EI}{L^3} v_A$	$\frac{6EI}{L^2} \theta_A$		$-\frac{12EI}{L^3} v_B$	$\frac{6EI}{L^2} \theta_B$
M_A		$\frac{6EI}{L^2} v_A$	$\frac{4EI}{L} \theta_A$		$-\frac{6EI}{L^2} v_B$	$\frac{2EI}{L} \theta_B$
X_B	$-\frac{E.A}{L} u_A$			$\frac{E.A}{L} u_B$		
Y_B		$-\frac{12EI}{L^3} v_A$	$-\frac{6EI}{L^2} \theta_A$		$\frac{12EI}{L^3} v_B$	$-\frac{6EI}{L^2} \theta_B$
M_B		$\frac{6EI}{L^2} v_A$	$\frac{2EI}{L} \theta_A$		$-\frac{6EI}{L^2} v_B$	$\frac{4EI}{L} \theta_B$

MÉTODO DE CROSS

Ventajas:

- ✓ Método manual
- ✓ Permite estudiar estructuras de alto grado de hiperestaticidad mediante operaciones sencillas que pueden realizarse con una calculadora común.
- ✓ Permite visualizar cómo es el proceso de resolución de una estructura hiperestática (mecanismo de distribución de los momentos en la estructura)

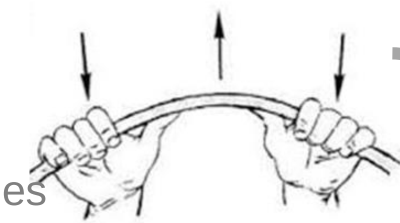
Actualmente: uso de **Métodos Matriciales** c/programas en computadora <u>brindan el resultado final sin ver el proceso</u>

Simplificaciones:

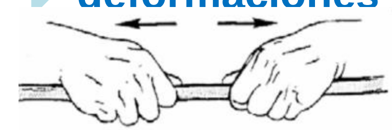
- ✓ Para simplificar la parte operativa, Cross se centra solamente en el estudio de los giros en los nudos de la estructura

Existen deformaciones producidas por:

- Momento (giros)
- Cortante
- Axil



producen >> deformaciones



- ✓ Si la estructura lo requiere, en una segunda etapa se estudian los desplazamientos de los nudos, y los giros que en ellos se producen.

OBJETIVO del Método

El objetivo del método de Cross es conocer el valor de los momentos en los extremos de las barras.

Luego de conocidos éstos, las reacciones y las solicitaciones pueden ser determinadas mediante los procedimientos ya conocidos, utilizando las ecuaciones de equilibrio.

MÉTODO DE CROSS

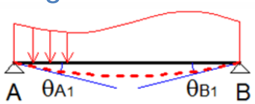
Se comienza estudiando una sola barra aislada para determinar expresiones matemáticas auxiliares que nos permitan **conocer los ángulos de giro en los apoyos** de tramos flexionados.

[PASO 1]

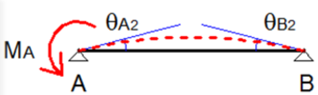
Ángulos de giro en los extremos de una barra aislada

θ (theta)

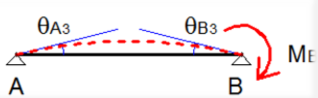
a) Carga transversal



b) Momento aplicado en extremo izq.



c) Momento aplicado en extremo der.

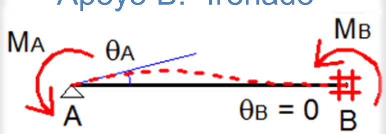


[PASO 2]

Coeficiente de transmisión

β (beta)

a) Apoyo A: M_A aplicado
Apoyo B: "frenado"



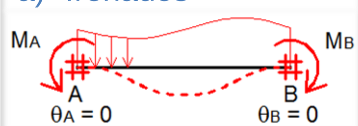
[PASO 3]

Momentos de fijación
ó
Momentos frenos
ó
Momentos de empotramiento perfecto

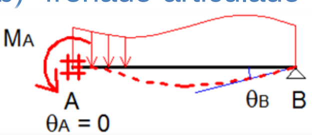
M.E.P.

c/carga transversal
≠ cond. vínculos

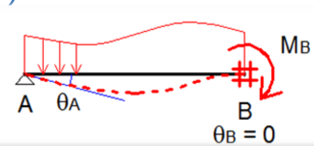
a) frenados



b) frenado-articulado



c) articulado-frenado

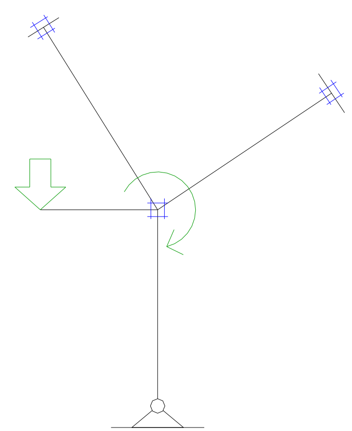


[PASO 4]

Coeficientes de Repartición

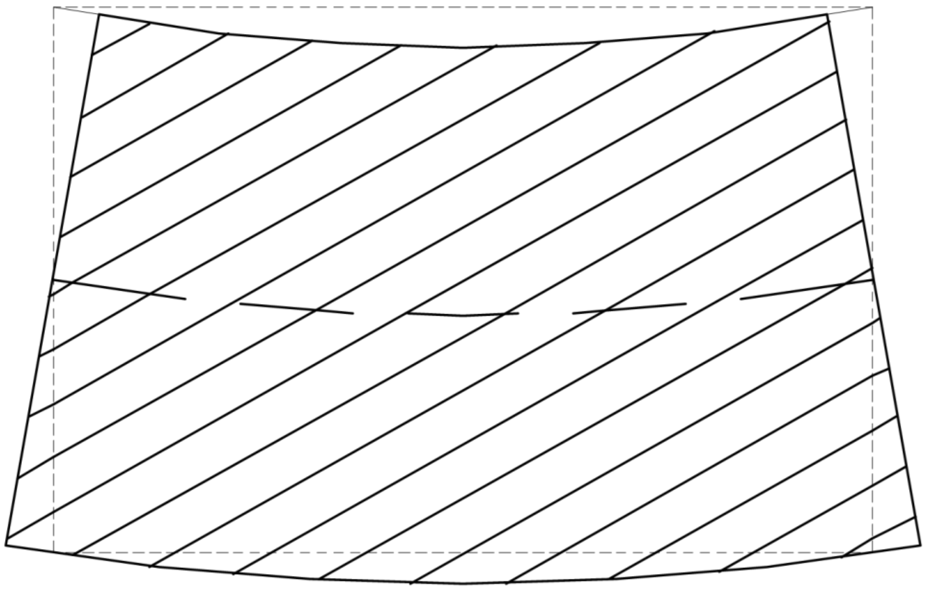
r_i

Se juntan varias barras en un nudo y ….
¿qué pasa cuando se suelta un nudo en una estructura que está frenada?



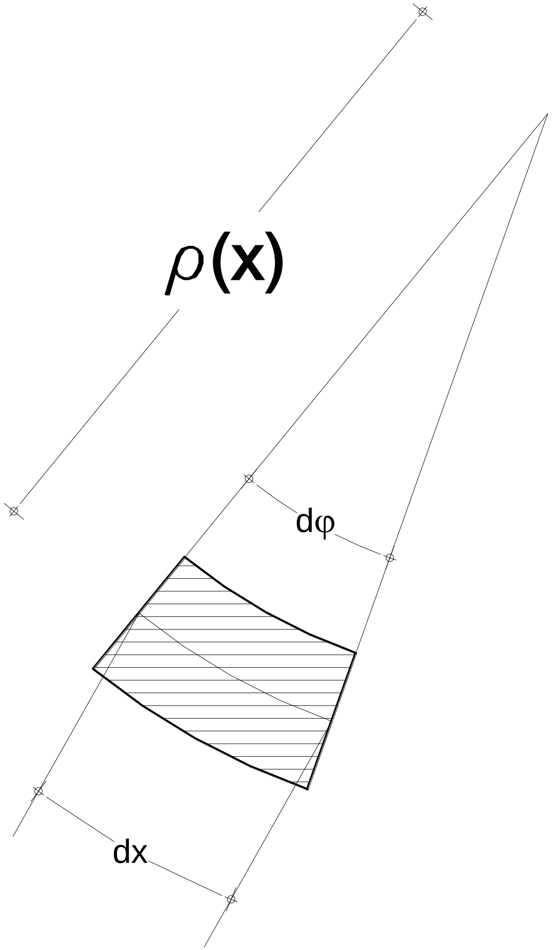
[PASO 5]

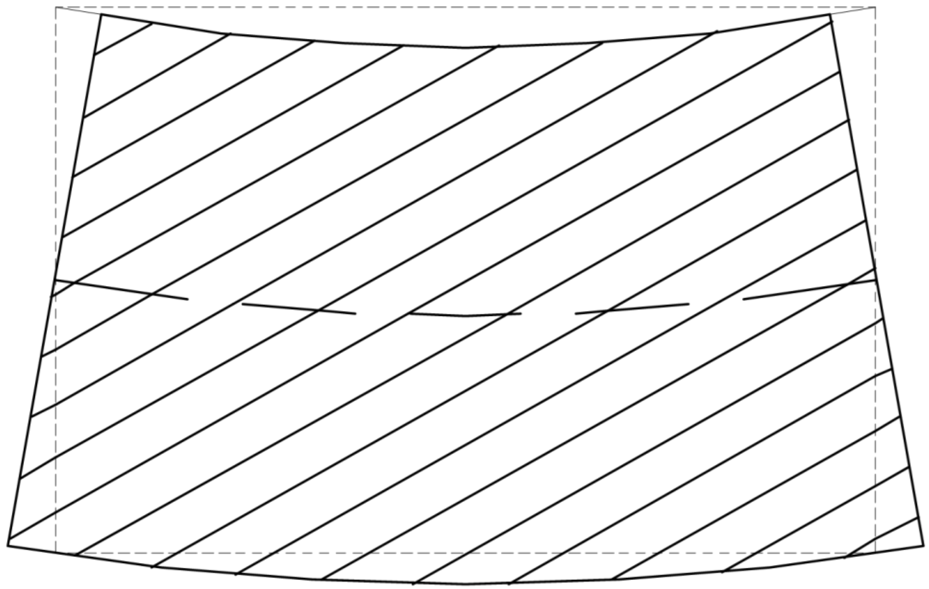
Artificio del Método de Cross
(ejemplo de aplicación)



DEFORMACIÓN DE LA DOVELA CENTRAL

MÉTODO DE CROSS





$$\frac{1}{\rho_x} = K$$

$$\boxed{\mathbf{Mf / (E.I) = } \boldsymbol{K}}$$

DEFORMACIÓN DE LA DOVELA CENTRAL

$$-p = V`(x)$$

$$V(x) = M`(x)$$

$$\boxed{M``(x) = V`(x) = -p}$$

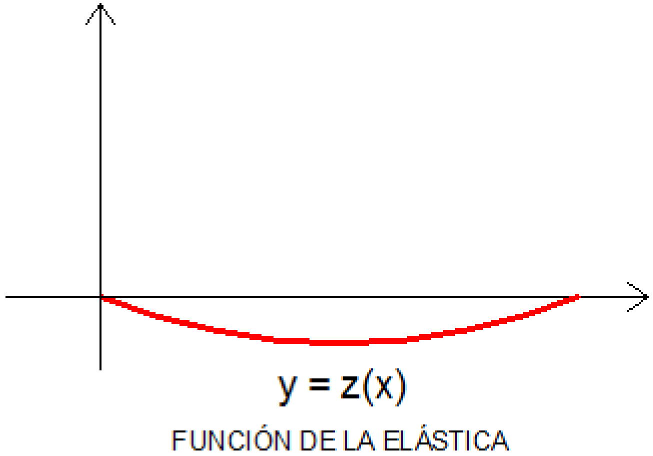
Relación entre p, V y M.

Ecuación fundamental
de las vigas rectas.

MÉTODO DE CROSS

Por definición:

$$K = \frac{z''(x)}{(1 - z'(x))^{3/2}} \Rightarrow \text{TIENDE A } 1$$

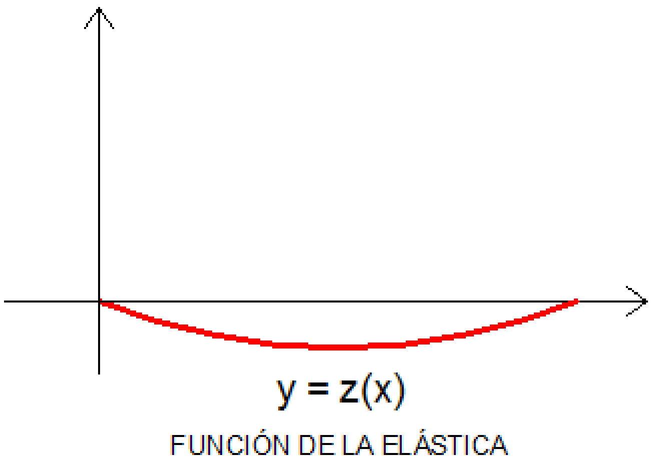


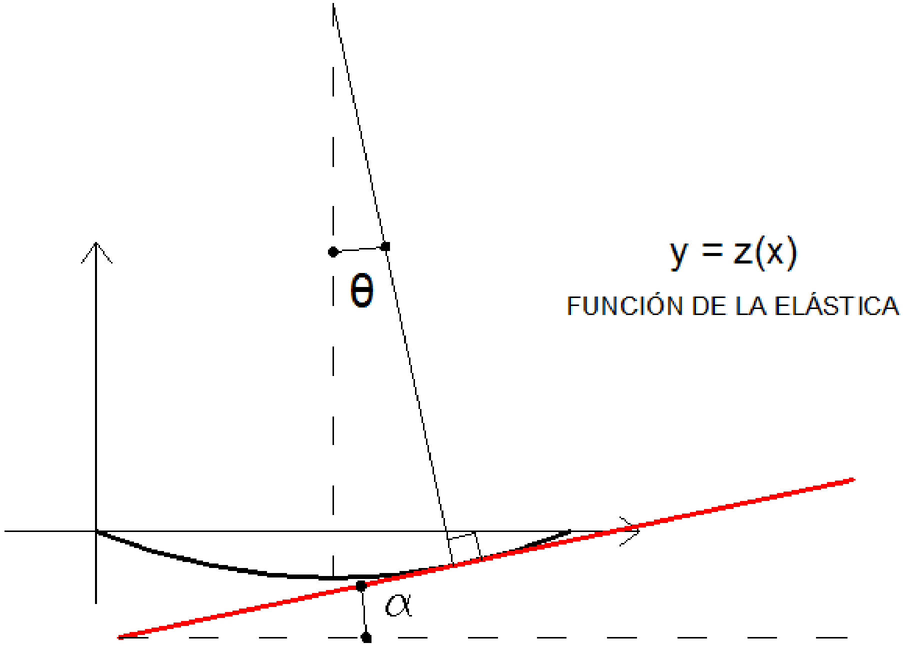
Dado que la magnitud de las deformaciones son muy pequeñas, se admite:

$$K \approx z''(x)$$

O sea que la función de la curvatura equivale a la derivada segunda de la función de la elástica.

MÉTODO DE CROSS





La derivada de z es el ángulo que forma la tangente a la curva con respecto al eje de las abscisas (α).

Según la hipótesis de Bernouilli, las secciones planas y normales al eje del tramo, se mantienen planas y normales a la elástica, luego de la deformación.

Por lo tanto, la perpendicular a la tangente es el giro de la sección, que abre con la vertical el mismo ángulo que la tangente con la horizontal.

O sea: $z'(x) = \theta(x)$

ANALOGÍA DE MÖHR

$z''(x) = K = Mf/E.I$

$Z' = \theta(x)$

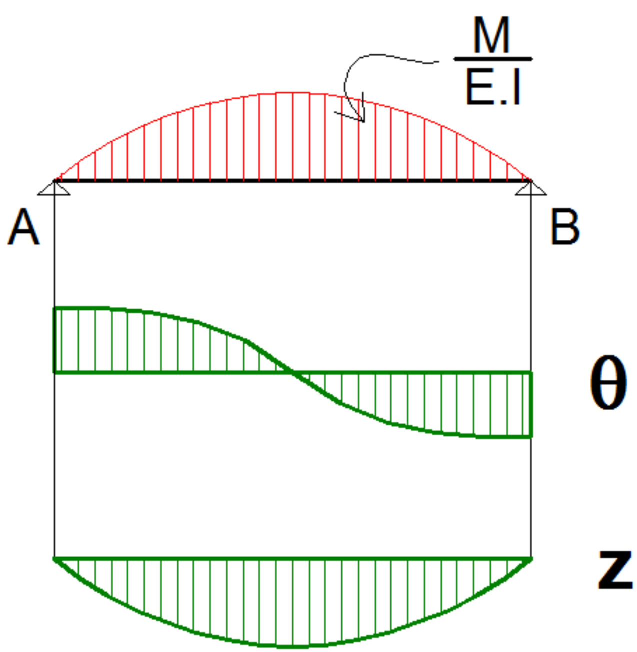
$-p = V`(x)$

$V(x) = M`(x)$

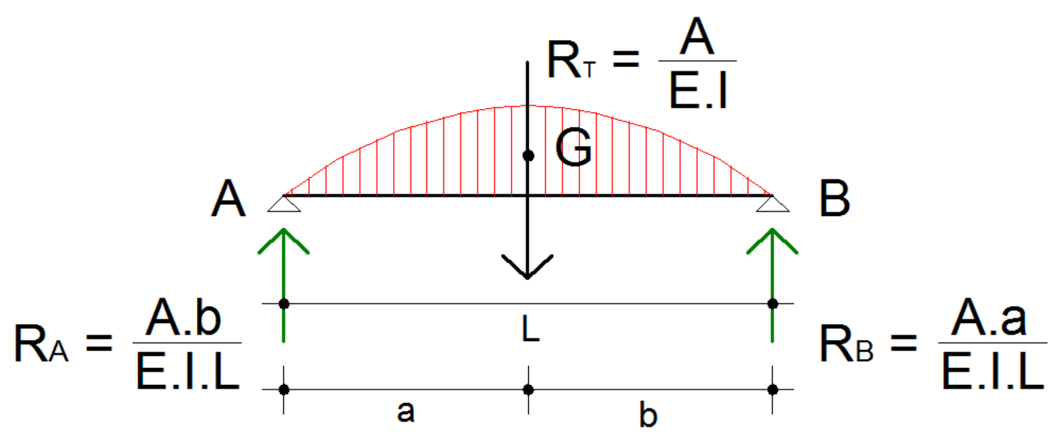
$$\boxed{z``(x) = \theta`(x) = K = Mf/E.I}$$

$$\boxed{M``(x) = V`(x) = -p}$$

Relación entre K, θ y z



Relación entre p, V y M.



PASOS para aplicar el artificio del Método

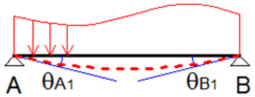
MÉTODO DE CROSS

[PASO 1]

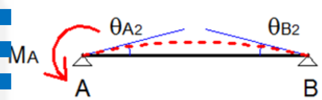
Ángulos de giro en los extremos de una barra aislada

θ (theta)

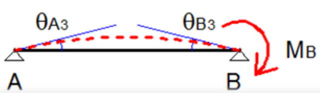
a) Carga transversal



b) Momento aplicado en extremo izq.



c) Momento aplicado en extremo der.



[PASO 2]

Coeficiente de transmisión

β (beta)

[PASO 3]

Momentos de fijación
ó
Momentos frenos
ó
Momentos de empotramiento perfecto

M.E.P.

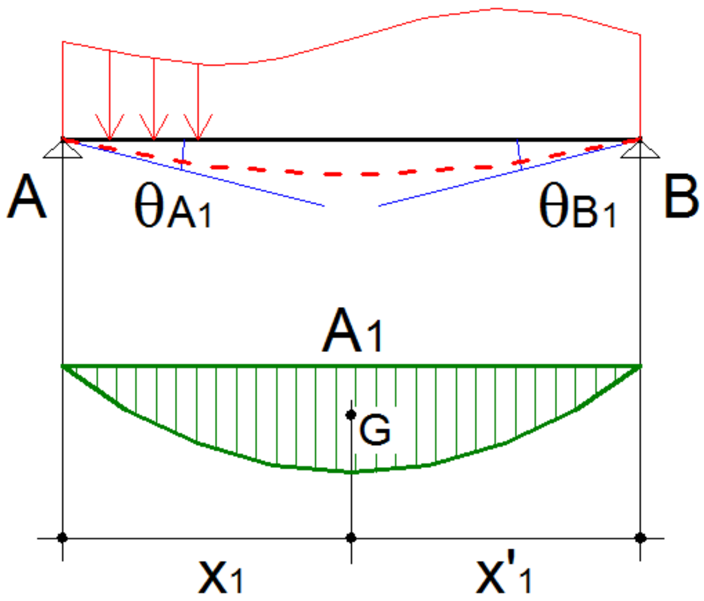
[PASO 4]

Coeficientes de Repartición

r_i

[PASO 5]

Artificio del Método de Cross
(ejemplo de aplicación)



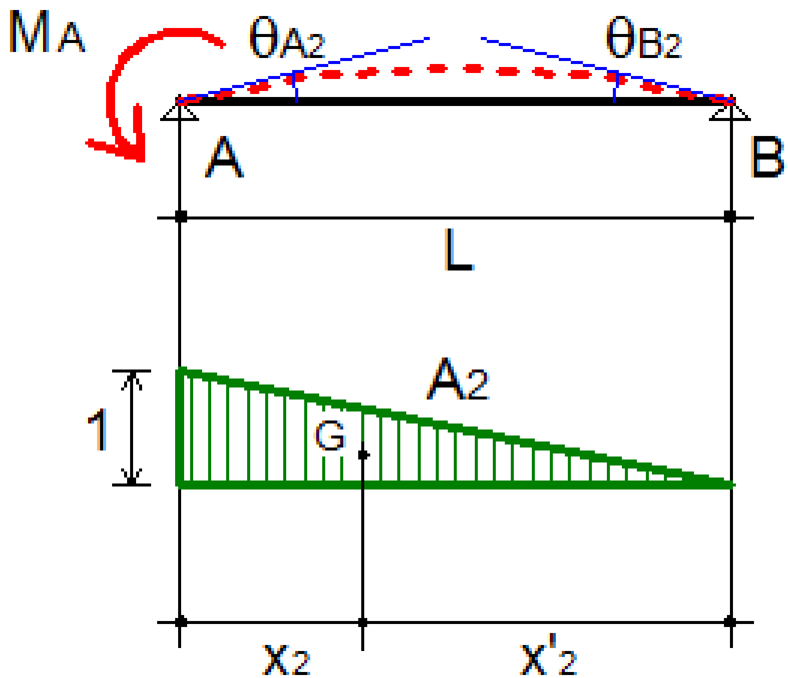
$$\theta_{A1} = \frac{A_1 \cdot x'_1}{E \cdot I \cdot L} \qquad \theta_{B1} = \frac{A_1 \cdot x_1}{E \cdot I \cdot L}$$

RIGIDEZ: κ (kappa)

$$\kappa_{\text{(kappa)}} = \frac{E \cdot I}{L}$$

$$\theta_{A1} = \frac{A_1 \cdot x'_1}{\kappa \cdot L^2} \qquad \theta_{B1} = \frac{A_1 \cdot x_1}{\kappa \cdot L^2}$$

MÉTODO DE CROSS



$$\boxed{\theta_{B2} = \frac{M_A \, . \, A_2 \, . \, x_2}{\kappa \, . \, L^2}}$$

$$\theta_{A2} = \frac{M_A \; A_2 \, . \, x'_2}{\kappa \, . \, L^2}$$

$$\gamma_A = \frac{L^2}{A_2 \, . \, x'_2}$$

(gamma)

$$\boxed{\theta_{A2} = \frac{M_A}{\gamma_A \, . \, \kappa}}$$

$$\alpha_A = \frac{\gamma_A}{4}$$

Para inercia constante:

$$\gamma_A = \frac{L^2}{1 \, . \, \frac{L}{2} \, . \, \frac{2\,L}{3}}$$

$$\boxed{\gamma_A = 3}$$

$$\boxed{\alpha_A = 0{,}75}$$

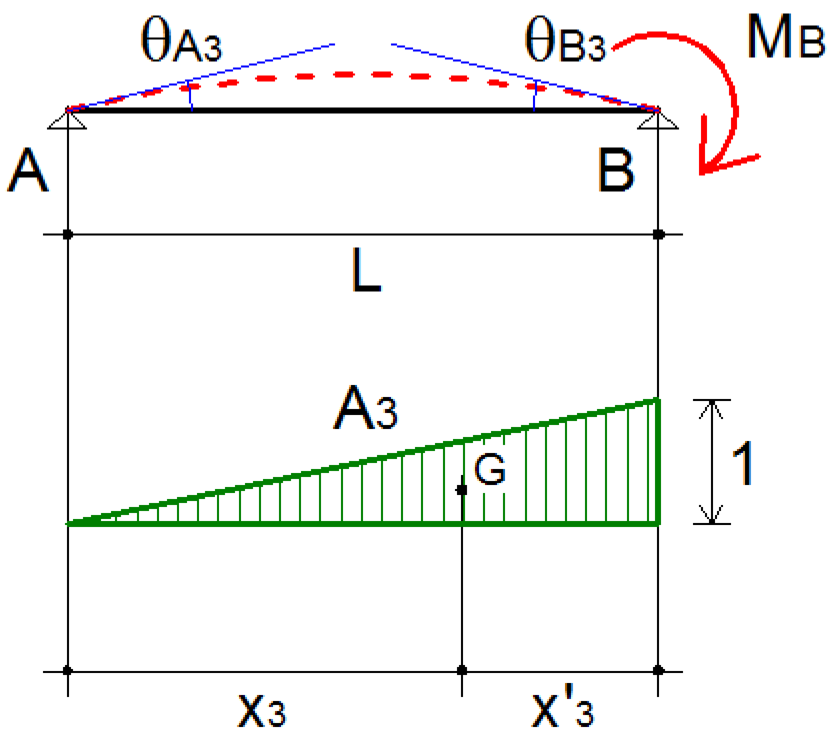
RIGIDEZ FLEXIONAL:

$\gamma\kappa$ ó $\alpha\kappa$

(gamma kappa) (alpha kappa)

PASO [1]: ángulos de giro θ (theta) en extremos

MÉTODO DE CROSS



$$\theta_{B3} = \frac{M_B \, . \, A_3 \, . \, x_3}{\kappa \, . \, L^2} = \frac{M_B}{\gamma_B \, . \, \kappa}$$

$$\gamma_B = \frac{L^2}{A_3 \, . \, x'_3}$$
(gamma)

$$\theta_{A3} = \frac{M_B \, . \, A_3 \, . \, x'_3}{\kappa \, . \, L^2}$$

PASOS para aplicar el artificio del Método

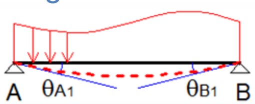
MÉTODO DE CROSS

[PASO 1]

Ángulos de giro en los extremos de una barra aislada

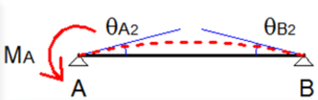
θ (theta)

a) Carga transversal



Rigidez: κ (kappa)

b) Momento aplicado en extremo izq.



Para inercia cte.:

$\alpha = 0{,}75$

Rigidez flexional:

$\gamma\kappa$ ó $\alpha\kappa$

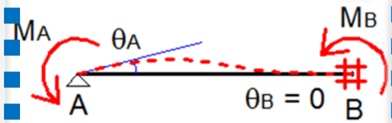
(gamma kappa) (alpha kappa)

[PASO 2]

Coeficiente de transmisión

β (beta)

a) Apoyo A: M_A aplicado
Apoyo B: "frenado"



[PASO 3]

Momentos de fijación

ó

Momentos frenos

ó

Momentos de empotramiento perfecto

M.E.P.

[PASO 4]

Coeficientes de Repartición

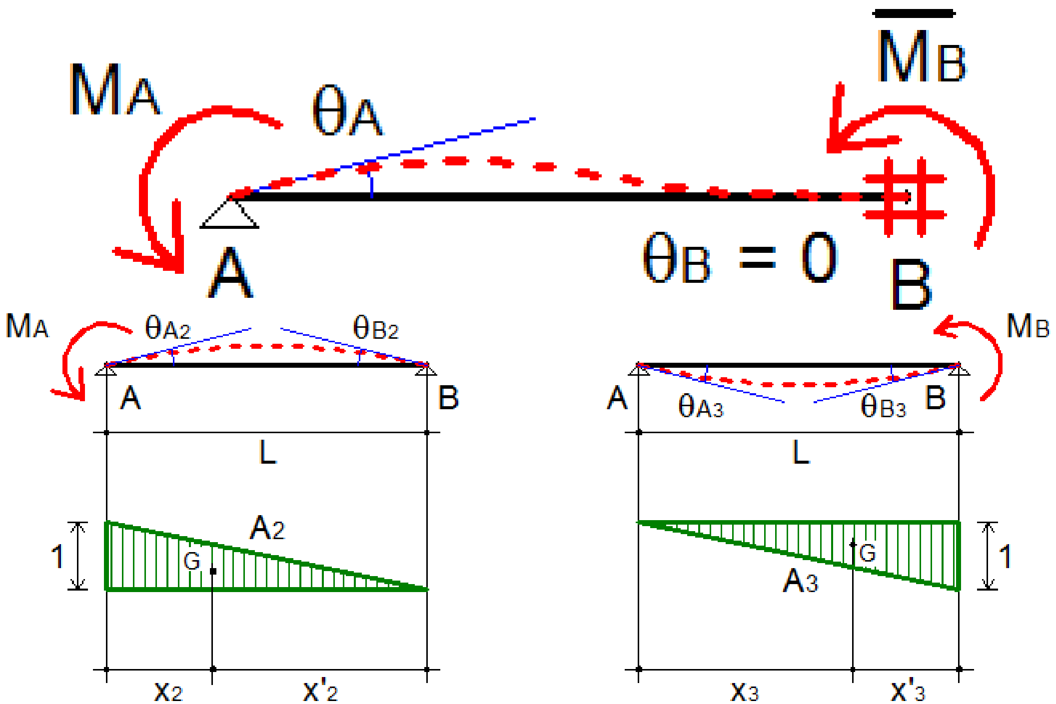
r_i

[PASO 5]

Artificio del Método de Cross

(ejemplo de aplicación)

PASO [2]: coeficiente de transmisión β (beta)



$$\theta_{A2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x_2^{'}}{\kappa \cdot L^2} \qquad \theta_{A3} = \frac{\bar{M}_B \cdot A_3 \cdot x_3^{'}}{\kappa \cdot L^2}$$

$$\theta_{B2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x_2}{\kappa \cdot L^2} \qquad \theta_{B3} = \frac{\bar{M}_B \cdot A_3 \cdot x_3}{\kappa \cdot L^2}$$

$$M_A \cdot A_2 \cdot x_2 = \bar{M}_B \cdot A_3 \cdot x_3$$

$$\boxed{\bar{M}_B = \frac{A_2 \cdot x_2}{A_3 \cdot x_3} \cdot M_A = \beta_{AB} \cdot M_A}$$

$$\boxed{\beta_{AB} = \frac{A_2 \cdot x_2}{A_3 \cdot x_3}}$$

Para inercia constante: $\beta_{AB} = \dfrac{A_2 \cdot \frac{L}{3}}{A_3 \cdot \frac{2}{3} L} = \dfrac{1}{2}$

$$\theta_A = \theta_{A2} - \theta_{A3}$$

$$\theta_A = \frac{M_A}{\kappa}\left(\frac{A_2 \cdot x_2^{'}}{L^2} - \beta_{AB}\frac{A_3 \cdot x_3^{'}}{L^2}\right)$$

$$\boxed{\theta_A = \frac{M_A}{\kappa}\left[A_2\left(x_2^{'} - x_2\frac{x_3^{'}}{x_3}\right)\right]\frac{1}{L^2} = \frac{M_A}{\kappa \cdot \gamma_A}}$$

$$\boxed{\gamma_A = \frac{L^2}{A_2\left(x_2^{'} - x_2\dfrac{x_3^{'}}{x_3}\right)}}$$

Para inercia constante: $\boxed{\gamma_A = 4}$ $\boxed{\alpha_A = 1}$

PASOS para aplicar el artificio del Método

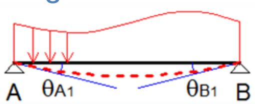
MÉTODO DE CROSS

[PASO 1]

Ángulos de giro en los extremos de una barra aislada

θ (theta)

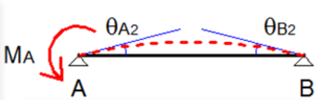
a) Carga transversal



Rigidez: κ

(kappa)

b) Momento aplicado en extremo izq.



Para inercia cte.:

$$\alpha = 0{,}75$$

Rigidez flexional:

$\gamma\kappa$ ó $\alpha\kappa$

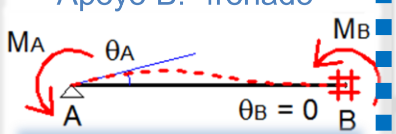
(gamma kappa) (alpha kappa)

[PASO 2]

Coeficiente de transmisión

β (beta)

a) Apoyo A: M_A aplicado
Apoyo B: "frenado"



Para inercia cte.:

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 0{,}5$$

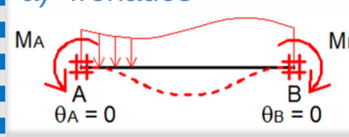
[PASO 3]

Momentos de fijación
ó
Momentos frenos
ó
Momentos de empotramiento perfecto

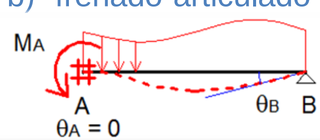
M.E.P.

c/carga transversal
≠ cond. vínculos

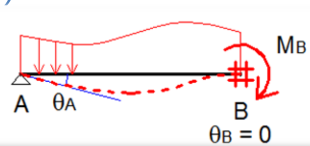
a) frenados



b) frenado-articulado



c) articulado-frenado



[PASO 4]

Coeficientes de Repartición

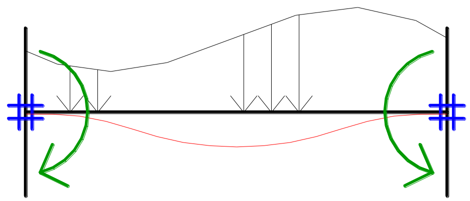
r_i

[PASO 5]

Artificio del Método de Cross
(ejemplo de aplicación)

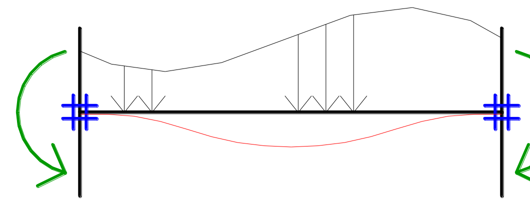
PASO [3]: M.E.P.

MÉTODO DE CROSS



MOMENTOS NODALES

efecto de la barra sobre el nudo

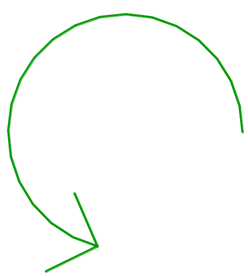


MOMENTOS DE FIJACIÓN

MOMENTOS FRENO

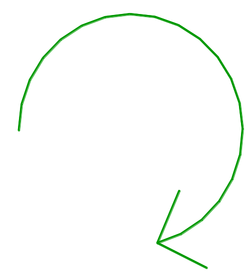
MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO (M.E.P.)

efecto del nudo sobre la barra



signo -

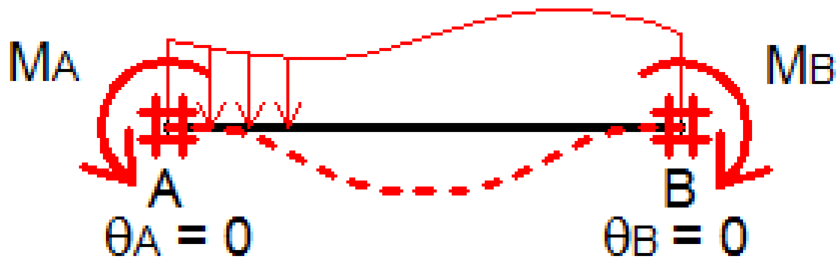
< 0



signo +

> 0

MÉTODO DE CROSS

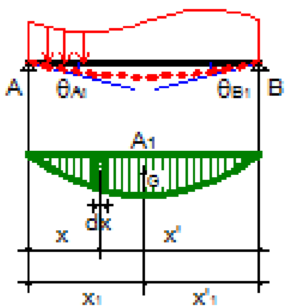


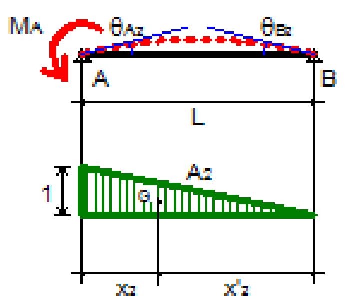
$$\theta_{A_1} - \theta_{A_2} - \theta_{A_3} = 0$$

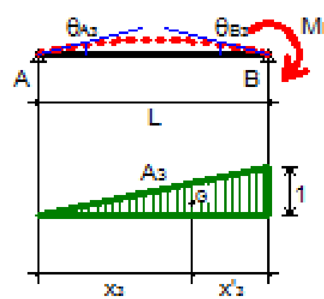
$$\theta_{B_1} - \theta_{B_2} - \theta_{B_3} = 0$$

$$A_1 \cdot x'_1 - M_A \cdot A_2 \cdot x'_2 - M_B \cdot A_3 \cdot x'_3 = 0$$

$$A_1 \cdot x_1 - M_A \cdot A_2 \cdot x_2 - M_B \cdot A_3 \cdot x_3 = 0$$







$$\boxed{M_A = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{x'_1 \cdot x_3 - x_1 \cdot x'_3}{x_3 \cdot x'_2 - x'_3 \cdot x_2}}$$

$$\boxed{M_B = \frac{A_1}{A_3} \cdot \frac{x'_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x'_2}{x'_3\, x_2 - x_3\, x'_2}}$$

$$\theta_{A_1} = \frac{A_1 \cdot x'_1}{EI \cdot L^2} \qquad \theta_{A_2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x'_2}{EI \cdot L^2} \qquad \theta_{A_3} = \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x'_3}{EI \cdot L^2}$$

$$\theta_{B_1} = \frac{A_1 \cdot x_1}{EI \cdot L^2} \qquad \theta_{B_2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x_2}{EI \cdot L^2} \qquad \theta_{B_3} = \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x_3}{EI \cdot L^2}$$

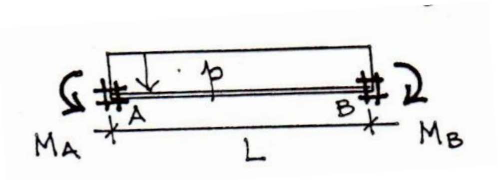
$$\boxed{M_A = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{x'_1 . x_3 - x_1 . x'_3}{x_3 . x'_2 - x'_3 . x_2}}$$

$$\boxed{M_B = \frac{A_1}{A_3} \cdot \frac{x'_1 . x_2 - x_1 . x'_2}{x'_3 \, x_2 - x_3 \, x'_2}}$$

Para $I =$ Cte. y carga uniformemente repartida:

$M_o = \frac{p . L^2}{8}$ entonces: $M_A = \frac{\frac{2}{3} M_o . L}{\frac{L}{2}} \cdot \frac{\frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} L - \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{3}}{\frac{2}{3} L \, \frac{2}{3} L - \frac{L}{3} \cdot \frac{L}{3}}$

$$M_A = \frac{2}{3} M_o = \frac{2}{3} \frac{p . L^2}{8}$$

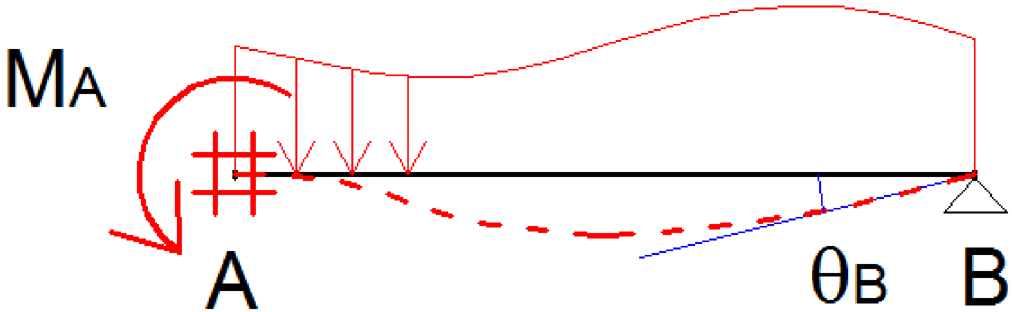


$$\boxed{M_A = \frac{p . L^2}{12}}$$

$$\boxed{M_B = \frac{p . L^2}{12}}$$

PASO [3]: M.E.P.

MÉTODO DE CROSS

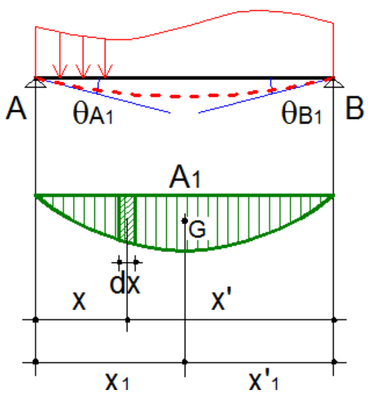


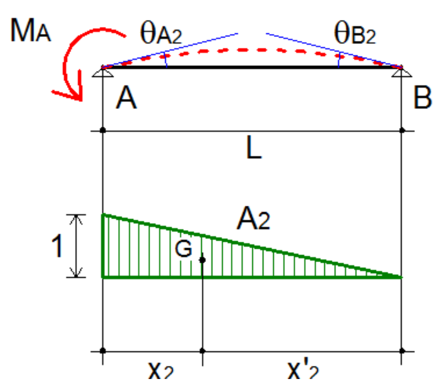
$$\theta_A = 0$$

$$\theta_{A_1} - \theta_{A_2} = 0$$

$$A_1 \cdot x'_1 - M_A \cdot A_2 \cdot x'_2 = 0$$

$$\boxed{M_A = \frac{A_1 \cdot x'_1}{A_2 \cdot x'_2}}$$





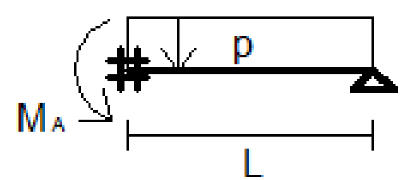
Para Inercia constante y carga uniformemente repartida

$$M_A = \frac{\frac{2}{3} M_0 \cdot L \cdot \frac{L}{2}}{\frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot L} = M_0$$

$$\theta_{A_1} = \frac{A_1 \cdot x'_1}{EI \cdot L^2} \qquad \theta_{A_2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x'_2}{EI \cdot L^2}$$

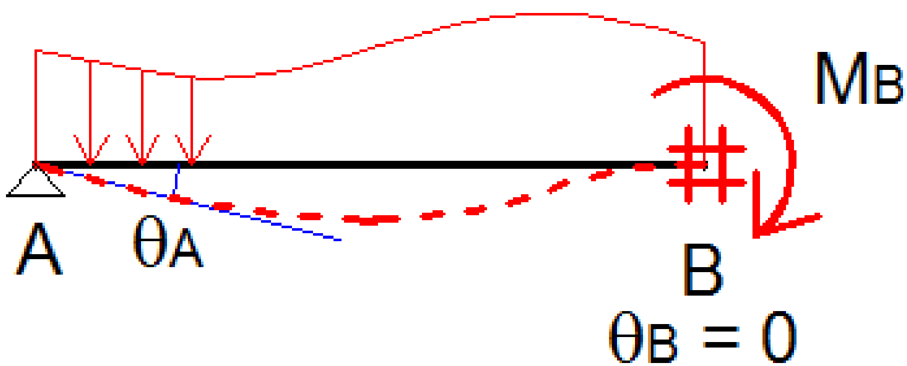
$$\theta_{B_1} = \frac{A_1 \cdot x_1}{EI \cdot L^2} \qquad \theta_{B_2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x_2}{EI \cdot L^2}$$

$$\boxed{M_A = \frac{p \cdot L^2}{8}}$$



PASO [3]: M.E.P.

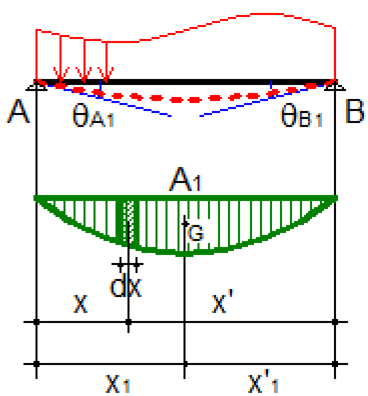
MÉTODO DE CROSS

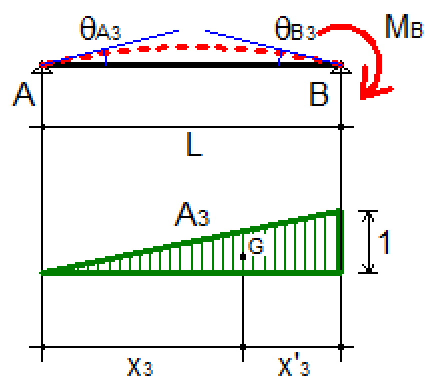


$$\theta_{B_1} - \theta_{B_3} = 0$$

$$A_1 \cdot x_1 - M_B \cdot A_3 \cdot x_3 = 0$$

$$\boxed{M_B = \frac{A_1 \cdot x_1}{A_3 \cdot x_3}}$$

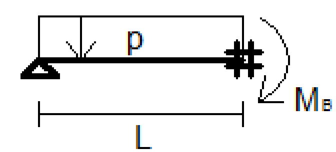




Para Inercia constante y carga uniformemente repartida

$$M_B = \frac{\frac{2}{3} M_0 \cdot L \cdot \frac{L}{2}}{\frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot L} = M_0$$

$$\boxed{M_B = \frac{p \cdot L^2}{8}}$$



$$\theta_{A_1} = \frac{A_1 \cdot x'_1}{EI \cdot L^2} \qquad \theta_{A_3} = \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x'_3}{EI \cdot L^2}$$

$$\theta_{B_1} = \frac{A_1 \cdot x_1}{EI \cdot L^2} \qquad \theta_{B_3} = \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x_3}{EI \cdot L^2}$$

PASO [3]: M.E.P.

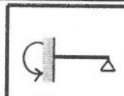
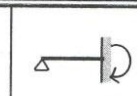
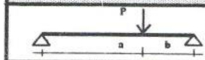
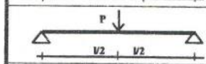
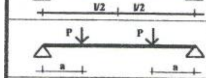
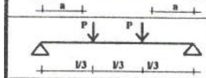
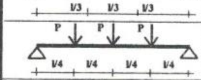
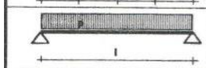
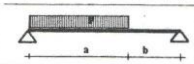
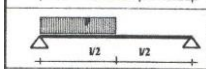
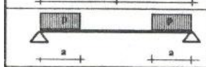
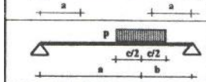
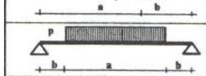
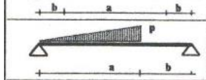
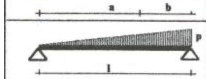
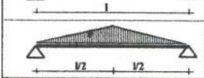
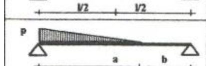
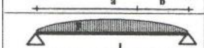
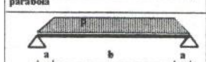
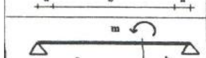
MÉTODO DE CROSS

Expresiones para hallar las reacciones de apoyo

Expresiones para la determinación de los M.E.P.

Tabla 5.1.1 - pág 53

REACCIONES Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PARA TRAMOS DE INERCIA CONSTANTE

						
			Ma	Mb	Ma	Mb
CARGAS	Ra	Rb	Ma	Mb	Ma	Mb
	$\frac{Pb}{l}$	$\frac{Pa}{l}$	$\frac{Pab}{2l^2}(l+b)$	$\frac{Pab}{2l^2}(l+a)$	$\frac{Pab}{l^2}b$	$\frac{Pab}{l^2}a$
	$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{3}{16}Pl$	$\frac{3}{16}Pl$	$\frac{1}{8}Pl$	$\frac{1}{8}Pl$
	P	P	$\frac{3}{2}Pa(1-\frac{a}{l})$	$\frac{3}{2}Pa(1-\frac{a}{l})$	$Pa(1-\frac{a}{l})$	$Pa(1-\frac{a}{l})$
	P	P	$\frac{1}{3}Pl$	$\frac{1}{3}Pl$	$\frac{2}{9}Pl$	$\frac{2}{9}Pl$
	1.5 P	1.5 P	$\frac{15}{32}Pl$	$\frac{15}{32}Pl$	$\frac{5}{16}Pl$	$\frac{5}{16}Pl$
	$\frac{pl}{2}$	$\frac{pl}{2}$	$\frac{1}{8}pl^2$	$\frac{1}{8}pl^2$	$\frac{1}{12}pl^2$	$\frac{1}{12}pl^2$
	$\frac{pa}{l}(b+\frac{a}{2})$	$\frac{pa^2}{2l}$	$\frac{pa^2}{8}(2-\frac{a}{l})^2$	$\frac{pa^2}{8}(2-\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{pa^2}{12}(6-8\frac{a}{l}+3\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{pa^2}{12}(4\frac{a}{l}-3\frac{a^2}{l^2})$
	$\frac{3}{8}pl$	$\frac{1}{8}pl$	$\frac{9}{128}pl^2$	$\frac{7}{128}pl^2$	$\frac{11}{192}pl^2$	$\frac{5}{192}pl^2$
	p a	p a	$\frac{pa^2}{4}(3-2\frac{a}{l})$	$\frac{pa^2}{4}(3-2\frac{a}{l})$	$\frac{pa^2}{6}(3-2\frac{a}{l})$	$\frac{pa^2}{6}(3-2\frac{a}{l})$
	$\frac{pcb}{l}$	$\frac{pca}{l}$	$\frac{p\,abc}{2l^2}(l+b-\frac{c^2}{4a})$	$\frac{p\,abc}{2l^2}(l+a-\frac{c^2}{4b})$	$\frac{pc}{l^2}[ab^2+\frac{c^2}{12}(l-3b)]$	$\frac{pc}{l^2}[a^2b+\frac{c^2}{12}(l-3a)]$
	$\frac{pa}{2}$	$\frac{pa}{2}$	$\frac{p\,la}{16}(3-\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p\,la}{16}(3-\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p\,la}{24}(3-\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p\,la}{24}(3-\frac{a^2}{l^2})$
	$\frac{pa}{2}(1-\frac{2a}{3l})$	$\frac{pa^2}{3l}$	$\frac{pa^2}{120}(40-45\frac{a}{l}+12\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{pa^2}{60}(10-6\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{pa^2}{30}(10-15\frac{a}{l}+6\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{pa^2}{20}(5\frac{a}{l}-4\frac{a^2}{l^2})$
	$\frac{pl}{6}$	$\frac{pl}{3}$	$\frac{7}{120}pl^2$	$\frac{1}{15}pl^2$	$\frac{1}{30}pl^2$	$\frac{1}{20}pl^2$
	$\frac{pl}{4}$	$\frac{pl}{4}$	$\frac{5}{64}pl^2$	$\frac{5}{64}pl^2$	$\frac{5}{96}pl^2$	$\frac{5}{96}pl^2$
	$\frac{pa}{2}(1-\frac{a}{6l})$	$\frac{pa^2}{6l}$	$\frac{pa^2}{120}(20-15\frac{a}{l}+3\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{pa^2}{120}(10-3\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{pa^2}{60}(10-10\frac{a}{l}+3\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{pa^2}{60}(5\frac{a}{l}-3\frac{a^2}{l^2})$
 parábola	$\frac{pl}{3}$	$\frac{pl}{3}$	$\frac{1}{10}pl^2$	$\frac{1}{10}pl^2$	$\frac{1}{15}pl^2$	$\frac{1}{15}pl^2$
	$p\frac{l-a}{2}$	$p\frac{l-a}{2}$	$\frac{pl}{64}(l+b)(5-\frac{b^2}{l^2})$	$\frac{pl}{64}(l+b)(5-\frac{b^2}{l^2})$	$\frac{pl}{64}(l+b)(5-\frac{b^2}{l^2})$	$\frac{pl}{64}(l+b)(5-\frac{b^2}{l^2})$
	$\frac{m}{l}$	$\frac{m}{l}$	$\frac{m}{2}(1-3\frac{b^2}{l^2})$	$\frac{m}{2}(1-3\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{mb}{l}(2-3\frac{b}{l})$	$\frac{ma}{l}(2-3\frac{a}{l})$

PASO [3]: M.E.P.

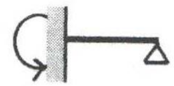
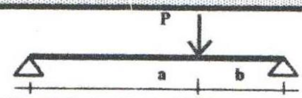
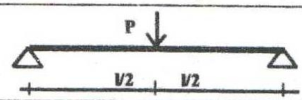
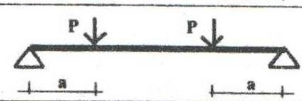
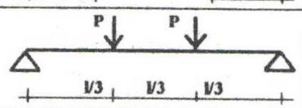
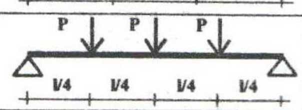
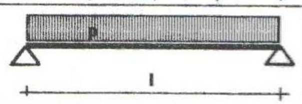
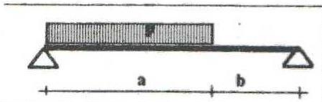
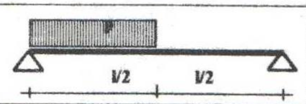
MÉTODO DE CROSS

Tabla **5.1.1** - pág 53

REACCIONES Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PARA TRAMOS DE INERCIA CONSTANTE

Expresiones para hallar las reacciones de apoyo

Expresiones para la determinación de los M.E.P.

			 Ma	 Mb	 Ma	Mb
CARGAS	**Ra**	**Rb**	**Ma**	**Mb**	**Ma**	**Mb**
	$\frac{P\,b}{l}$	$\frac{P\,a}{l}$	$\frac{P\,a\,b}{2\,l^2}\,(l+b)$	$\frac{P\,a\,b}{2\,l^2}\,(l+a)$	$\frac{P\,a\,b}{l^2}\,b$	$\frac{P\,a\,b}{l^2}\,a$
	$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{3}{16}\,P\,l$	$\frac{3}{16}\,P\,l$	$\frac{1}{8}\,P\,l$	$\frac{1}{8}\,P\,l$
	P	P	$\frac{3}{2}\,P\,a\,(1-\frac{a}{l})$	$\frac{3}{2}\,P\,a\,(1-\frac{a}{l})$	$P\,a\,(1-\frac{a}{l})$	$P\,a\,(1-\frac{a}{l})$
	P	P	$\frac{1}{3}\,P\,l$	$\frac{1}{3}\,P\,l$	$\frac{2}{9}\,P\,l$	$\frac{2}{9}\,P\,l$
	1.5 P	1.5 P	$\frac{15}{32}\,P\,l$	$\frac{15}{32}\,P\,l$	$\frac{5}{16}\,P\,l$	$\frac{5}{16}\,P\,l$
	$\frac{p\,l}{2}$	$\frac{p\,l}{2}$	$\frac{1}{8}\,p\,l^2$	$\frac{1}{8}\,p\,l^2$	$\frac{1}{12}\,p\,l^2$	$\frac{1}{12}\,p\,l^2$
	$\frac{p\,a}{l}\,(b+\frac{a}{2})$	$\frac{p\,a^2}{2\,l}$	$\frac{p\,a^2}{8}\,(2-\frac{a}{l})^2$	$\frac{p\,a^2}{8}\,(2-\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{pa^2}{12}\,(6-8\frac{a}{l}+3\,\frac{a^2}{l^2})$	$\frac{pa^2}{12}\,(4\frac{a}{l}-3\frac{a^2}{l^2})$
	$\frac{3}{8}\,p\,l$	$\frac{1}{8}\,p\,l$	$\frac{9}{128}\,p\,l^2$	$\frac{7}{128}\,p\,l^2$	$\frac{11}{192}\,p\,l^2$	$\frac{5}{192}\,p\,l^2$

PASOS para aplicar el artificio del Método

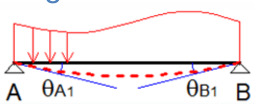
MÉTODO DE CROSS

[PASO 1]

Ángulos de giro en los extremos de una barra aislada

θ (theta)

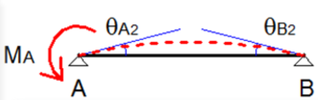
a) Carga transversal



Rigidez: κ

(kappa)

b) Momento aplicado en extremo izq.



Para inercia cte.:

$\alpha = 0{,}75$

Rigidez flexional:

$\gamma\kappa$ ó $\alpha\kappa$

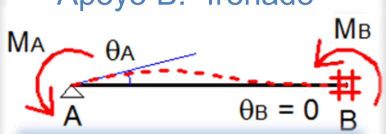
(gamma kappa) (alpha kappa)

[PASO 2]

Coeficiente de transmisión

β (beta)

a) Apoyo A: M_A aplicado
Apoyo B: "frenado"



Para inercia cte.:

$\alpha = 1$

$\beta = 0{,}5$

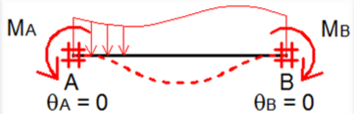
[PASO 3]

Momentos de fijación
ó
Momentos frenos
ó
Momentos de empotramiento perfecto

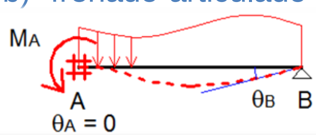
M.E.P.

c/carga transversal
≠ cond. vínculos

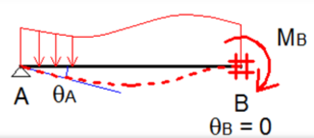
a) frenados



b) frenado-articulado



c) articulado-frenado

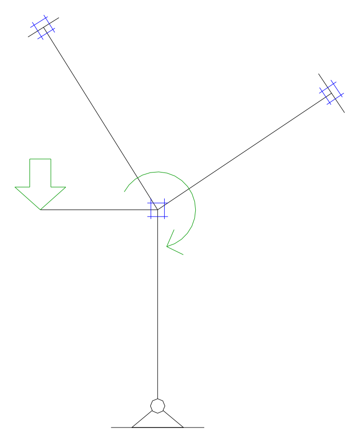


[PASO 4]

Coeficientes de Repartición

r_i

Se juntan varias barras en un nudo y ….
¿qué pasa cuando se suelta un nudo en una estructura que está frenada?



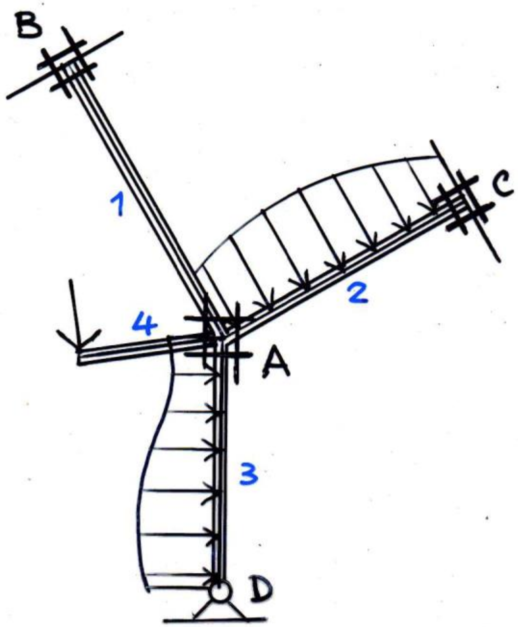
[PASO 5]

Artificio del Método de Cross
(ejemplo de aplicación)

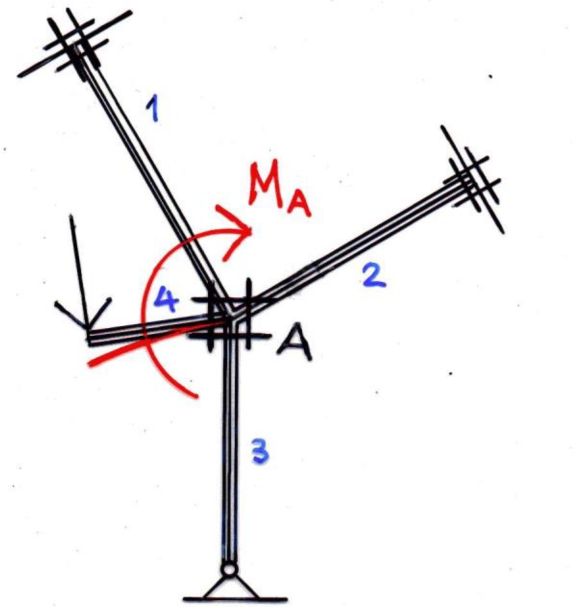
PASO [4]: coeficientes de repartición

MÉTODO DE CROSS

¿qué ocurre cuando a un nudo concurren varios tramos?
Concepto de repartición
Artificio del método de Cross (ejemplo)



Supongamos un nudo A, al cual concurren barras con distintos vínculos en su otro extremo, existiendo cargas solamente en la ménsula

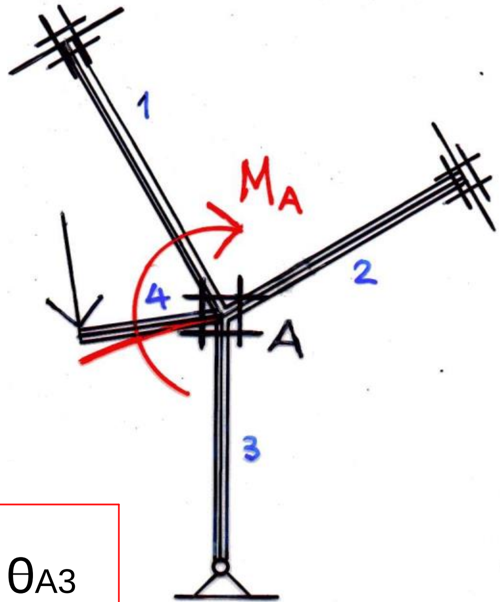


Inmovilizando el nudo A, aparece un momento freno M_A, con el sentido indicado, que producirá giro nulo en los extremos de los tramos.

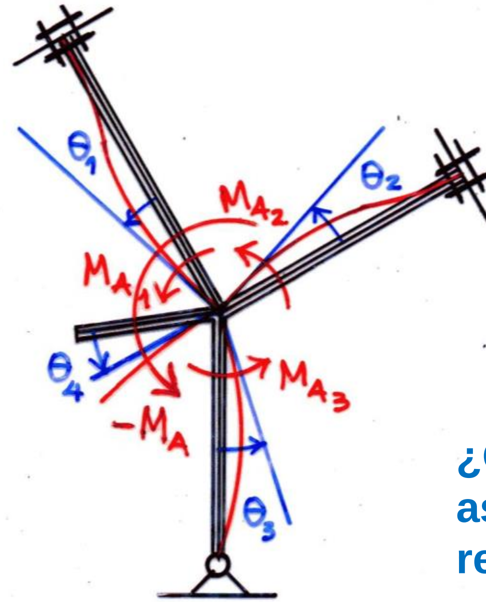
PASO [4]: coeficientes de repartición

MÉTODO DE CROSS

Por hipótesis se admite que todos los tramos concurrentes al nudo tienen el mismo giro:



$$\theta_{A1} = \theta_{A2} = \theta_{A3}$$



Si quitamos el freno en A, el nudo gira, produciéndose las deformaciones que se indican, provocadas por $-M_A$.

¿Qué valor de momentos asume cada tramo en relación a $-M_A$?

La relación entre deformaciones (giros) y causas que las producen (momentos) es:

$$\theta_{A1} = \frac{M_{A1}}{\gamma_1 \cdot \kappa_1} \qquad \theta_{A2} = \frac{M_{A2}}{\gamma_2 \cdot \kappa_2} \qquad \theta_{A3} = \frac{M_{A3}}{\gamma_3 \cdot \kappa_3}$$

Por otra parte, el momento en el nudo: $-M_A$, se reparte entre los tramos, debiéndose cumplir:

$$M_{A1} + M_{A2} + M_{A3} = -M_A$$

De ambas relaciones obtenemos:

$$\frac{M_{A1}}{\gamma_1 \cdot \kappa_1} = \frac{M_{A2}}{\gamma_2 \cdot \kappa_2} = \frac{M_{A3}}{\gamma_3 \cdot \kappa_3} = \frac{-M_A}{\gamma_1 \cdot \kappa_1 + \gamma_2 \cdot \kappa_2 + \gamma_3 \cdot \kappa_3}$$

PASO [4]: coeficientes de repartición

MÉTODO DE CROSS

Particularizando al tramo 1:

$$\frac{M_{A1}}{\gamma_1 . \kappa_1} = \frac{- M_A}{\sum \gamma_i . \kappa_i}$$

$$M_{A1} = \boxed{- \frac{\gamma_1 . \kappa_1}{\sum \gamma_i . \kappa_i}} M_A$$

r_t

Generalizando para un tramo cualquiera:

Se define coeficiente de repartición al valor:

$$\boxed{r_t = \frac{\gamma_t . \kappa_t}{\sum \gamma_i . \kappa_i}}$$

$$r_t = \frac{\alpha_t . \kappa_t}{\sum \alpha_i . \kappa_i}$$

Dividiendo numerador y denominador entre 4

Por lo que:

$$\boxed{M_{A1} = - r_t . M_A}$$

Esta expresión resuelve el problema planteado:

¿Qué valor de momentos asume cada tramo en relación a $-M_A$?

PASO [4]: coeficientes de repartición

MÉTODO DE CROSS

A los efectos prácticos, es conveniente **simplificar la expresión del coeficiente de repartición**:

$$r_t = \frac{\alpha t \,.\, Kt}{\sum \alpha i \,.\, Ki}$$

A. como generalmente operamos con barras del mismo material, **se simplifica el valor E** en la expresión de κ :

$$r_t = \frac{\alpha t \,.\, \frac{\cancel{E} \,.\, I_t}{L_t}}{\sum \alpha i \,.\, \frac{\cancel{E} \,.\, I_i}{L_i}}$$

B. INERCIA RELATIVA: por comodidad operativa se aconseja tomar como **VALOR UNIDAD**

- a la menor de las inercias mínimas de los tramos que intervienen con sus rigideces
- o la inercia del tramo si es de sección constante

INERCIA RELATIVA

$$\boxed{I_r = \frac{I_{tramo}}{I_{mín.\ estr.}}}$$

$$r_t = \frac{\alpha t \,.\, \frac{I_t}{I_{mín.\ estr.} \cdot L_t}}{\sum \alpha i \,.\, \frac{I_i}{I_{mín.\ estr.} \cdot L_i}}$$

Los valores de la inercia de los demás tramos serán expresados en relación a la unidad, resultando valores ≥ 1

$$r_t = \frac{\alpha_t \cdot \frac{I_{r\ t}}{L_t}}{\sum \alpha_i \cdot \frac{I_{r\ i}}{L_i}}$$

PASOS para aplicar el artificio del Método

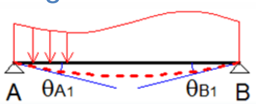
MÉTODO DE CROSS

[PASO 1]

Ángulos de giro en los extremos de una barra aislada

θ (theta)

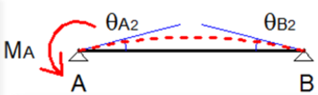
a) Carga transversal



Rigidez: κ

(kappa)

b) Momento aplicado en extremo izq.



Para inercia cte.:

$$\alpha = 0{,}75$$

Rigidez flexional:

$\gamma\kappa$ ó $\alpha\kappa$

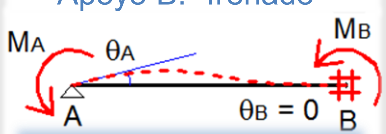
(gamma kappa) (alpha kappa)

[PASO 2]

Coeficiente de transmisión

β (beta)

a) Apoyo A: M_A aplicado
Apoyo B: "frenado"



Para inercia cte.:

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 0{,}5$$

[PASO 3]

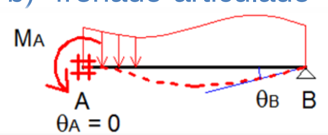
Momentos de fijación
ó
Momentos frenos
ó
Momentos de empotramiento perfecto

M.E.P.

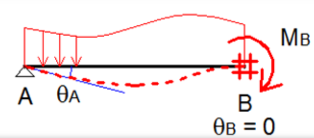
c/carga transversal
≠ cond. vínculos

a) frenados

b) frenado-articulado



c) articulado-frenado



[PASO 4]

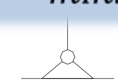
Coeficientes de Repartición

r_i

Se juntan varias barras en un nudo y ….
¿qué pasa cuando se suelta un nudo en una estructura que está frenada?

$$r_t = \frac{\alpha_t \cdot \kappa_t}{\sum \alpha_i \cdot \kappa_i}$$

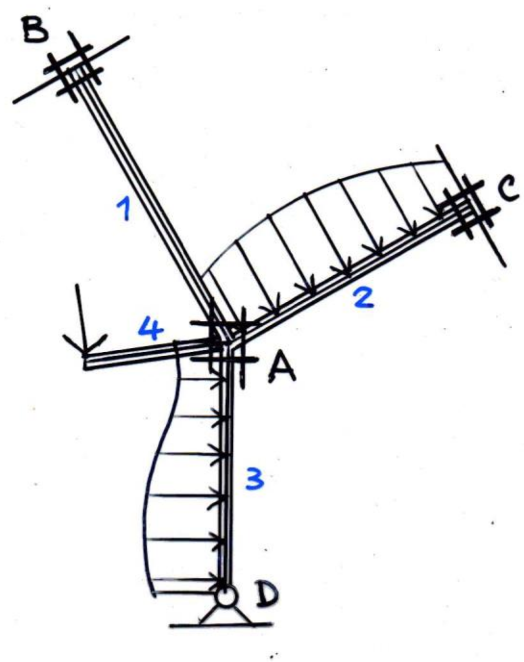
$$I_r = \frac{I_{tramo}}{I_{mín.estruct.}}$$



[PASO 5]

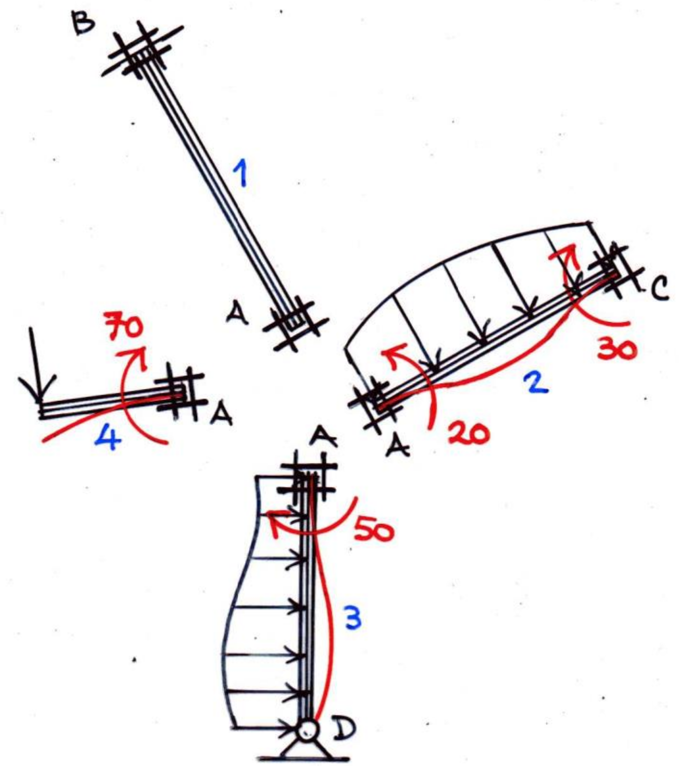
Artificio del Método de Cross
(ejemplo de aplicación)

Esquema de forma, cargas y vínculos



Situación de partida: Nodos frenados

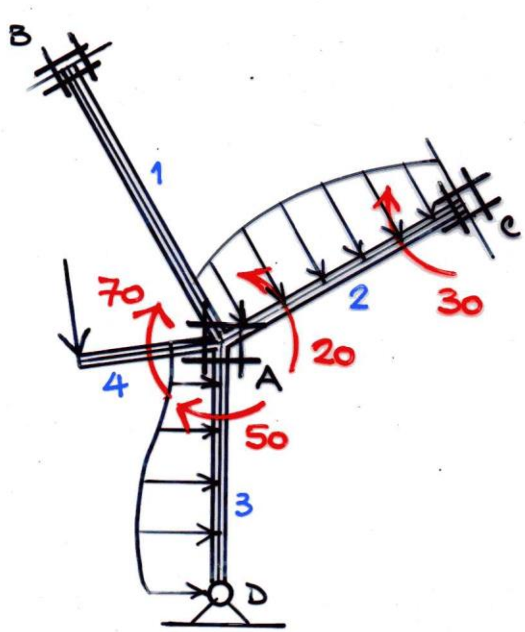
Se aíslan las barras y determinan M.E.P.

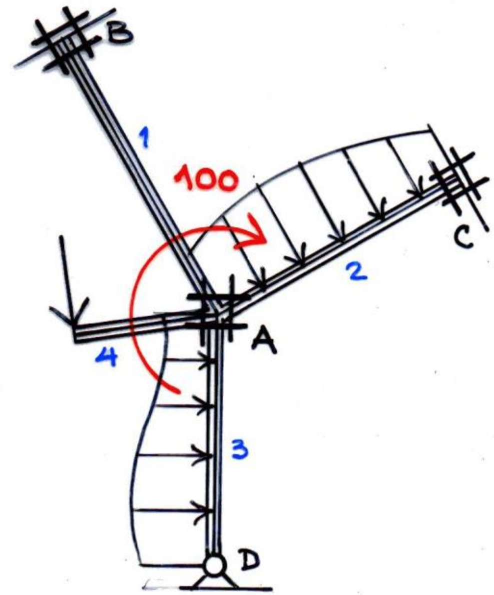


Determinación de los momentos de fijación, o de empotramiento perfecto, provocados por cargas perpendiculares al eje del tramo, o por momentos aplicados en el mismo

Se vuelve a componer la estructura (con los M.E.P. en los extremos de las barras)

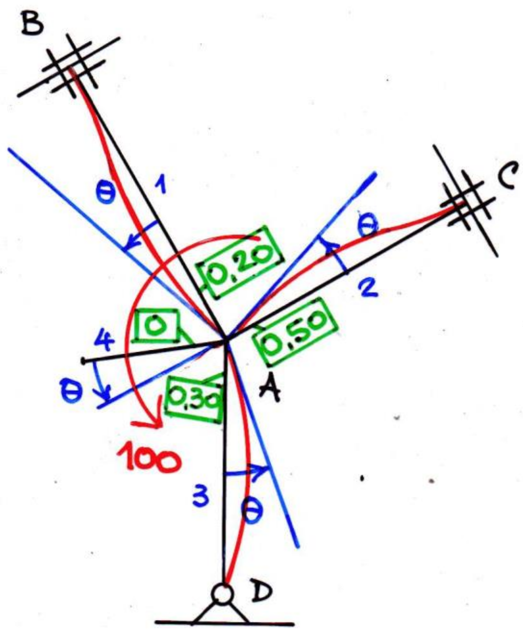
Se plantea: $\sum M_A = 100 daN.M$



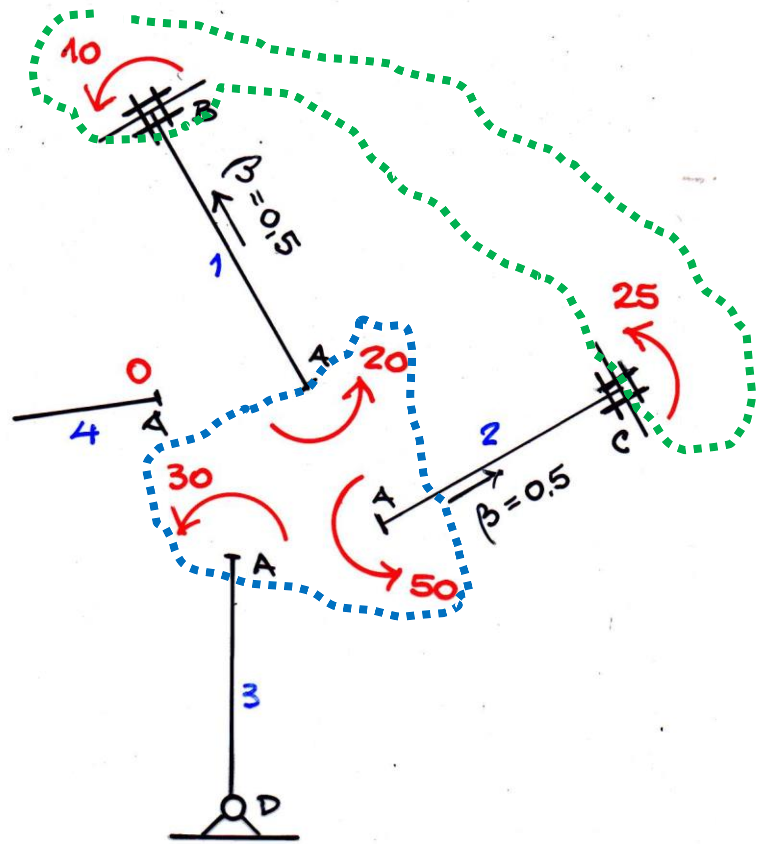


MÉTODO DE CROSS

Se plantea suelta el aparato fijador y surge: $-\sum M_A = 100 daN.m$



Repartición de momentos en el nudo y transmisión de momentos hacia extremos opuestos (si corresp.)



Momentos repartidos:

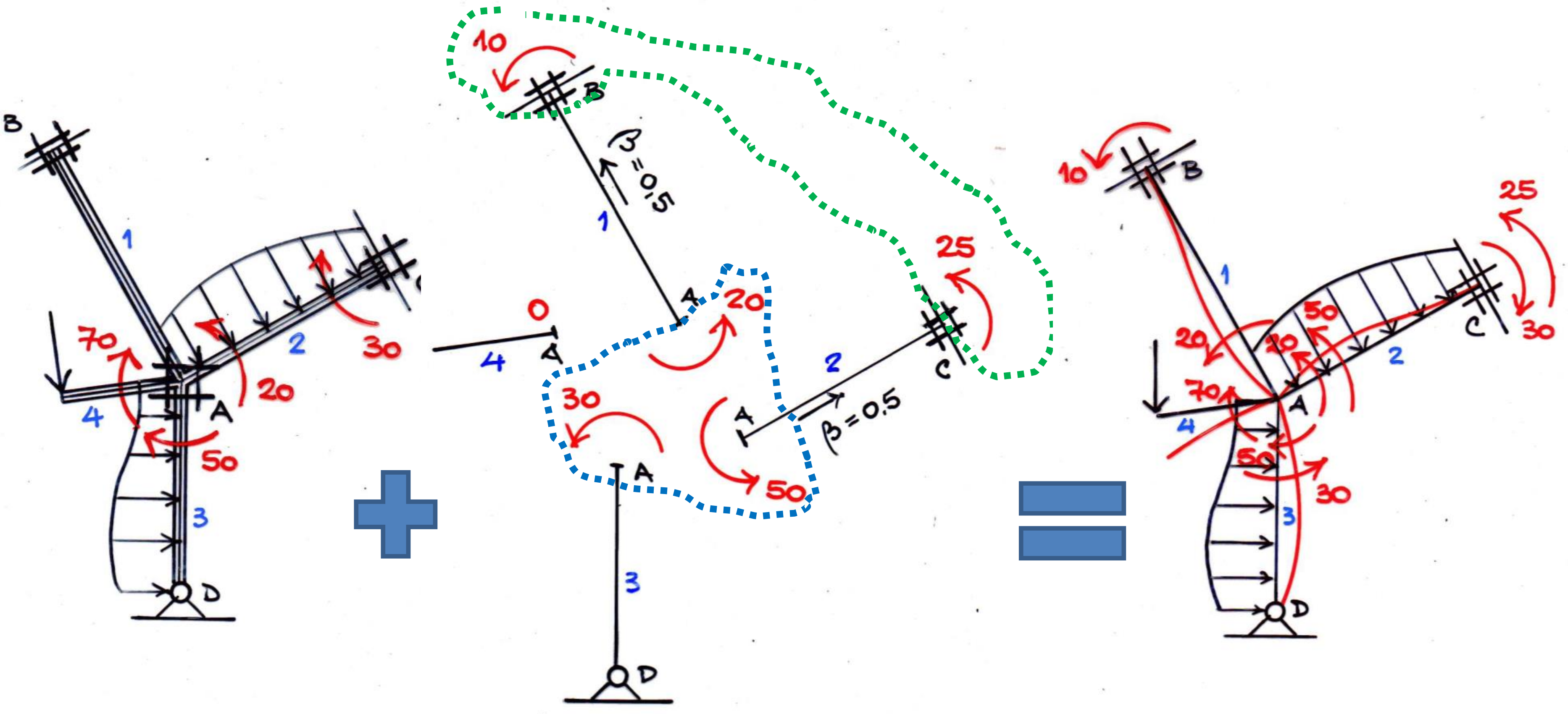
$$-\sum M_A \times r_i = \begin{array}{l} -100 \times 0{,}20 = 20 daN.m \text{ (barra 1)} \\ -100 \times 0{,}50 = 50 daN.m \text{ (barra 2)} \\ -100 \times 0{,}30 = 30 daN.m \text{ (barra 3)} \end{array}$$

Momentos transmitidos:

$$\times \beta = 20 \times 0{,}50 = 10 daN.m$$

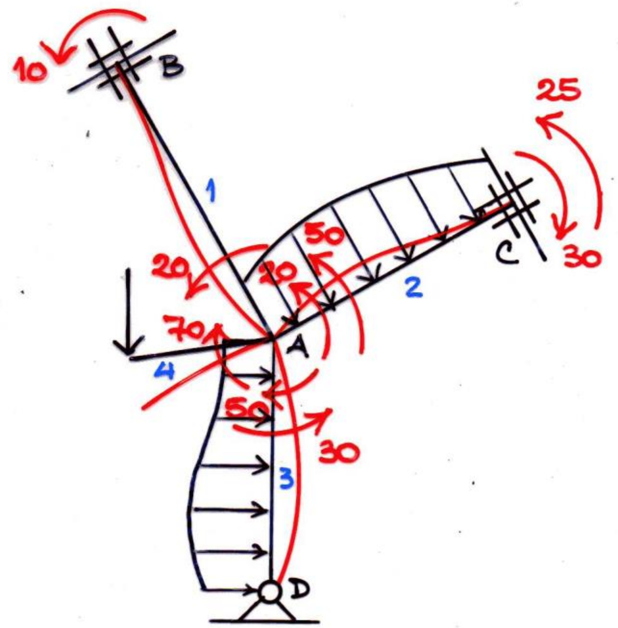
$$\times \beta = 50 \times 0{,}50 = 25 daN.m$$

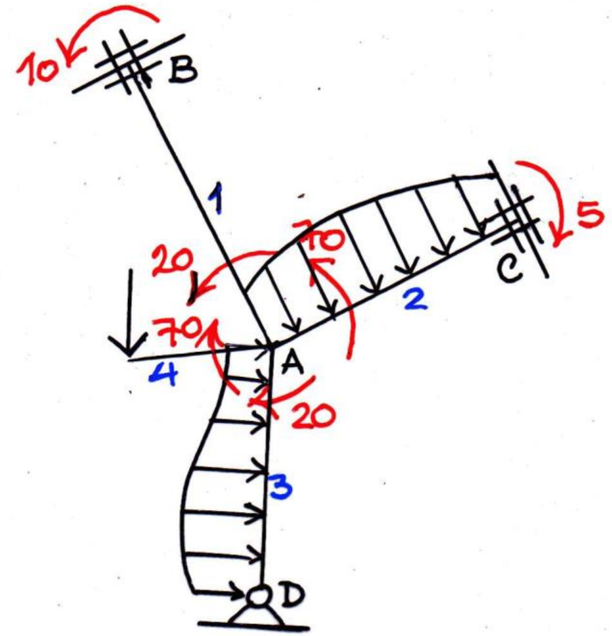
MOMENTOS FINALES



M.E.P. + Momentos repartidos
Momentos transmitidos
= **MOMENTOS FINALES** en los extremos de las barras

MOMENTOS FINALES

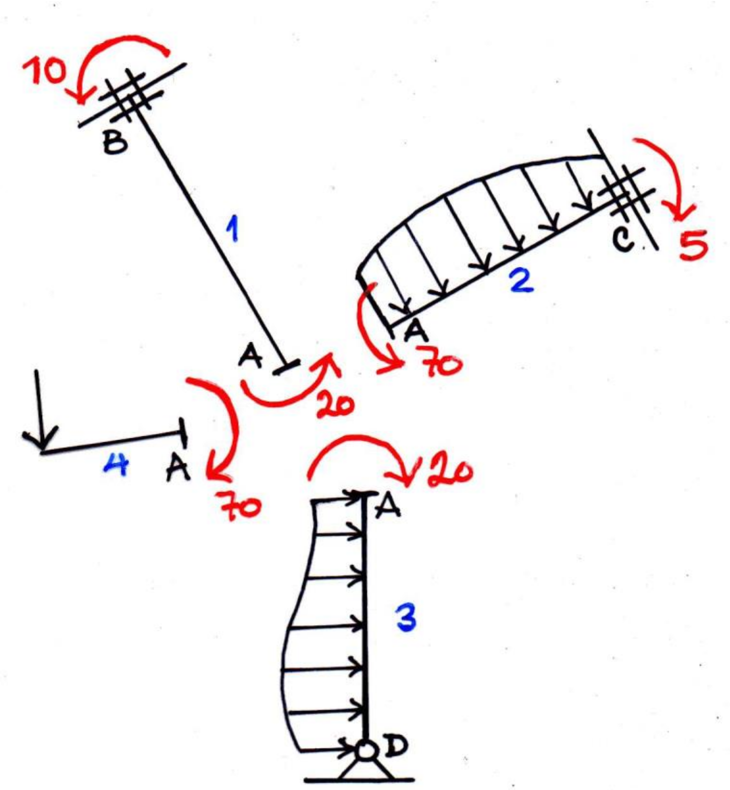




PASO [5]: Artificio del método

MÉTODO DE CROSS

Se separan las barras.
Se está en condiciones de hallar <u>las reacciones en los apoyos y los diagramas de solicitaciones</u>



Aplicando:

- ✓ ecuaciones de equilibrio
  - ✓ **Σ Fx = 0**
  - ✓ **Σ Fy = 0**
  - ✓ **Σ M = 0**

- ✓ la ecuación fundamental de las vigas rectas: relación pVM

M``(x) = V`(x) = -p

Ejemplo de aplicación: