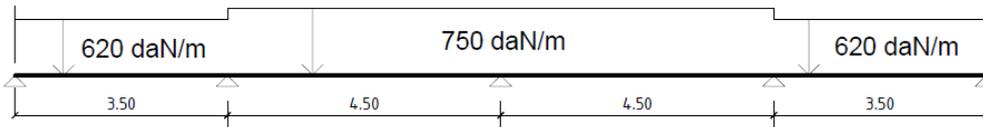
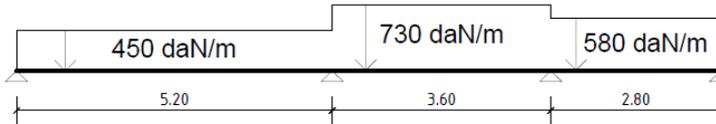
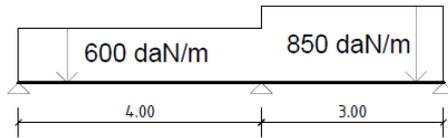
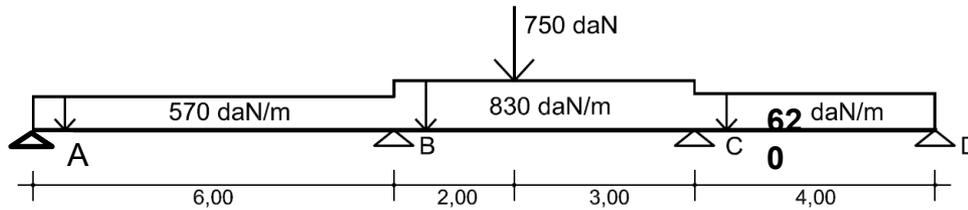
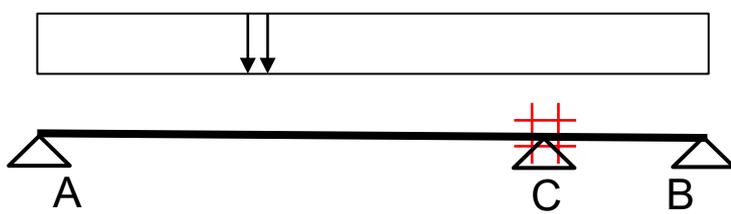


ESTRUCTURAS I

**PÓRTICOS HIPERESTÁTICOS
(MÉTODO DE CROSS)**

INTRODUCCIÓN

VIGAS HIPERESTÁTICAS



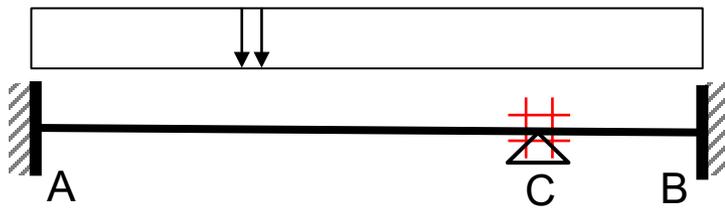
Flexión Simple

✓ tramos continuos: horizontales

✓ con cargas gravitatorias

(V) Cortante
(M) Momento

✓ Concurrencia de 2 barras por nudo



Elementos horizontales,
cargas perpendiculares

VIGAS HIPERESTÁTICAS

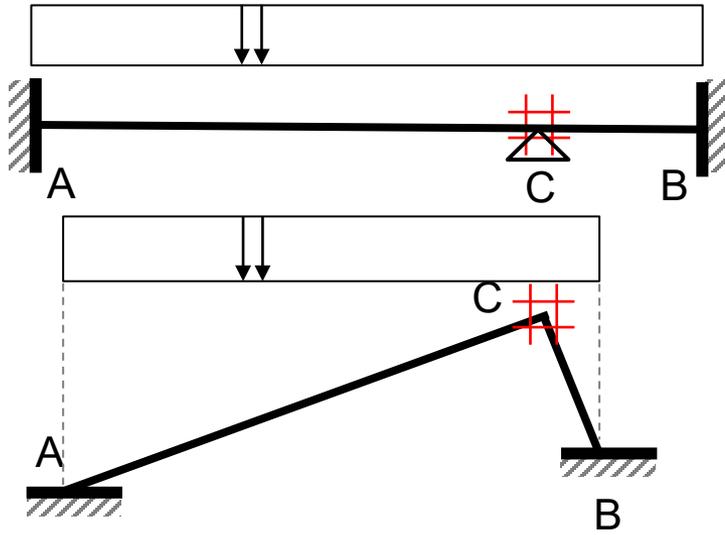
Flexión
Simple

VIGAS HIPERESTÁTICAS

PÓRTICOS HIPERESTÁTICOS

Elementos horizontales, cargas perpendiculares

(tramo "quebrado")
Cargas perpendiculares o no al eje de la barra



Flexión Compuesta

- (N) Axil
- (V) Cortante
- (M) Momento

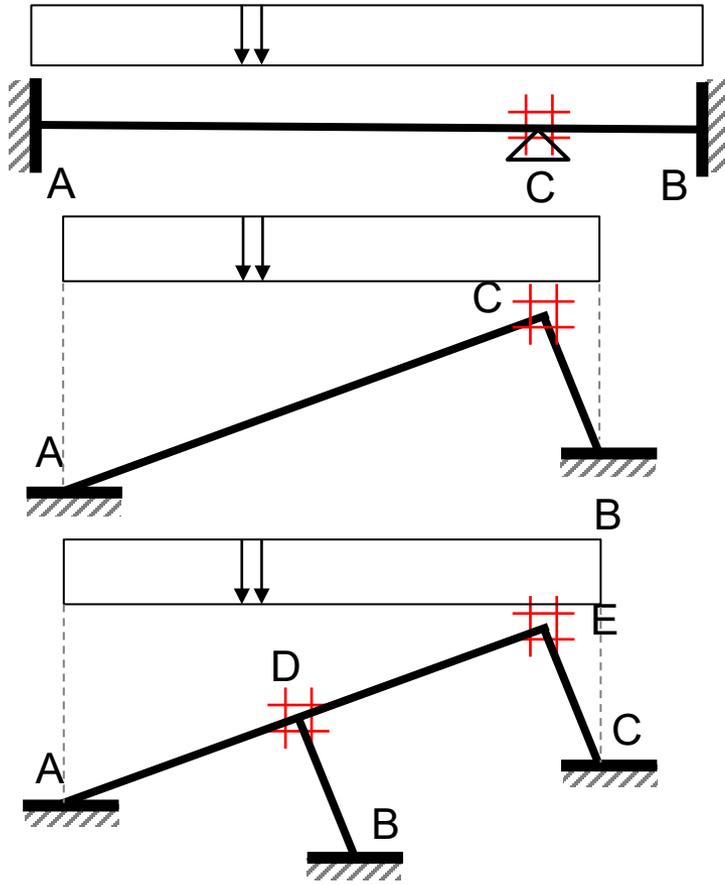
- ✓ tramos continuos: horizontales, inclinados, verticales
- ✓ con cargas gravitatorias
- ✓ Concurrencia de 2 o más barras por nudo

Flexión Simple

VIGAS HIPERESTÁTICAS

Flexión Compuesta

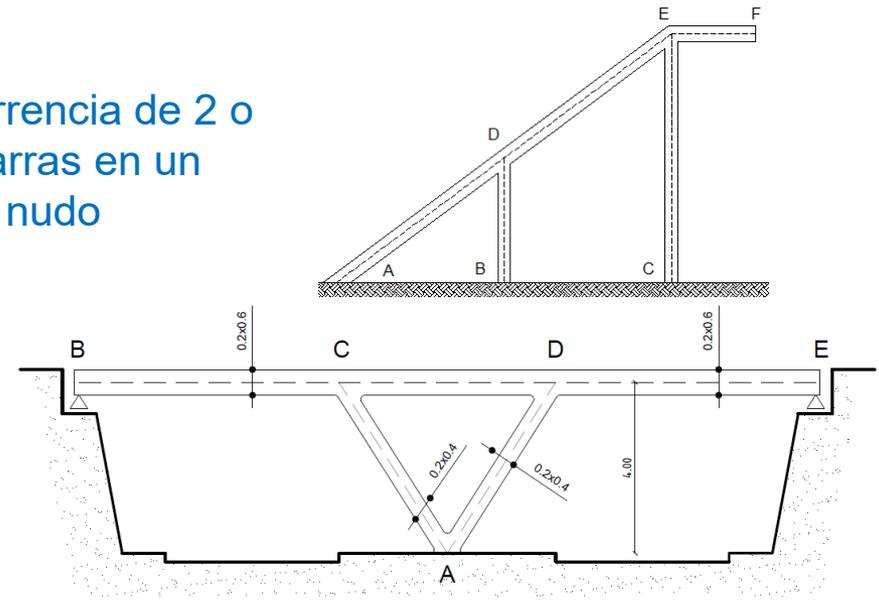
PÓRTICOS HIPERESTÁTICOS



Elementos horizontales, cargas perpendiculares

(tramo "quebrado")
Cargas perpendiculares o no al eje de la barra

Concurrencia de 2 o más barras en un mismo nudo



Flexión Simple

VIGAS HIPERESTÁTICAS

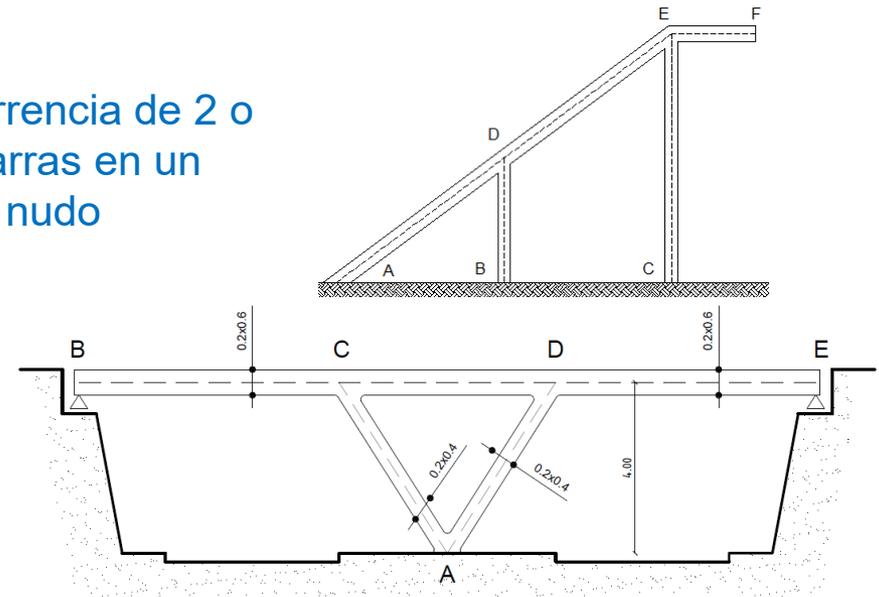
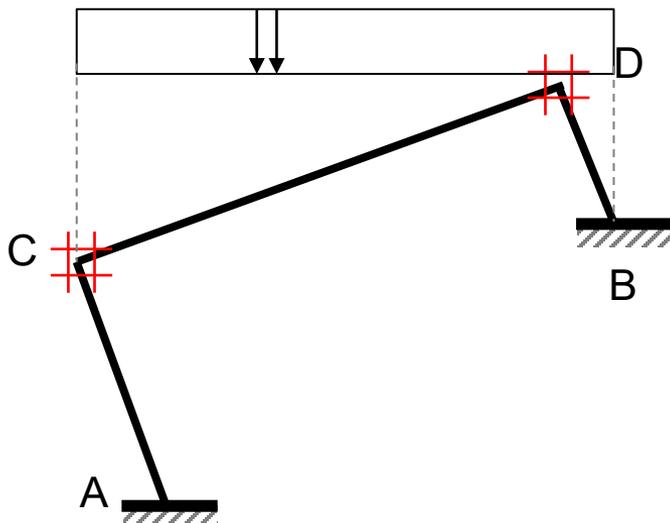
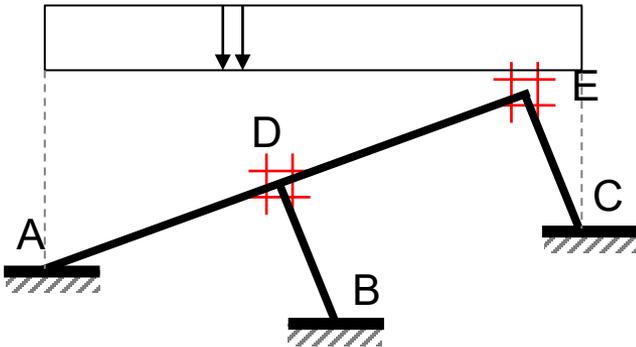
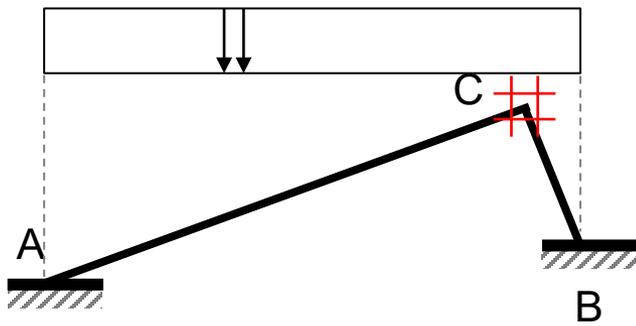
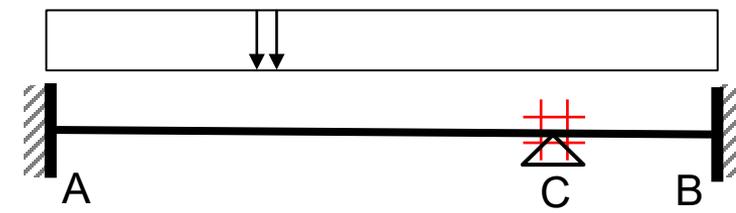
Flexión Compuesta

PÓRTICOS HIPERESTÁTICOS

Elementos horizontales, cargas perpendiculares

(tramo "quebrado")
Cargas perpendiculares o no al eje de la barra

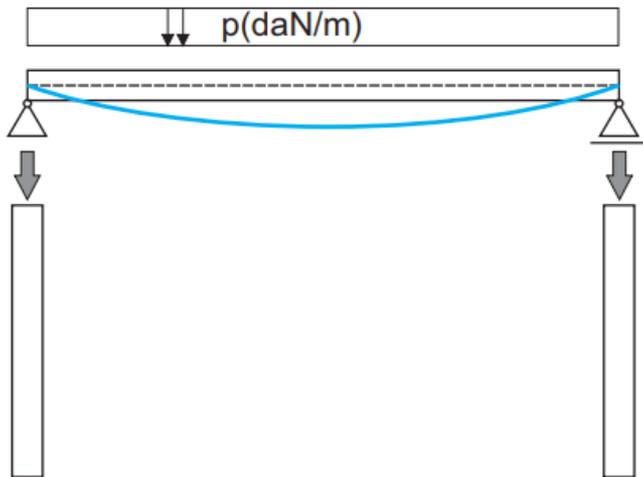
Concurrencia de 2 o más barras en un mismo nudo



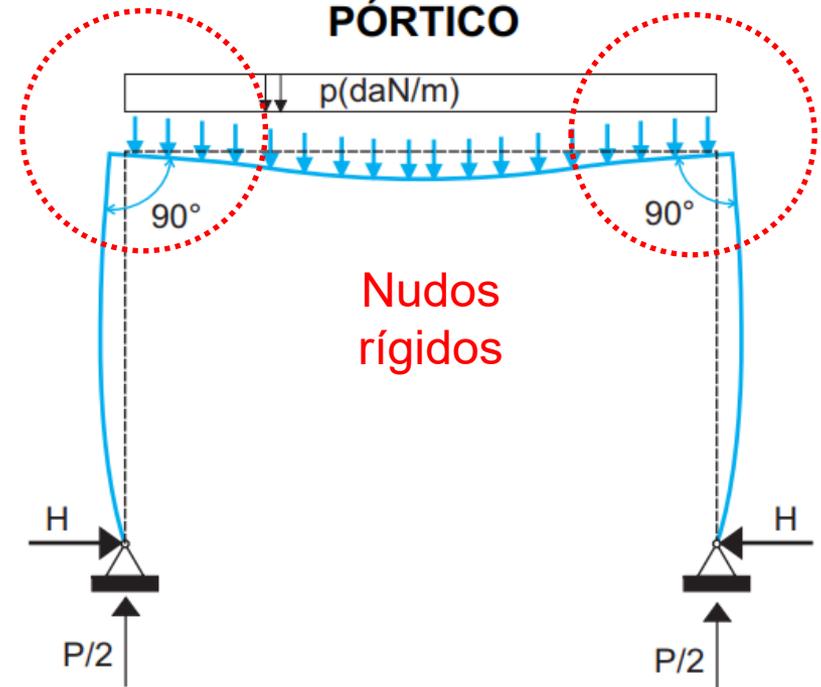
PÓRTICOS

- son estructuras constituidas por una sucesión de **barras** de eje rectilíneo o curvilíneo...
- cuyas barras deben vincularse en forma solidaria, manteniendo una estricta continuidad material, conformando **nudos rígidos** que sean capaces de **transmitir esfuerzos** entre las distintas barras...

Elemento *SIN* continuidad interna:
SISTEMA VIGA-PILAR



Elemento *CON* continuidad interna:
PÓRTICO



PÓRTICOS



viga



pilar

Acero



Para que una estructura trabaje como PÓRTICO

requiere de nudos rígidos capaces de transmitir esfuerzos entre las distintas barras

Nudos rígidos



PÓRTICOS



viga



pilar

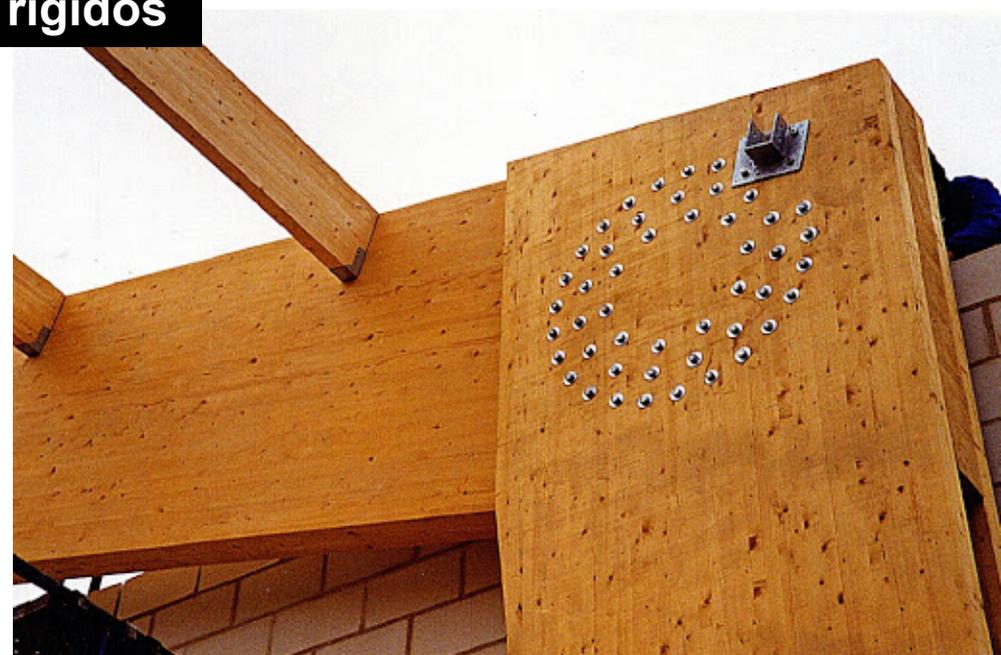
Madera



Para que una estructura trabaje como PÓRTICO

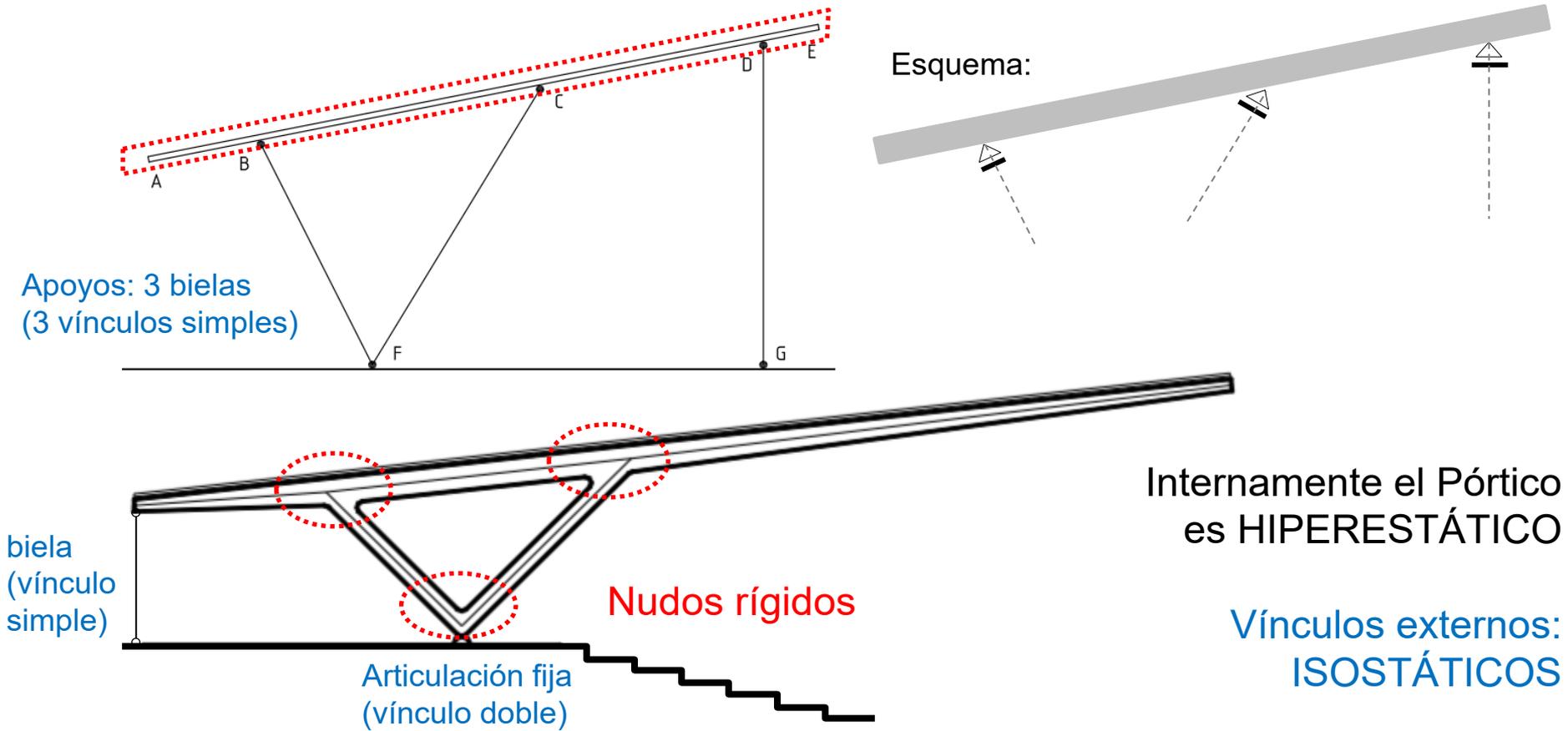
requiere de nudos rígidos capaces de transmitir esfuerzos entre las distintas barras

Nudos rígidos



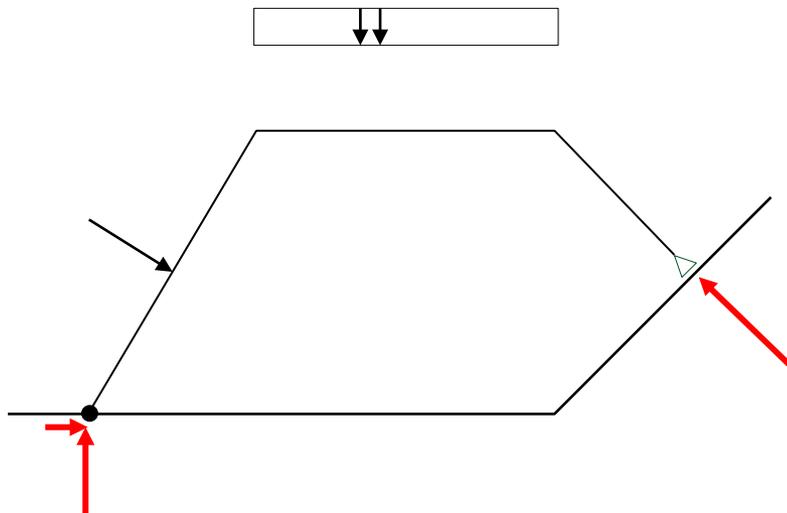
PÓRTICOS

- son estructuras constituidas por una sucesión de **barras** de eje rectilíneo o curvilíneo...
- cuyas barras deben vincularse en forma solidaria, manteniendo una estricta continuidad material, conformando **nudos rígidos** que sean capaces de **transmitir esfuerzos entre las distintas barras...**
- y según sus **vínculos**, serán **pórticos ISOSTÁTICOS o HIPERESTÁTICOS**



PÓRTICOS ISOSTÁTICOS

Nº ecuac. de equilibrio = Nº incógnitas

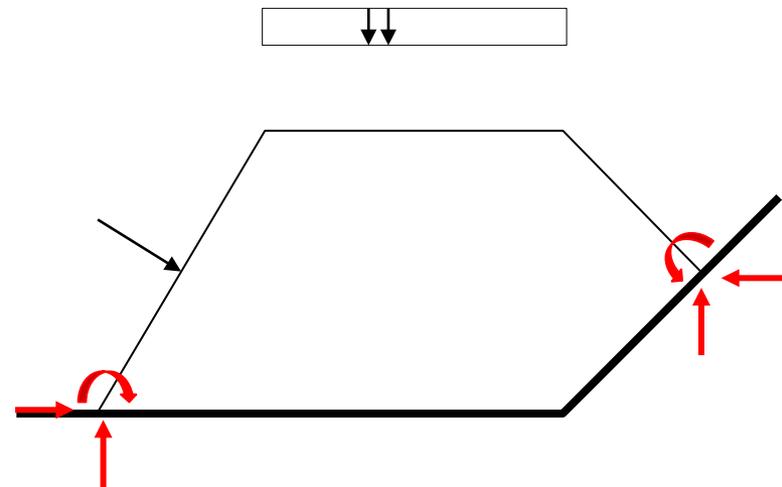


$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M &= 0\end{aligned}$$

3 incógnitas

PÓRTICOS HIPERESTÁTICOS

Nº ecuac. de equilibrio < Nº incógnitas



$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M &= 0\end{aligned}$$

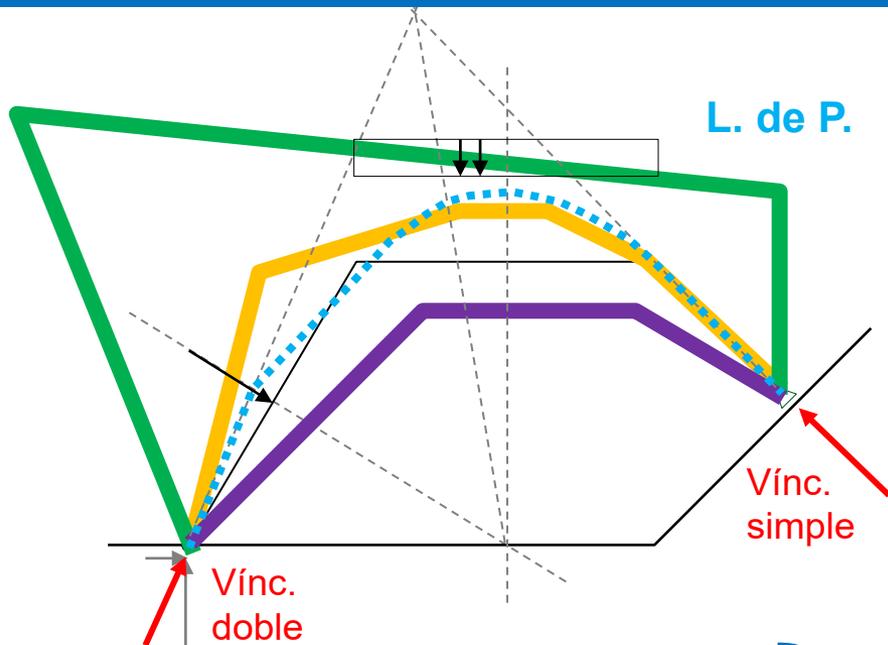
6 incógnitas

Ecuac. no son suficientes

Se abandona el Principio de Rigidez Relativa de los Cuerpos... y se recurre a Ecuaciones de Deformación

PÓRTICOS ISOSTÁTICOS

Nº ecuac. de equilibrio = Nº incógnitas



- ✓ posición y tipo de vínculos
- ✓ cargas actuantes (fuerzas exteriores)

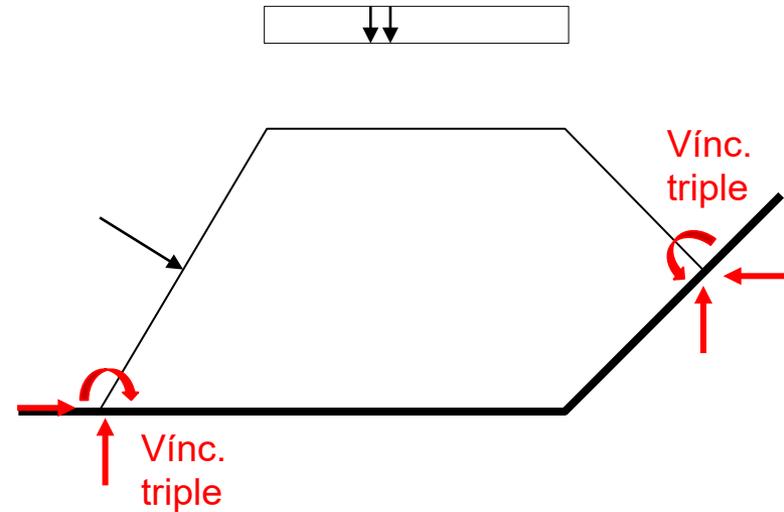
Equil. Global

En un pórtico ISOSTÁTICO la **forma geométrica** NO influye en la determinación del equilibrio global.

Pero esa **forma** sí va a influir en las sollicitaciones (V, M, N), ya que cuanto más alejadas estén esas barras de la línea de presión, más sollicitadas van a estar.

PÓRTICOS HIPERESTÁTICOS

Nº ecuac. de equilibrio < Nº incógnitas



- ✓ posición y tipo de vínculos
- ✓ cargas actuantes (fuerzas exteriores)
- ✓ forma de la estructura
- ✓ geometría secciones transversales barra
- ✓ características elásticas del material

Se abandona el Principio de Rigidez Relativa de los Cuerpos... y se recurre a Ecuaciones de Deformación

PÓRTICOS HIPERESTÁTICOS

Nº ecuac. de equilibrio < Nº incógnitas

COEFICIENTES REPARTICIÓN

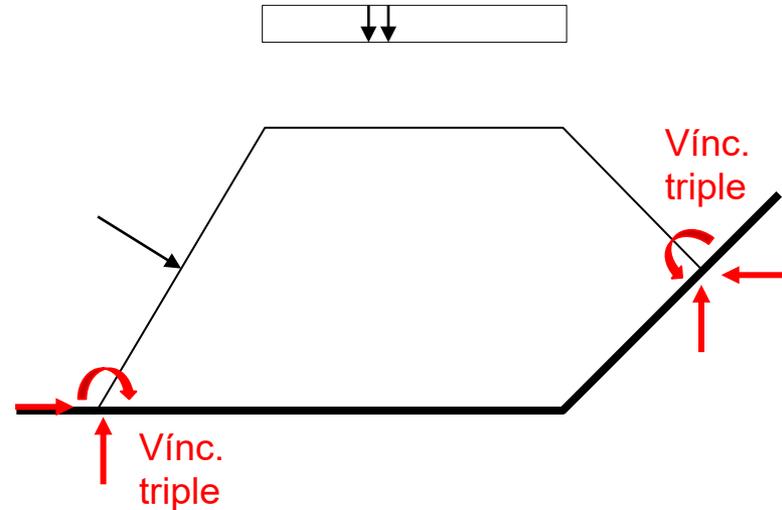
$$r_t = \frac{\alpha_t \cdot \kappa_t}{\sum \alpha_i \cdot \kappa_i}$$

$$\kappa = \frac{E \cdot I}{L}$$

RIGIDEZ

$$\alpha \kappa$$

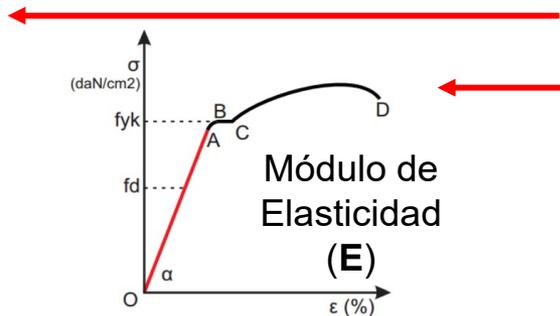
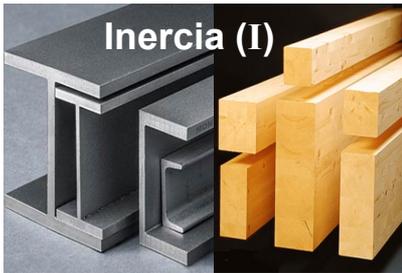
RIGIDEZ FLEXIONAL



Vínculos (α)

Largo barras (L)

- ✓ posición y tipo de vínculos
- ✓ cargas actuantes (fuerzas exteriores)
- ✓ forma de la estructura
- ✓ geometría secciones transversales barra
- ✓ características elásticas del material



Se abandona el Principio de Rigidez Relativa de los Cuerpos... y se recurre a Ecuaciones de Deformación

INFLUENCIA DE LAS RIGIDECES RELATIVAS EN LOS DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES

Casos de inercia constante

Casos de inercia variable

$$\kappa = \frac{E \cdot I}{L}$$

RIGIDEZ

$$\cong \kappa = \frac{I_r}{L}$$

$$I_r = \frac{I_{tramo}}{I_{mín.estruct.}}$$

INFLUENCIA DE LOS VÍNCULOS EN LOS DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES

$\alpha \kappa$

RIGIDEZ FLEXIONAL

INFLUENCIA DE LAS RIGIDEZES RELATIVAS EN LOS DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES

Casos de inercia constante

$$K = \frac{E \cdot I}{L}$$

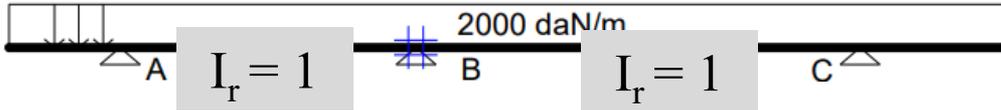
$$\cong K = \frac{I_r}{L}$$

$$I_r = \frac{I_{\text{tramo}}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$

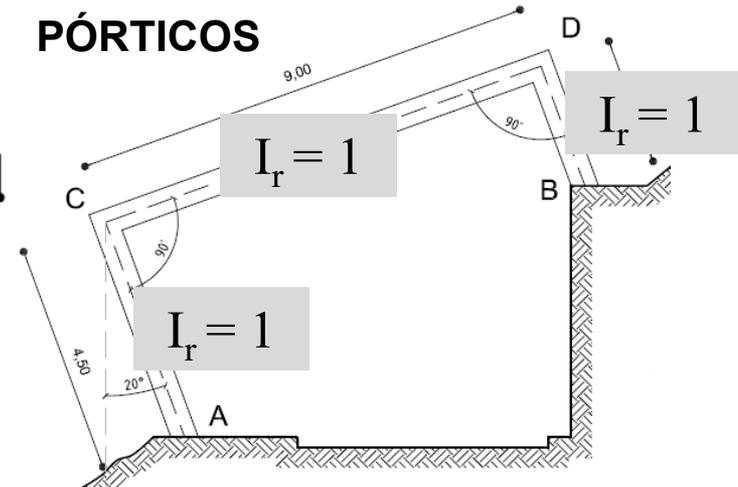
RIGIDEZ

Barras con la misma sección:

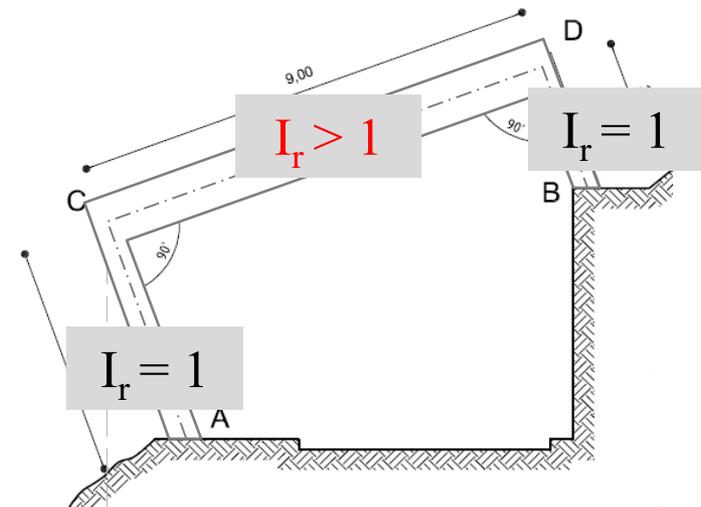
VIGAS



PÓRTICOS



Barras con diferentes secciones:
(caso más común en Pórticos)



INFLUENCIA DE LAS RIGIDECES RELATIVAS EN LOS DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES

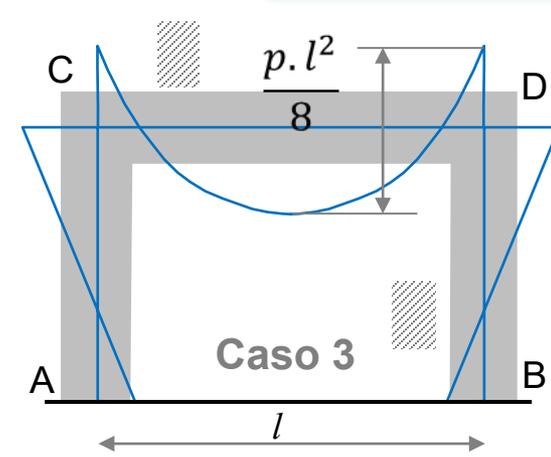
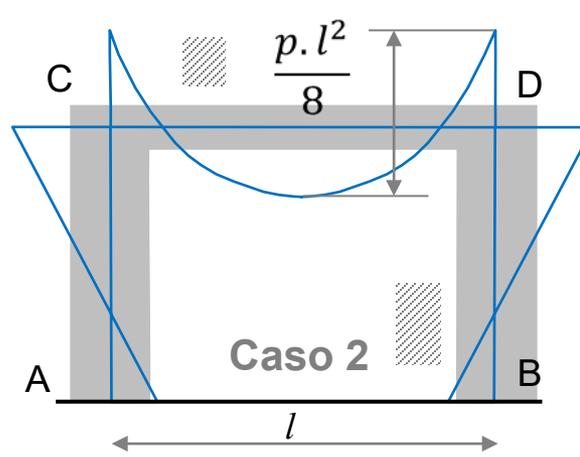
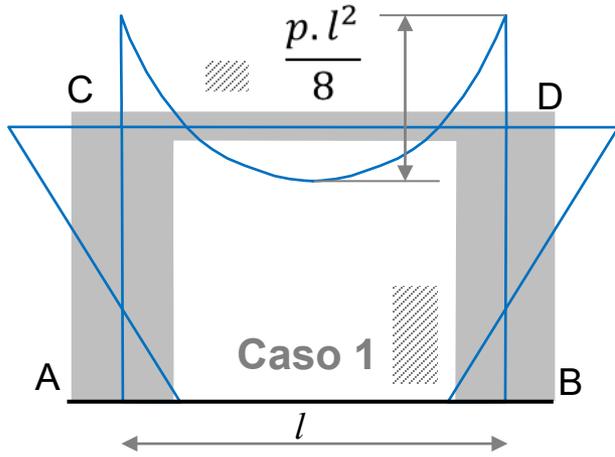
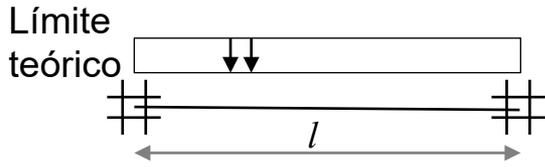
Casos de inercia constante

RIGIDEZ

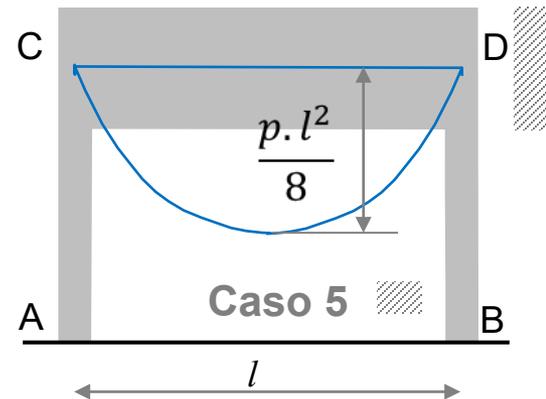
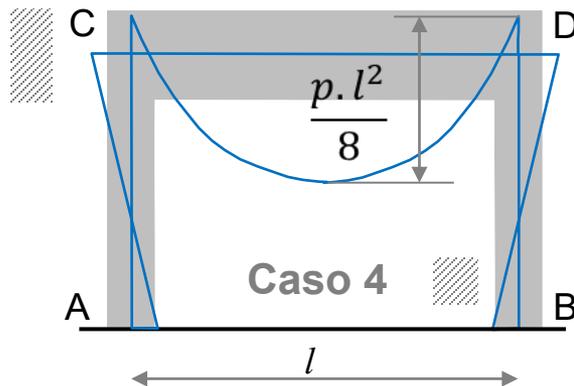
I_r cambia
 L no cambia

$$\cong \kappa = \frac{I_r}{L}$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$



Barras con diferentes secciones (caso más común en Pórticos)



INFLUENCIA DE LAS RIGIDECES RELATIVAS EN LOS DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES

Casos de inercia variable



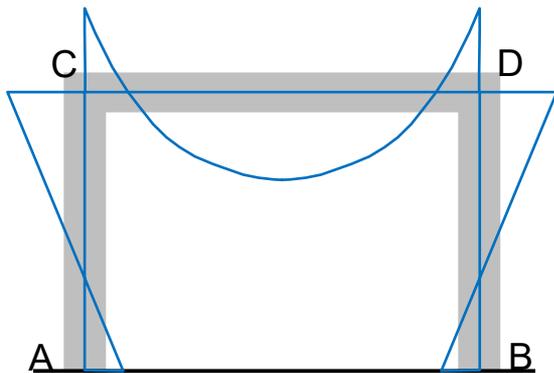
$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

I_r cambia
 L no cambia

RIGIDEZ

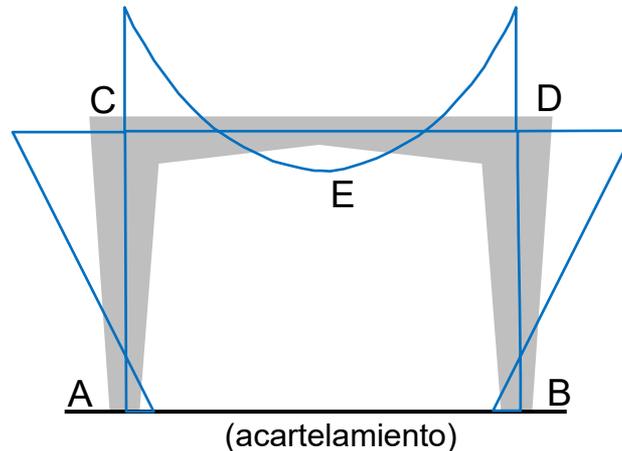
$$\cong \kappa = \frac{I_r}{L}$$

**Caso 3: Inercia constante
Pórtico Hiperestático**



Secciones constantes
en todas las barras

**Caso 6: Inercia variable
Pórtico Hiperestático**



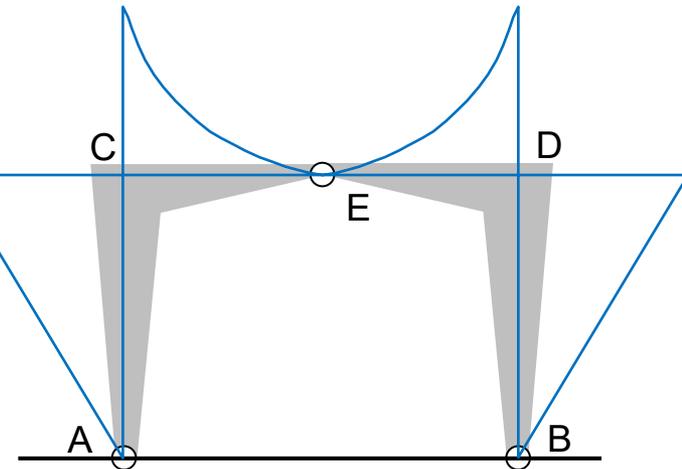
Disminuye altura
de las secciones
en A, B y E

↓
disminución
de momentos
en A, B y E

Aumenta altura de
las secciones hacia
los nudos C y D

↓
aumento de
momentos
en C y D

**Caso 7: Inercia variable
Pórtico Isostático
(triarticulado)**



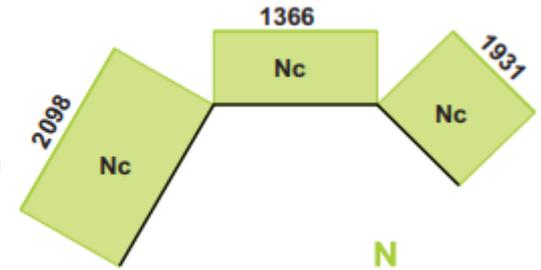
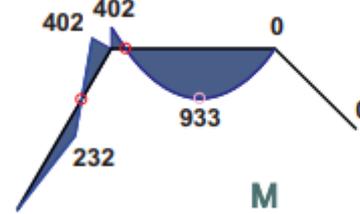
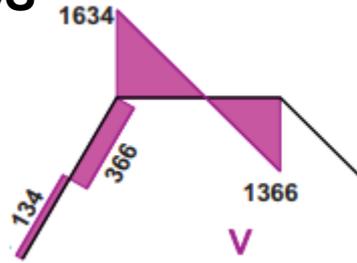
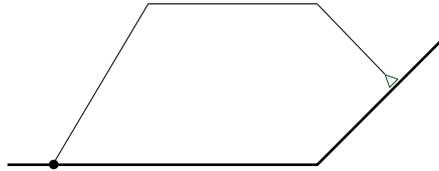
disminuye altura de las
secciones en A, B y E, y se
colocan articulaciones dobles

↓
en A, B y E
momento = 0

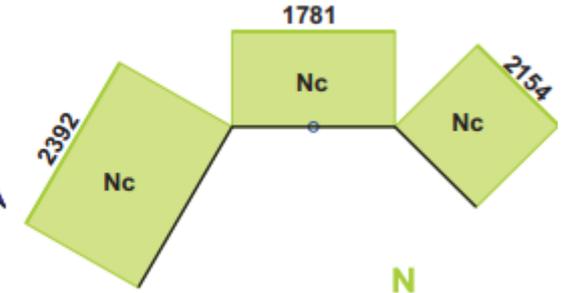
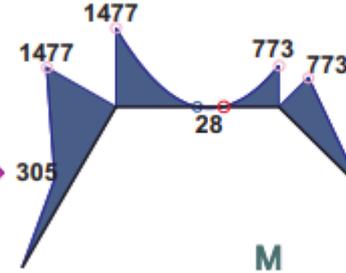
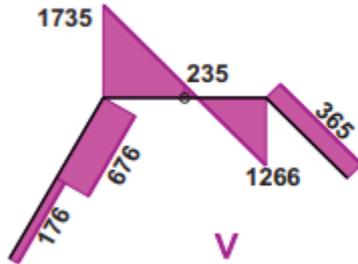
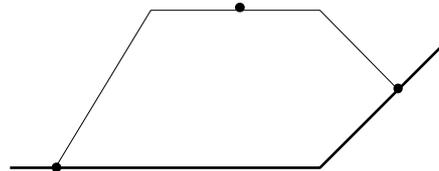
↓
aumento mayor
de momentos
en C y D

INFLUENCIA DE LOS VÍNCULOS EN LOS DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES

PÓRTICOS ISOSTÁTICOS

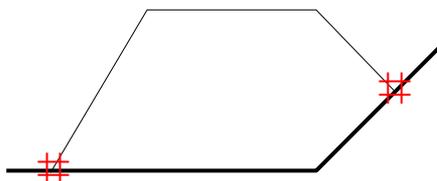
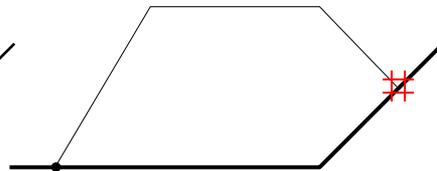
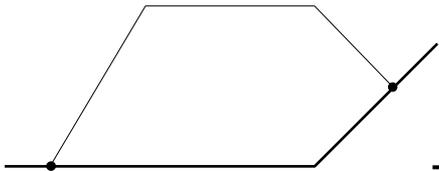


PÓRTICOS BI-ARTICULADOS



PÓRTICO TRI-ARTICULADO

PÓRTICOS HIPERESTÁTICOS



cambia

αK

RIGIDEZ FLEXIONAL

Para inercia cte.:



$$\alpha = 0,75$$

Para inercia cte.:



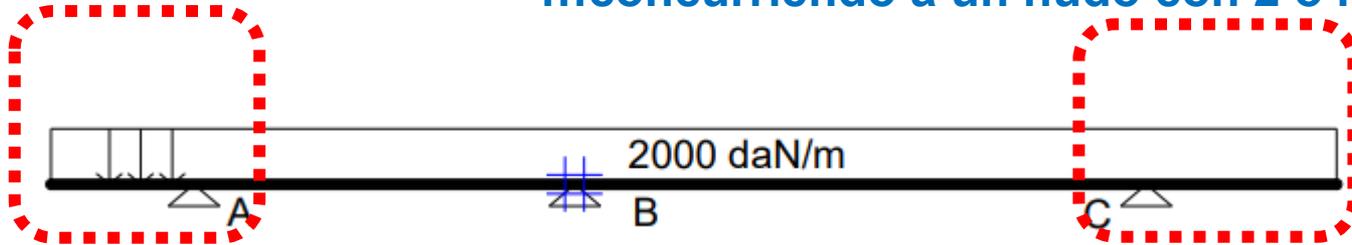
$$\alpha = 1; \beta = 0,5$$

CASOS PARTICULARES: barras que se prolongan en ménsula...

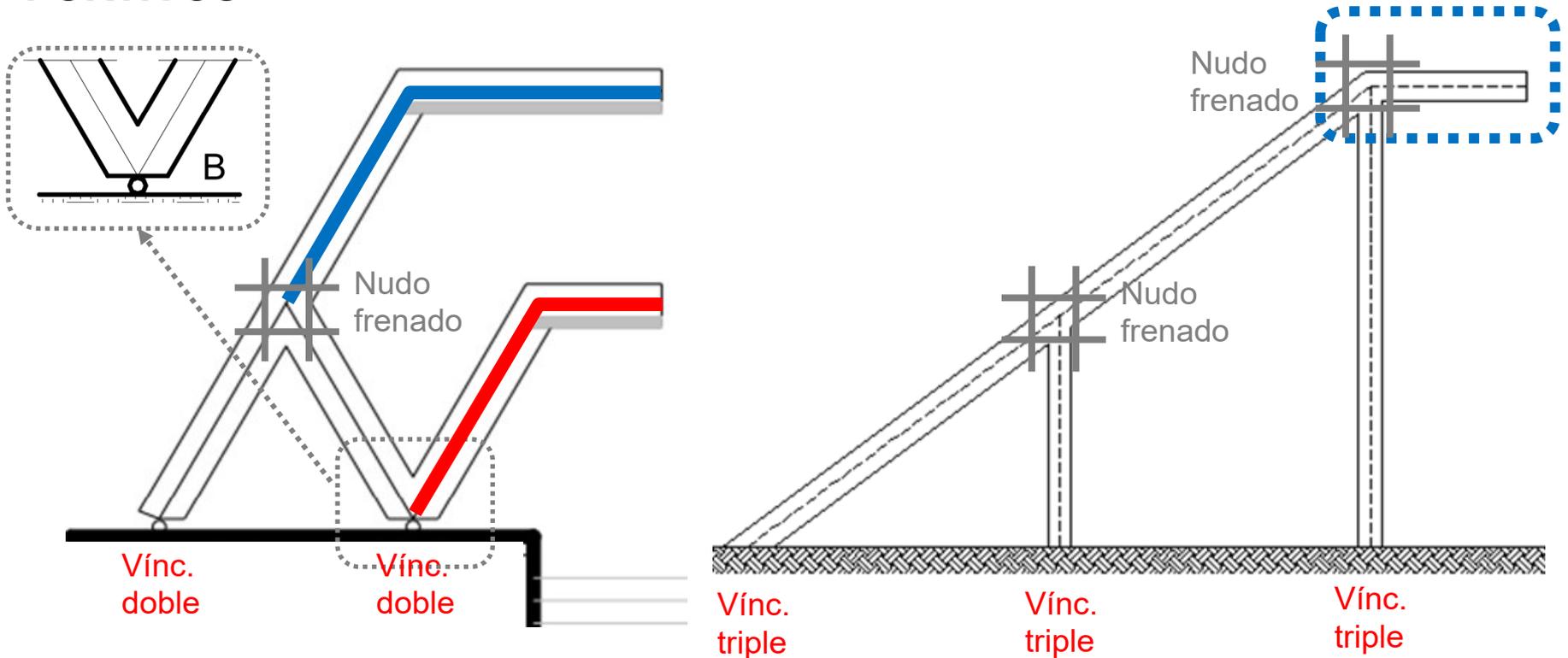
...después de apoyar en una articulación

...concurriendo a un nudo con 2 o más barras

VIGAS



PÓRTICOS



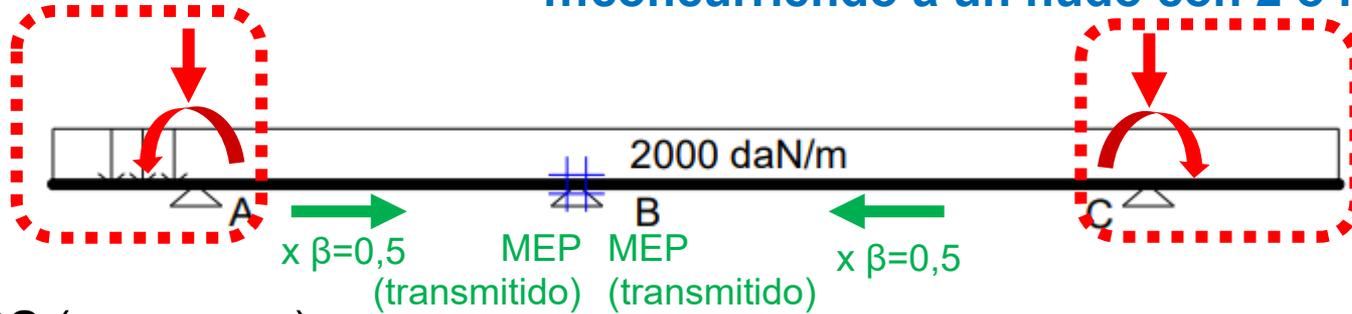
CASOS PARTICULARES: barras que se prolongan en ménsula...

...después de apoyar en una articulación

...concurriendo a un nudo con 2 o más barras

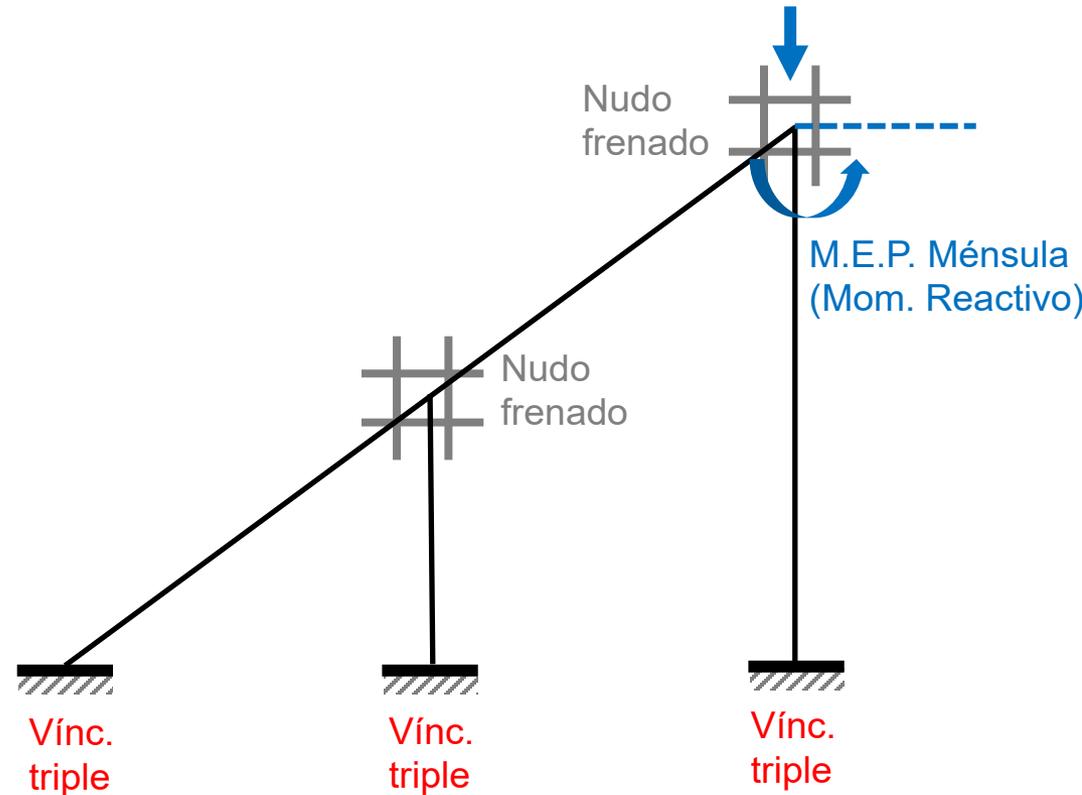
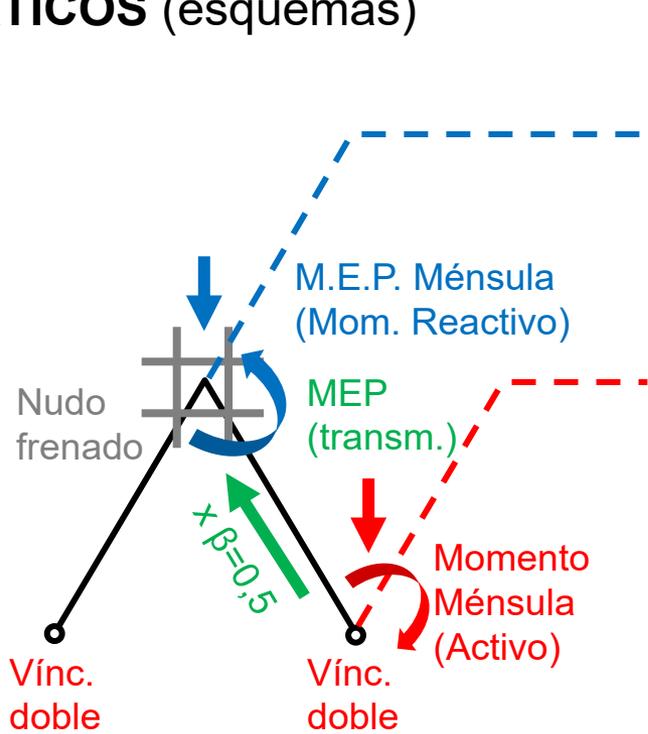
VIGAS

Momento Ménsula (Activo)



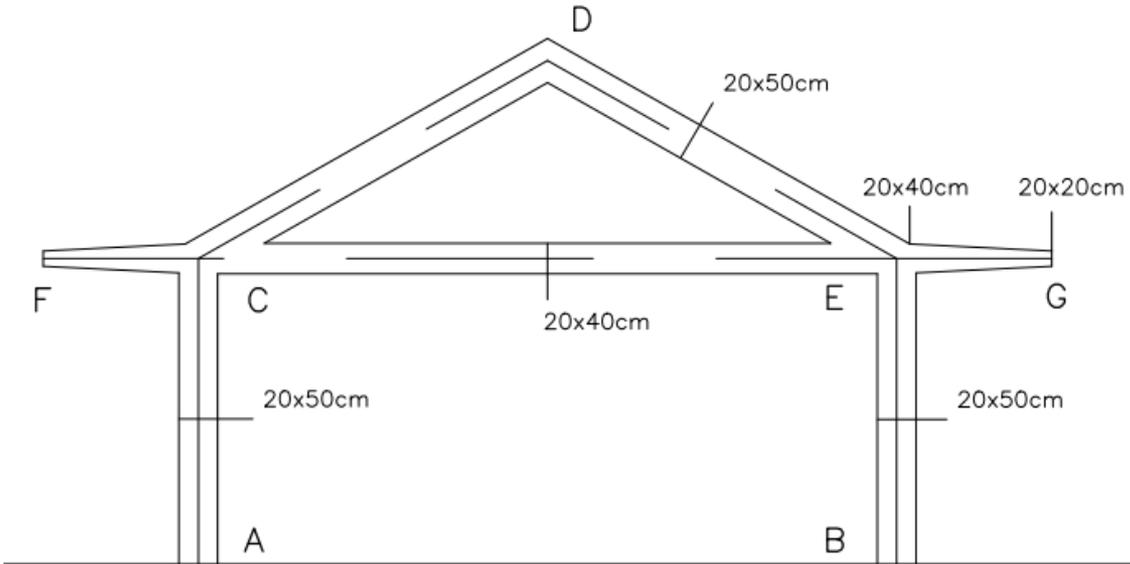
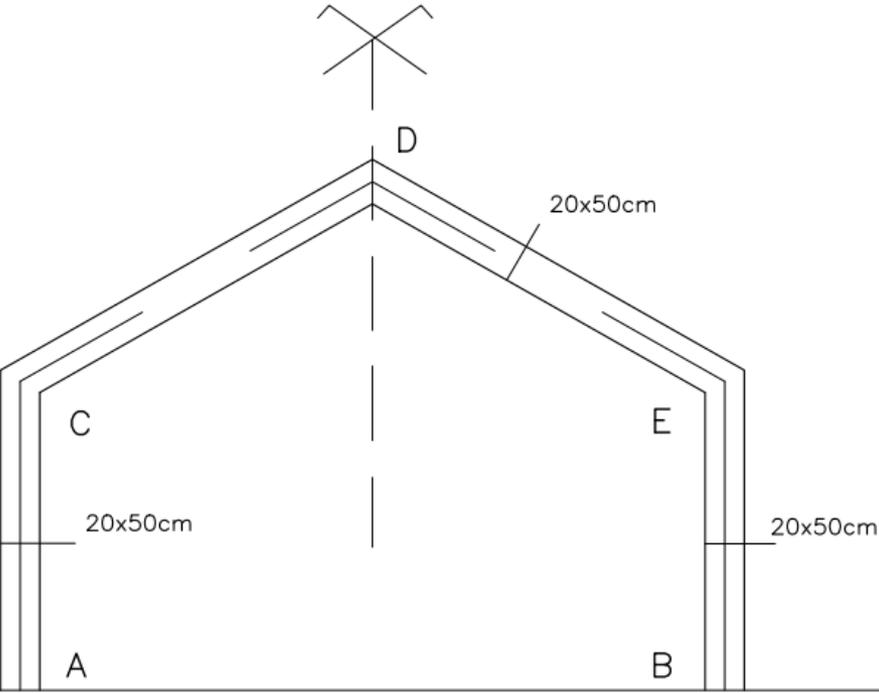
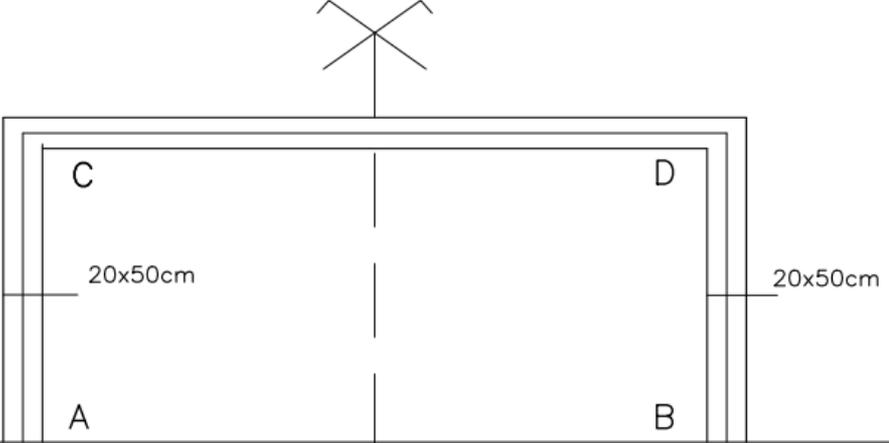
Momento Ménsula (Activo)

PÓRTICOS (esquemas)

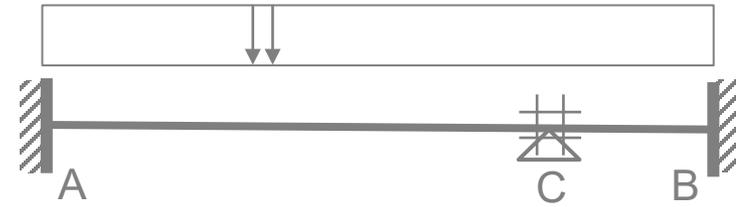


CASOS PARTICULARES: Casos de simetría por nudo y por barra

(se aplican los mismos criterios ya vistos en vigas)



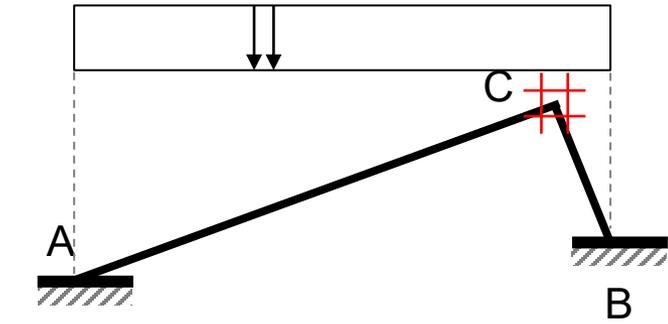
EJEMPLOS



Elementos horizontales,
cargas perpendiculares

VIGAS HIPERESTÁTICAS

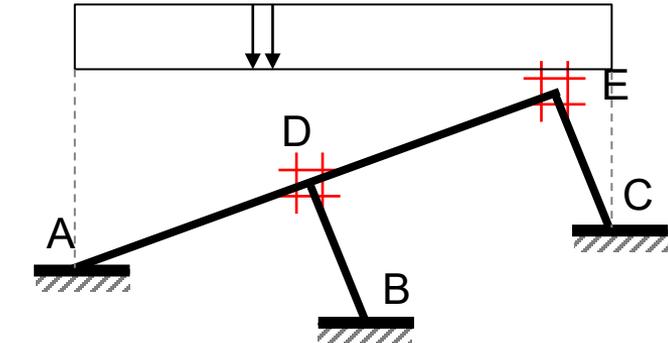
Flexión
Simple



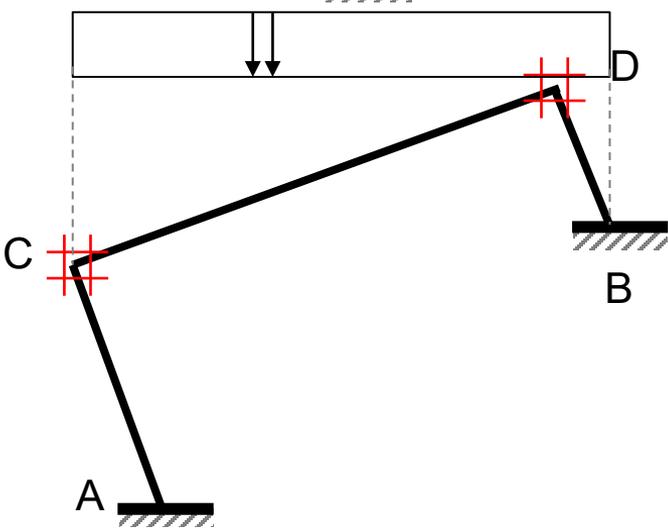
(tramo "quebrado")
Cargas
perpendiculares o
no al eje de la barra

PÓRTICOS HIPERESTÁTICOS

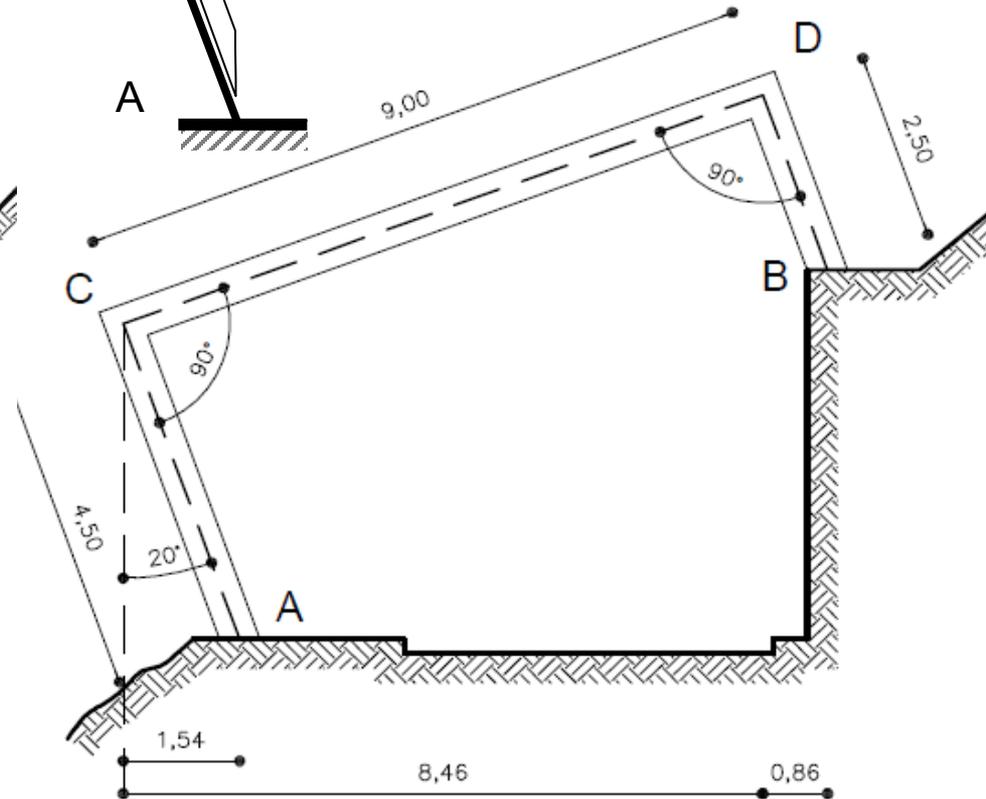
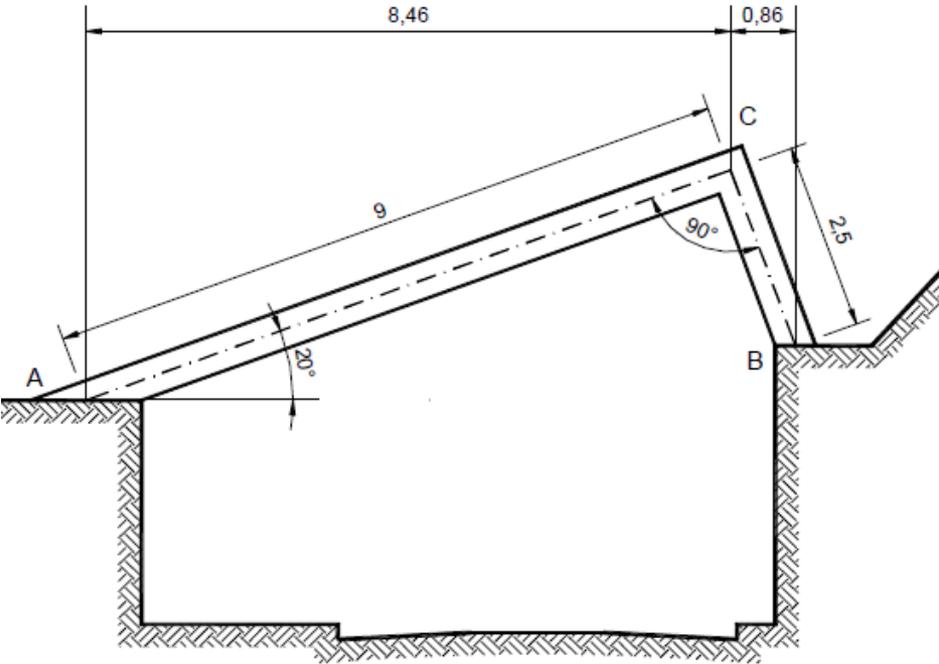
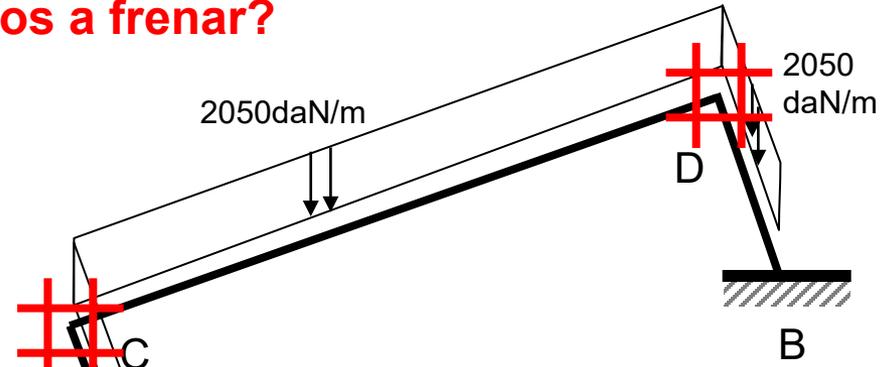
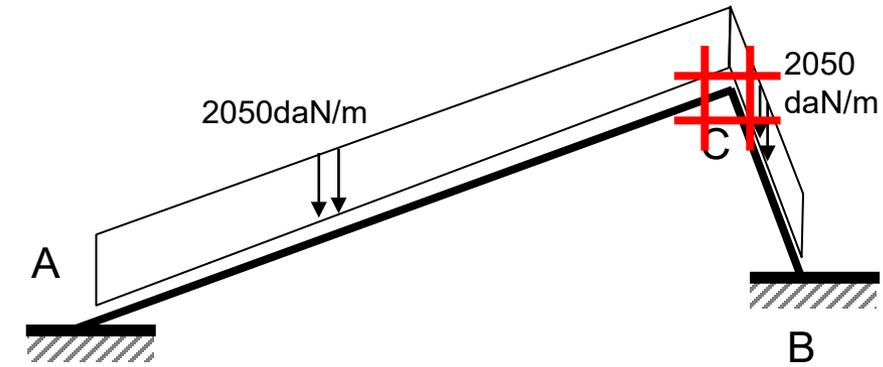
Flexión
Compuesta



Concurrencia de 2 o
más barras en un
mismo nudo



¿Cuáles son los nudos a frenar?



ETAPAS

1 Análisis de Rigidez de Barras

- Largo / Inercia
- Vínculos (α)
- Rigidez (κ)
- Rigidez Flexional ($\alpha\kappa$)
- Coef. Transmisión (β)
⇒ **Coef. Repartición (r_i)**

2 Momentos Empotramiento Perfecto (M.E.P.)

3 ARTIFICIO DE CROSS (equilibrio de los nudos)

Determinación de Momentos en los extremos de las barras

4 Descargas Barra por Barra (de fuerzas y momentos hacia los extremos de las barras)

5 Caminos Materiales (a los apoyos)

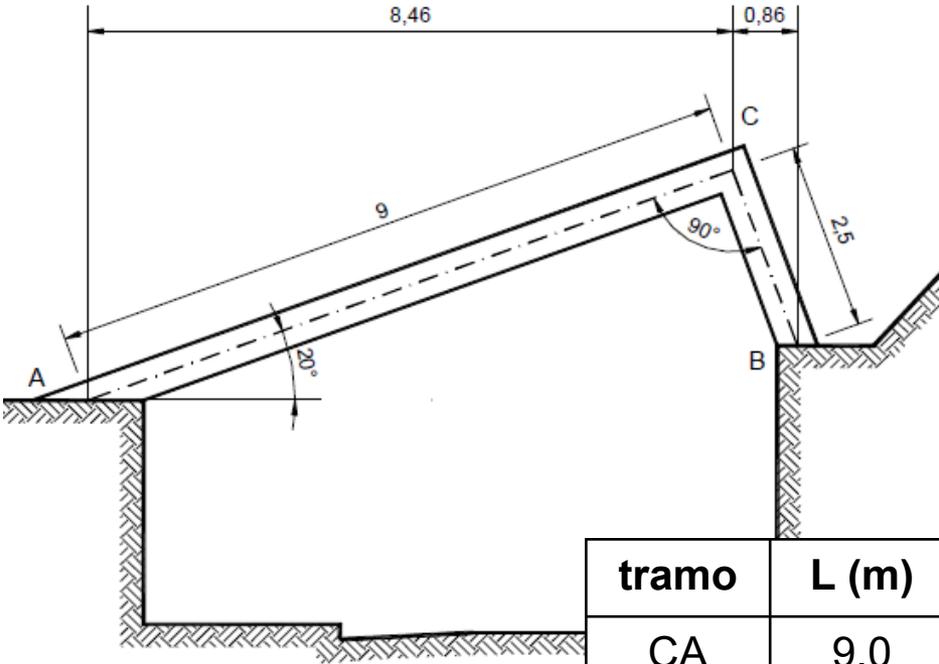
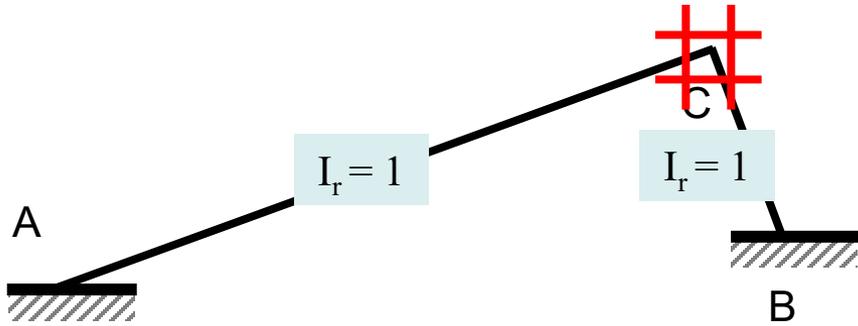
Nuevo!
(Pórticos Hiperestáticos)

6 Reacciones en apoyos y Equilibrio Global

7 Diagramas de Solicitaciones - Dimensionado

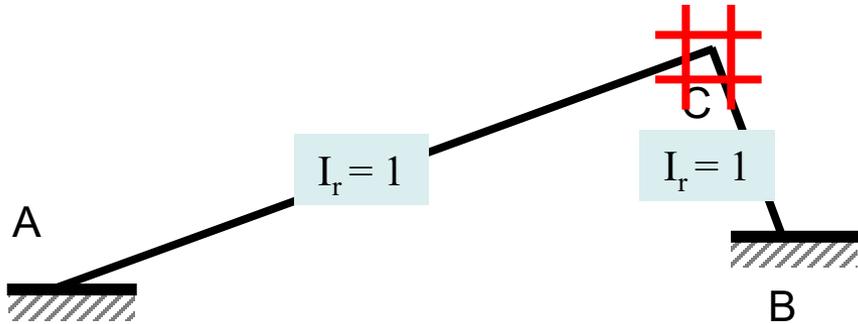
1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS

$$I_r = \frac{I_{\text{tramo}}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$



tramo	L (m)	I_r	K	α	αK	β
CA	9,0					
CB	2,50					

1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS

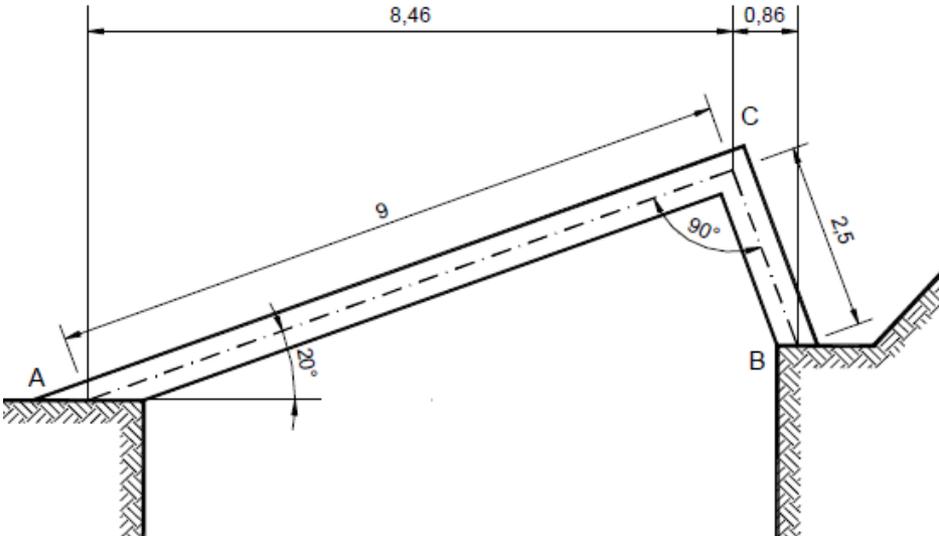


$$I_r = \frac{I_{\text{tramo}}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$

$$K = \frac{E \cdot I}{L}$$

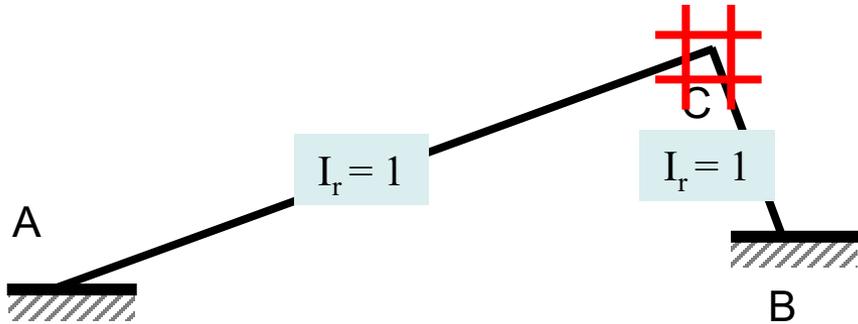
$$\cong K = \frac{I_r}{L}$$

RIGIDEZ



tramo	L (m)	I_r	K	α	αK	β
CA	9,0	1				
CB	2,50	1				

1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS

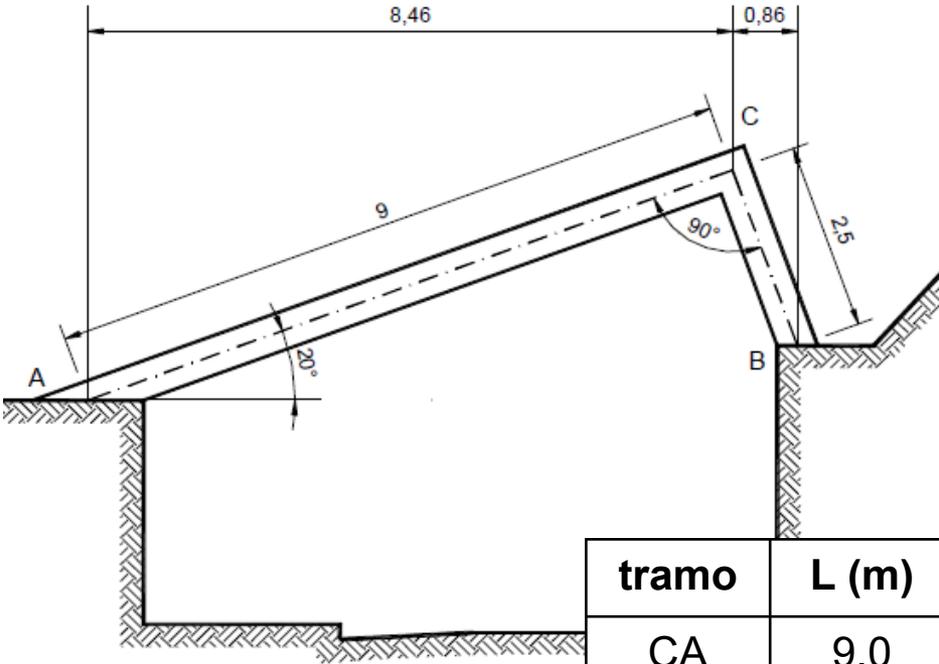


$$I_r = \frac{I_{\text{tramo}}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$

$$K = \frac{E \cdot I}{L}$$

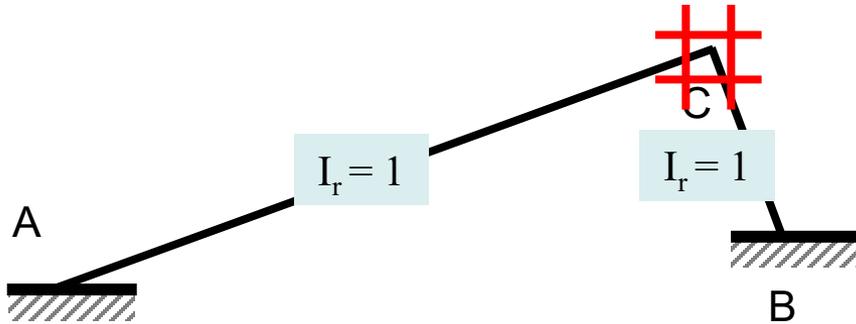
$$\cong K = \frac{I_r}{L}$$

RIGIDEZ



tramo	L (m)	I_r	K	α	αK	β
CA	9,0	1	0,111			
CB	2,50	1	0,400			

1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS



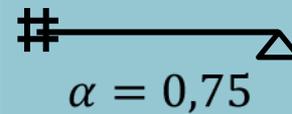
$$I_r = \frac{I_{\text{tramo}}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$

$$K = \frac{E \cdot I}{L}$$

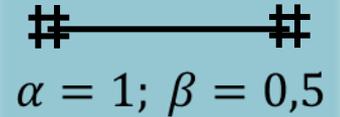
$$\cong K = \frac{I_r}{L}$$

RIGIDEZ

Para inercia cte.:

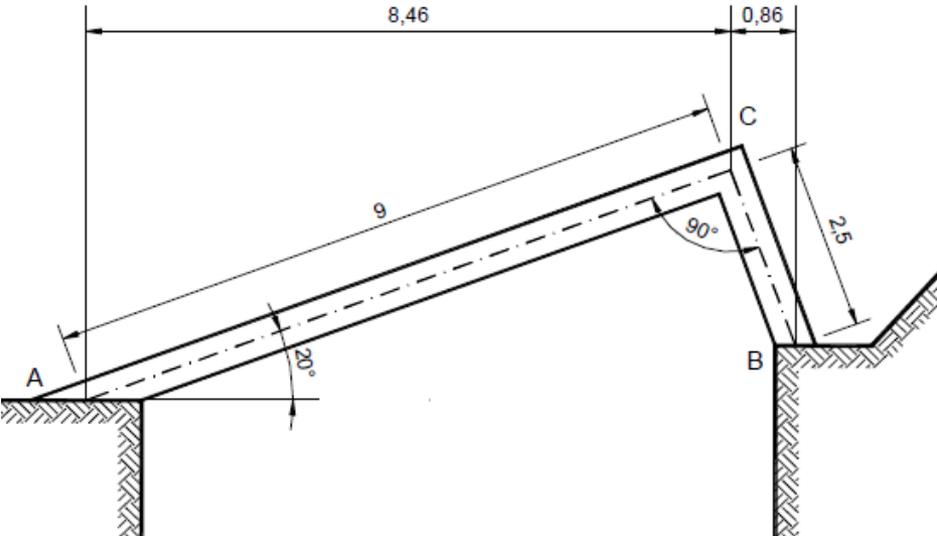


Para inercia cte.:



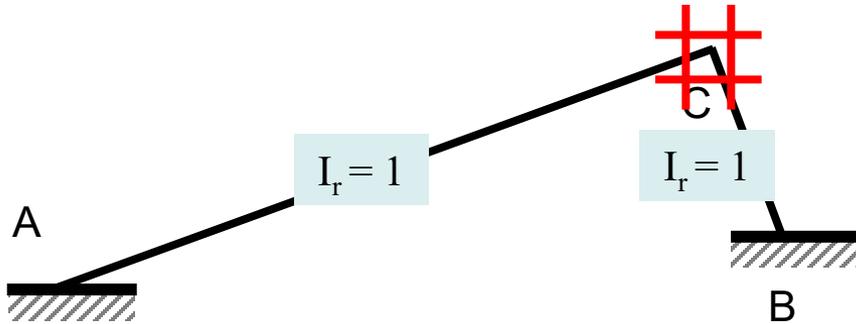
αK

RIGIDEZ FLEXIONAL



tramo	L (m)	I_r	K	α	αK	β
CA	9,0	1	0,111			
CB	2,50	1	0,400			

1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS



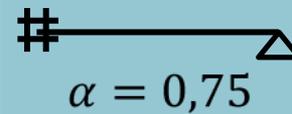
$$I_r = \frac{I_{\text{tramo}}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$

$$K = \frac{E \cdot I}{L}$$

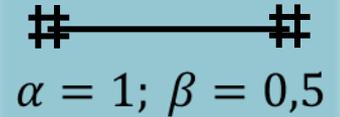
$$\cong K = \frac{I_r}{L}$$

RIGIDEZ

Para inercia cte.:

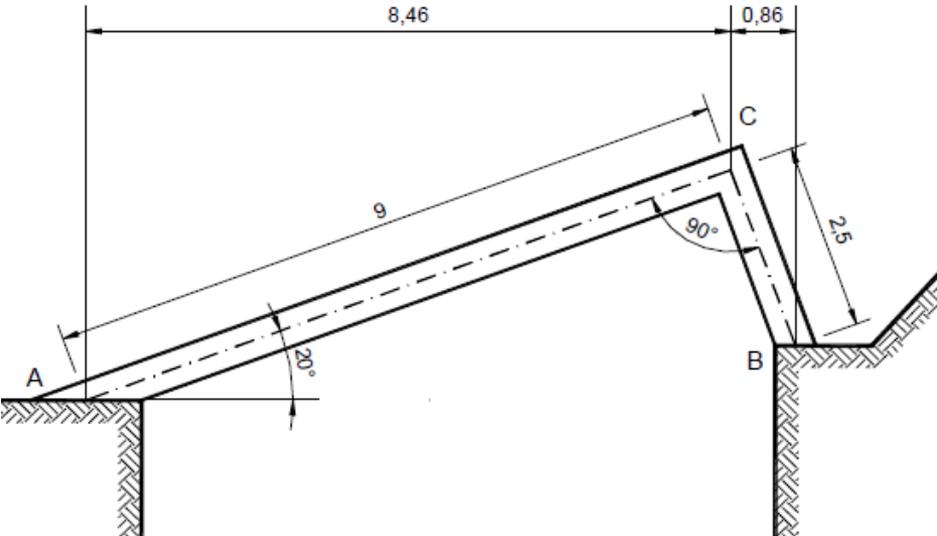


Para inercia cte.:



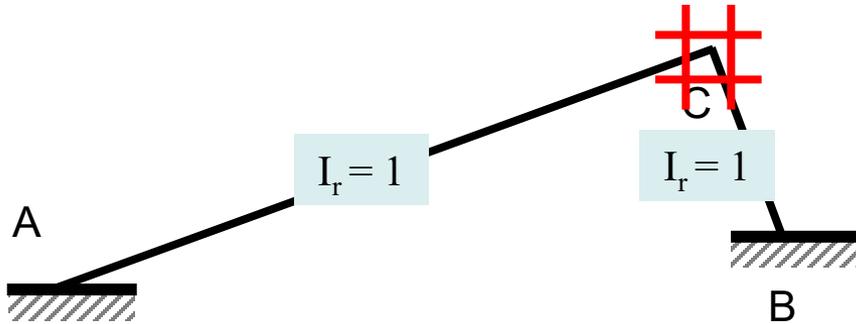
αK

RIGIDEZ FLEXIONAL



tramo	L (m)	I_r	K	α	αK	β
CA	9,0	1	0,111	1		0,5
CB	2,50	1	0,400	1		0,5

1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS



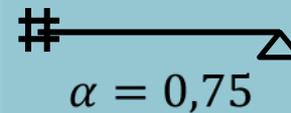
$$I_r = \frac{I_{\text{tramo}}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$

$$K = \frac{E \cdot I}{L}$$

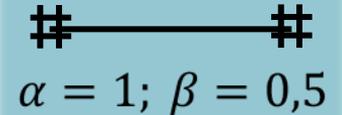
$$\cong K = \frac{I_r}{L}$$

RIGIDEZ

Para inercia cte.:

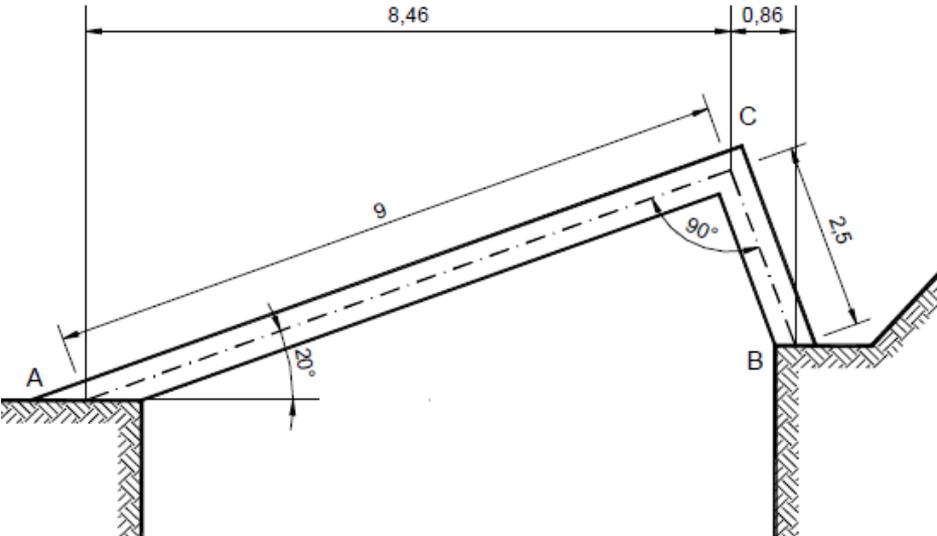


Para inercia cte.:



αK

RIGIDEZ FLEXIONAL

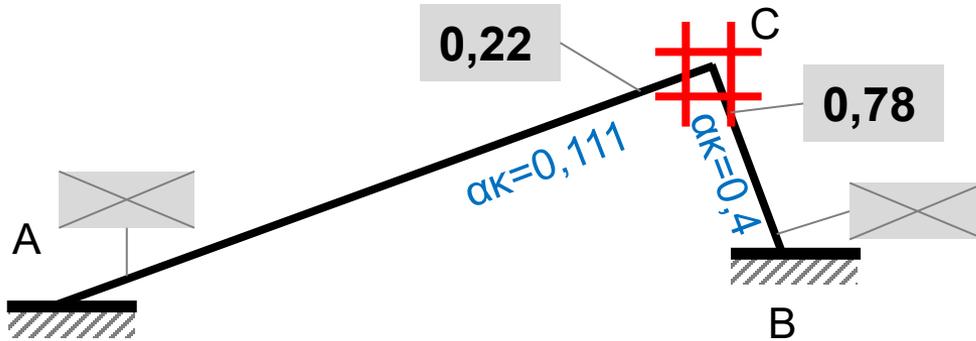


tramo	L (m)	I_r	K	α	αK	β
CA	9,0	1	0,111	1	0,111	0,5
CB	2,50	1	0,400	1	0,400	0,5

1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS

COEFICIENTES DE REPARTICIÓN

$$r_t = \frac{\alpha_t \cdot \kappa_t}{\sum \alpha_i \cdot \kappa_i}$$



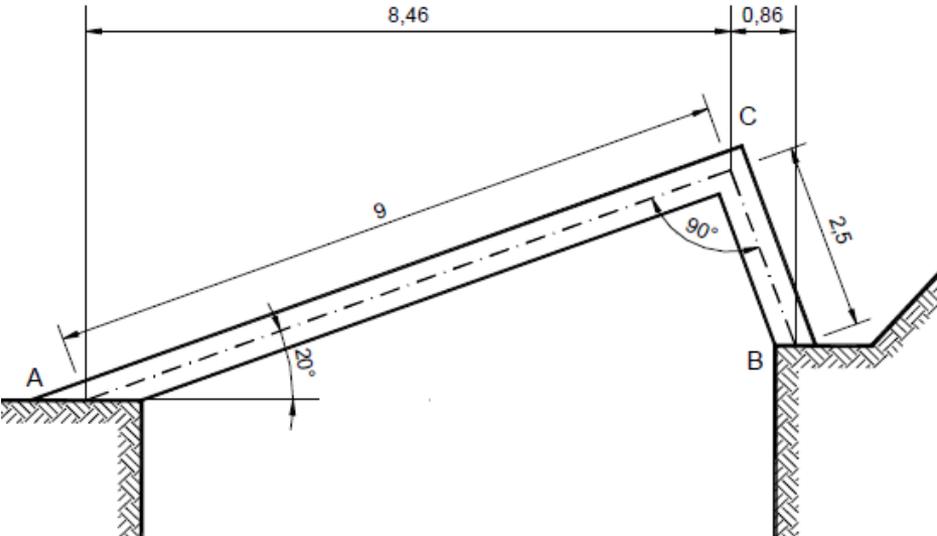
NUDO C

$$\sum \alpha \kappa = 0,111 + 0,400 = 0,511$$

$$r_{CA} = \frac{0,111}{0,511} = 0,22$$

$$r_{CB} = \frac{0,400}{0,511} = 0,78$$

Suman 1



tramo	L (m)	lr	K	α	$\alpha \kappa$	β
CA	9,0	1	0,111	1	0,111	0,5
CB	2,50	1	0,400	1	0,400	0,5

ETAPAS

1 Análisis de Rigidez de Barras

- Largo / Inercia
- Vínculos (α)
- Rigidez (κ)
- Rigidez Flexional ($\alpha\kappa$)
- Coef. Transmisión (β)
⇒ **Coef. Repartición (r_i)**

2 Momentos Empotramiento Perfecto (M.E.P.)

3 ARTIFICIO DE CROSS (equilibrio de los nudos)

Determinación de Momentos en los extremos de las barras

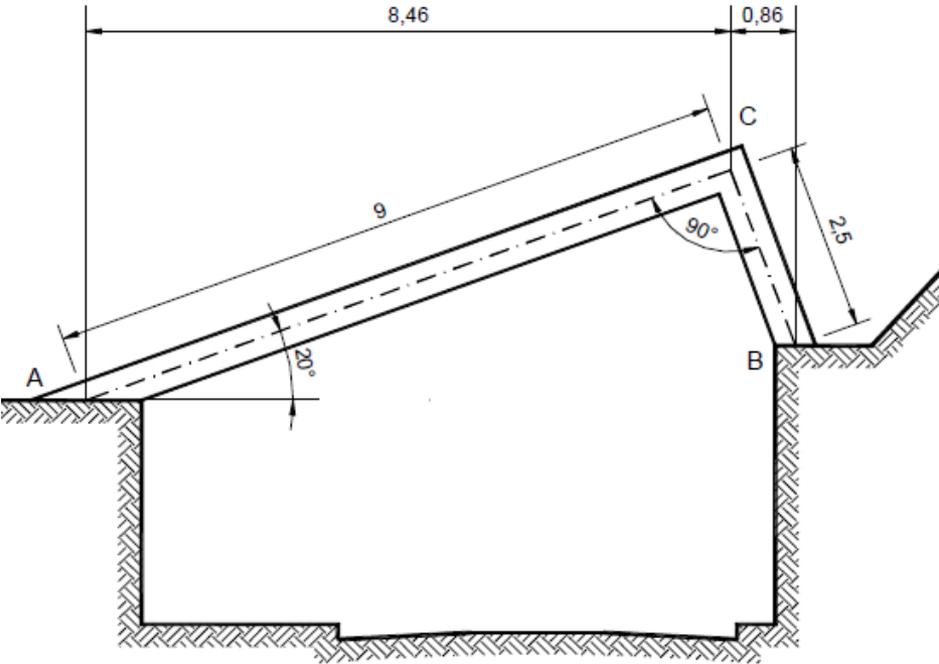
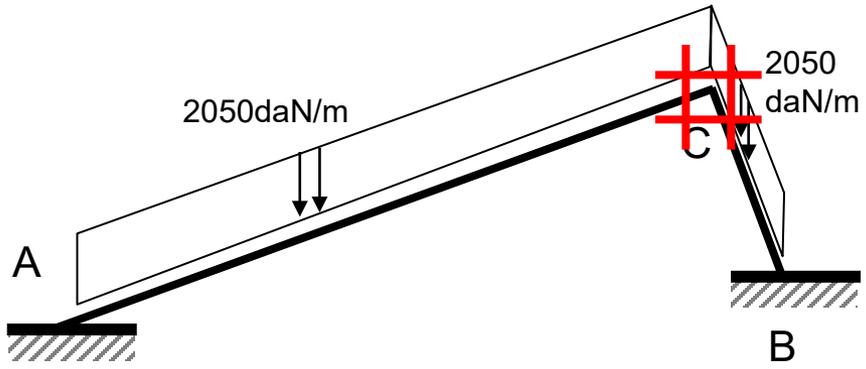
4 Descargas Barra por Barra (de fuerzas y momentos hacia los extremos de las barras)

5 Caminos Materiales (a los apoyos)

Nuevo!
(Pórticos Hiperestáticos)

6 Reacciones en apoyos y Equilibrio Global

7 Diagramas de Solicitaciones - Dimensionado



DETERMINACIÓN DEL VALOR DE LOS MOMENTOS DE FIJACIÓN

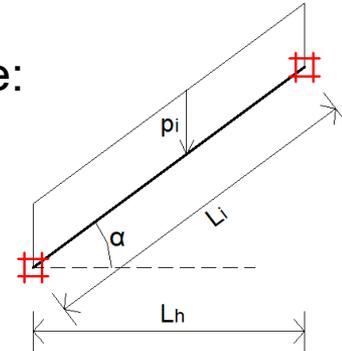
Tabla 6.1.1 - pág 53

REACCIONES Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PARA TRAMOS DE INERCIA CONSTANTE						
CARGAS	Reacciones		Momentos de Empotramiento		Momentos de Empotramiento	
	Ra	Rb	Ma	Mb	Ma	Mb
	$\frac{P \cdot b}{l}$	$\frac{P \cdot a}{l}$	$\frac{P \cdot a \cdot b}{2l^2} (l + b)$	$\frac{P \cdot a \cdot b}{2l^2} (l + a)$	$\frac{P \cdot a \cdot b}{l^2} b$	$\frac{P \cdot a \cdot b}{l^2} a$
	$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{3}{16} P l$	$\frac{3}{16} P l$	$\frac{1}{8} P l$	$\frac{1}{8} P l$
	P	P	$\frac{3}{2} P a (1 - \frac{a}{l})$	$\frac{3}{2} P a (1 - \frac{a}{l})$	$P a (1 - \frac{a}{l})$	$P a (1 - \frac{a}{l})$
	P	P	$\frac{1}{3} P l$	$\frac{1}{3} P l$	$\frac{2}{9} P l$	$\frac{2}{9} P l$
	1.5 P	1.5 P	$\frac{15}{32} P l$	$\frac{15}{32} P l$	$\frac{5}{16} P l$	$\frac{5}{16} P l$
	$\frac{p \cdot l}{2}$	$\frac{p \cdot l}{2}$	$\frac{1}{8} p l^2$	$\frac{1}{8} p l^2$	$\frac{1}{12} p l^2$	$\frac{1}{12} p l^2$
	$\frac{p \cdot a}{l} (b + \frac{a}{2})$	$\frac{p \cdot a^2}{2l}$	$\frac{p \cdot a^2}{8} (2 - \frac{a}{l})^2$	$\frac{p \cdot a^2}{8} (2 - \frac{a}{l})^2$	$\frac{p \cdot a^2}{12} (6 - 8 \frac{a}{l} + 3 \frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p \cdot a^2}{12} (4 - 3 \frac{a^2}{l^2})$
	$\frac{3}{8} p l$	$\frac{1}{8} p l$	$\frac{9}{128} p l^2$	$\frac{7}{128} p l^2$	$\frac{11}{192} p l^2$	$\frac{5}{192} p l^2$
	p a	p a	$\frac{p a^2}{4} (3 - 2 \frac{a}{l})$	$\frac{p a^2}{4} (3 - 2 \frac{a}{l})$	$\frac{p a^2}{6} (3 - 2 \frac{a}{l})$	$\frac{p a^2}{6} (3 - 2 \frac{a}{l})$
	$\frac{p c b}{l}$	$\frac{p c a}{l}$	$\frac{p a b c}{2l^2} (l + b - \frac{c}{4a})$	$\frac{p a b c}{2l^2} (l + a - \frac{c}{4b})$	$\frac{p c}{l^2} [a b^2 + \frac{c^2}{12} (l - 3b)]$	$\frac{p c}{l^2} [a^2 b + \frac{c^2}{12} (l - 3a)]$
	$\frac{p a}{2}$	$\frac{p a}{2}$	$\frac{p l a}{16} (3 - \frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p l a}{16} (3 - \frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p l a}{24} (3 - \frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p l a}{24} (3 - \frac{a^2}{l^2})$
	$\frac{p a}{2} (1 - \frac{2a}{3l})$	$\frac{p a^2}{3l}$	$\frac{p a^2}{120} (40 - 45 \frac{a}{l} + 12 \frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p a^2}{60} (10 - 6 \frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p a^2}{30} (10 - 15 \frac{a}{l} + 6 \frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p a^2}{20} (5 \frac{a}{l} - 4 \frac{a^2}{l^2})$
	$\frac{p l}{6}$	$\frac{p l}{3}$	$\frac{7}{120} p l^2$	$\frac{1}{15} p l^2$	$\frac{1}{30} p l^2$	$\frac{1}{20} p l^2$
	$\frac{p l}{4}$	$\frac{p l}{4}$	$\frac{5}{64} p l^2$	$\frac{5}{64} p l^2$	$\frac{5}{96} p l^2$	$\frac{5}{96} p l^2$
	$\frac{p a}{2} (1 - \frac{2a}{6l})$	$\frac{p a^2}{6l}$	$\frac{p a^2}{120} (20 - 15 \frac{a}{l} + 3 \frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p a^2}{120} (10 - 3 \frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p a^2}{60} (10 - 10 \frac{a}{l} + 3 \frac{a^2}{l^2})$	$\frac{p a^2}{60} (5 \frac{a}{l} - 3 \frac{a^2}{l^2})$
	$\frac{p l}{3}$	$\frac{p l}{3}$	$\frac{1}{10} p l^2$	$\frac{1}{10} p l^2$	$\frac{1}{15} p l^2$	$\frac{1}{15} p l^2$
	$\frac{p l - a}{2}$	$\frac{p l - a}{2}$	$\frac{p l}{64} (l + b) (5 - \frac{b^2}{l^2})$	$\frac{p l}{64} (l + b) (5 - \frac{b^2}{l^2})$	$\frac{p l}{64} (l + b) (5 - \frac{b^2}{l^2})$	$\frac{p l}{64} (l + b) (5 - \frac{b^2}{l^2})$
	$\frac{m}{l}$	$\frac{m}{l}$	$\frac{m}{2} (1 - 3 \frac{a^2}{l^2})$	$\frac{m}{2} (1 - 3 \frac{a^2}{l^2})$	$\frac{m b}{l} (2 - 3 \frac{b}{l})$	$\frac{m a}{l} (2 - 3 \frac{a}{l})$

(cargas transversales con dirección perpendicular al eje del tramo)

La estructura tiene:

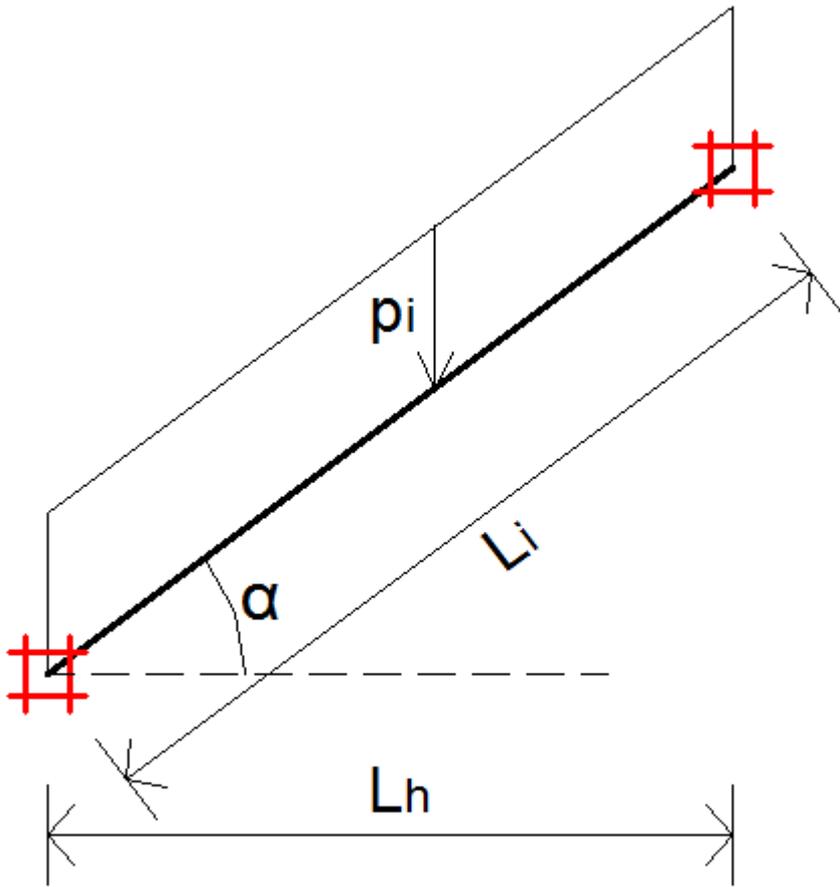
- barras oblicuas
- c/cargas gravitatorias (verticales)



descomponer la CARGA en:

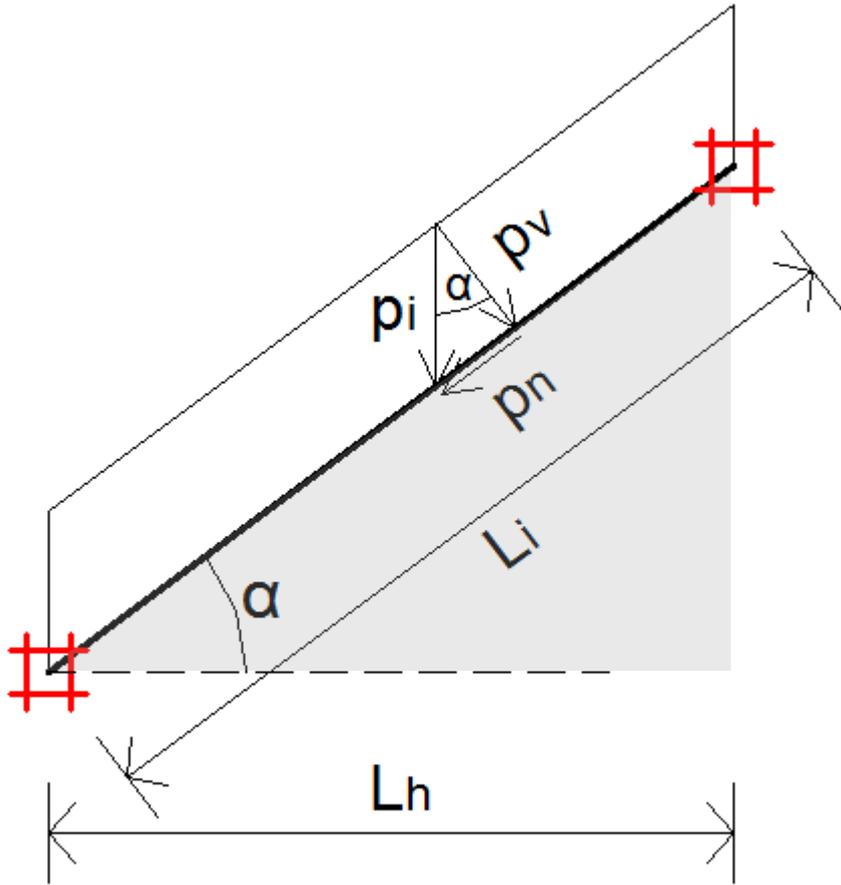
- componente perpendicular al eje de la barra (p_V)
- componente en la misma dirección del eje (p_N)

Determinación de momentos de fijación en tramos oblicuos con cargas verticales:

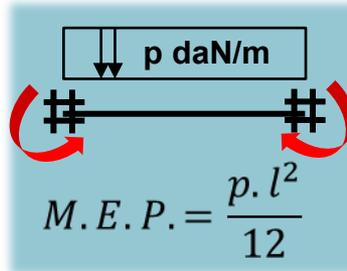
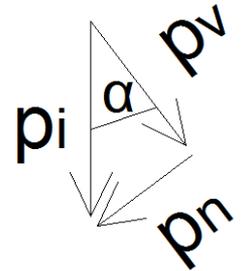


2. M.E.P.

Determinación de momentos de fijación en tramos oblicuos con cargas verticales:



Se hallan las componentes de la carga (p_i) según la dirección:
✓ perpendicular al tramo (p_v)
✓ paralela al tramo (p_n)



$$p_n = p_i \cdot \sin \alpha$$

$$p_v = p_i \cdot \cos \alpha$$

$$MEP = \frac{p_v \cdot L_i^2}{12}$$

$$MEP = \frac{(p_i \cdot \cos \alpha) \cdot L_i^2}{12}$$

$$MEP = \frac{p_i \cdot \cos \alpha \cdot L_i \cdot L_i}{12}$$

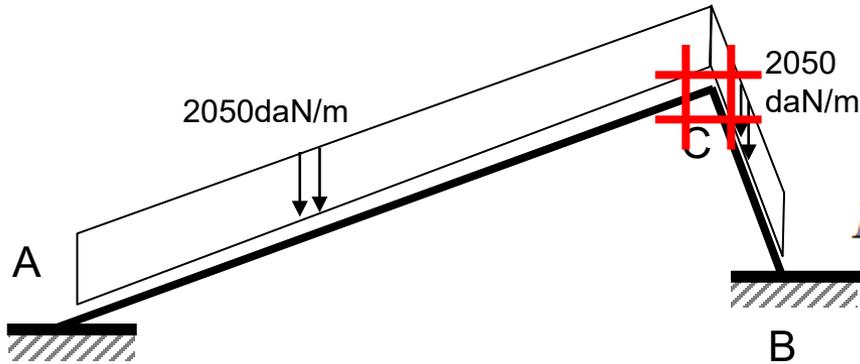
$$\cos \alpha = \frac{L_h}{L_i}$$
$$\cos \alpha \cdot L_i = L_h$$

Utilizando los datos de la estructura sin descomponer fuerzas

$$MEP = \frac{p_i \cdot L_h \cdot L_i}{12}$$

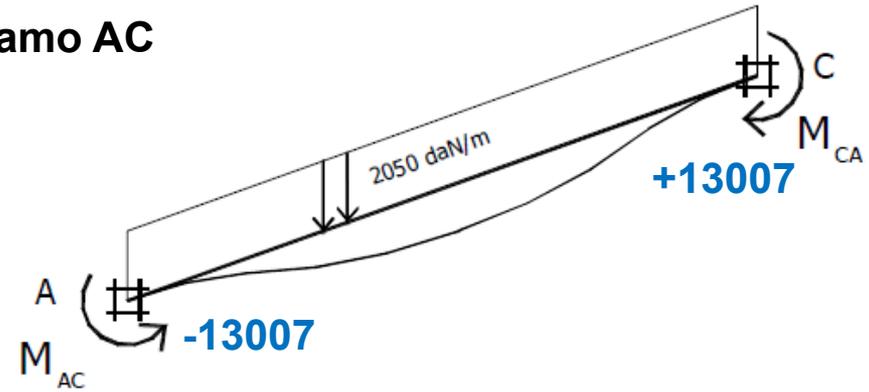
2. M.E.P.

$$MEP = \frac{p_i \cdot L_h \cdot L_i}{12}$$



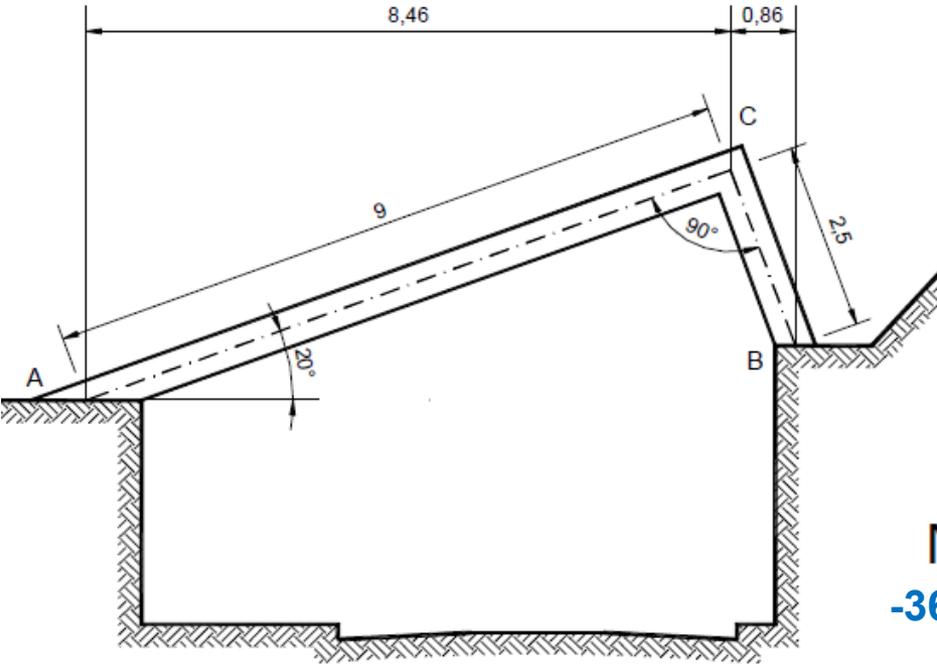
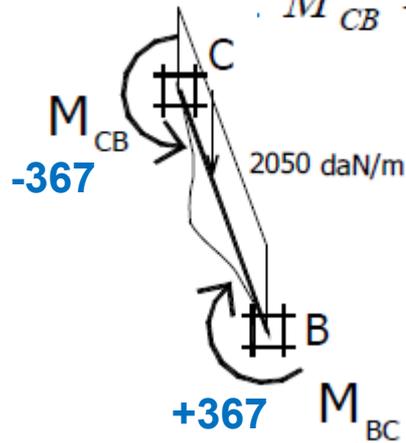
$$M_{AC} = M_{CA} = \frac{2050 \cdot 8,46 \cdot 9,00}{12} = 13007 \text{ daN.m}$$

Tramo AC



Tramo CB

$$M_{CB} = M_{BC} = \frac{2050 \cdot 0,86 \cdot 2,50}{12} = 367 \text{ daN.m}$$



ETAPAS

1 Análisis de Rigidez de Barras

- Largo / Inercia
 - Vínculos (α)
 - Rigidez (κ)
 - Rigidez Flexional ($\alpha\kappa$)
 - Coef. Transmisión (β)
- ⇒ **Coef. Repartición (r_i)**

2 Momentos Empotramiento Perfecto (M.E.P.)

3 ARTIFICIO DE CROSS (equilibrio de los nudos)

Determinación de Momentos en los extremos de las barras

4 Descargas Barra por Barra (de fuerzas y momentos hacia los extremos de las barras)

5 Caminos Materiales (a los apoyos)

Nuevo!
(Pórticos Hiperestáticos)

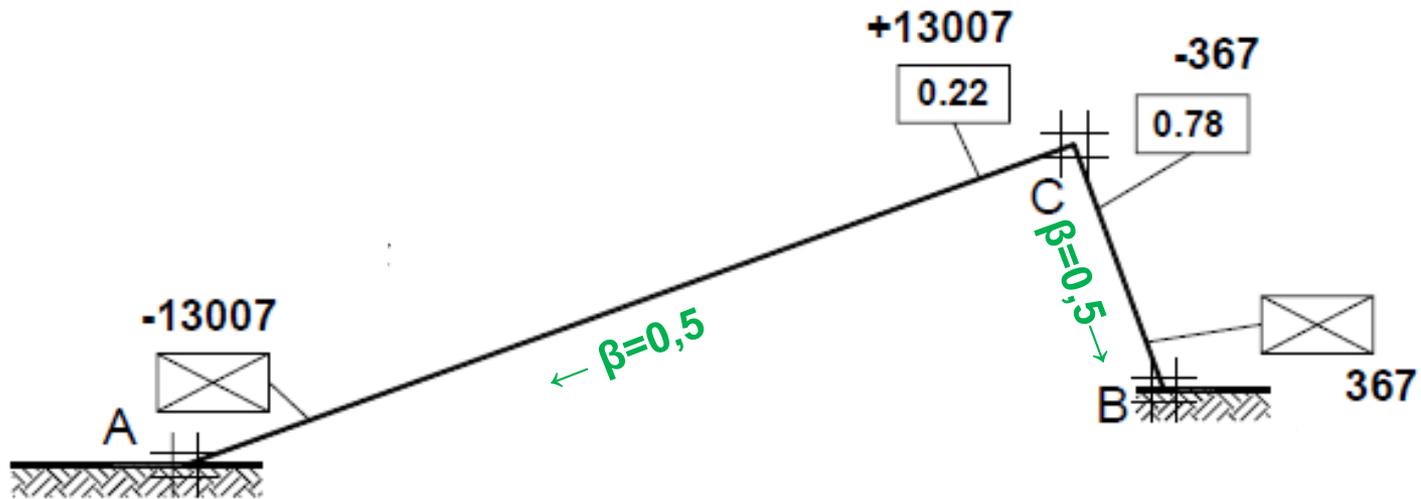
6 Reacciones en apoyos y Equilibrio Global

7 Diagramas de Solicitaciones - Dimensionado

3. CROSS

$$\sum M_C = +13007 - 367 = +12640$$

$$-\sum M_C = -12640 \quad \begin{array}{l} \times 0,22 = -2781 \\ \times 0,78 = -9859 \end{array}$$



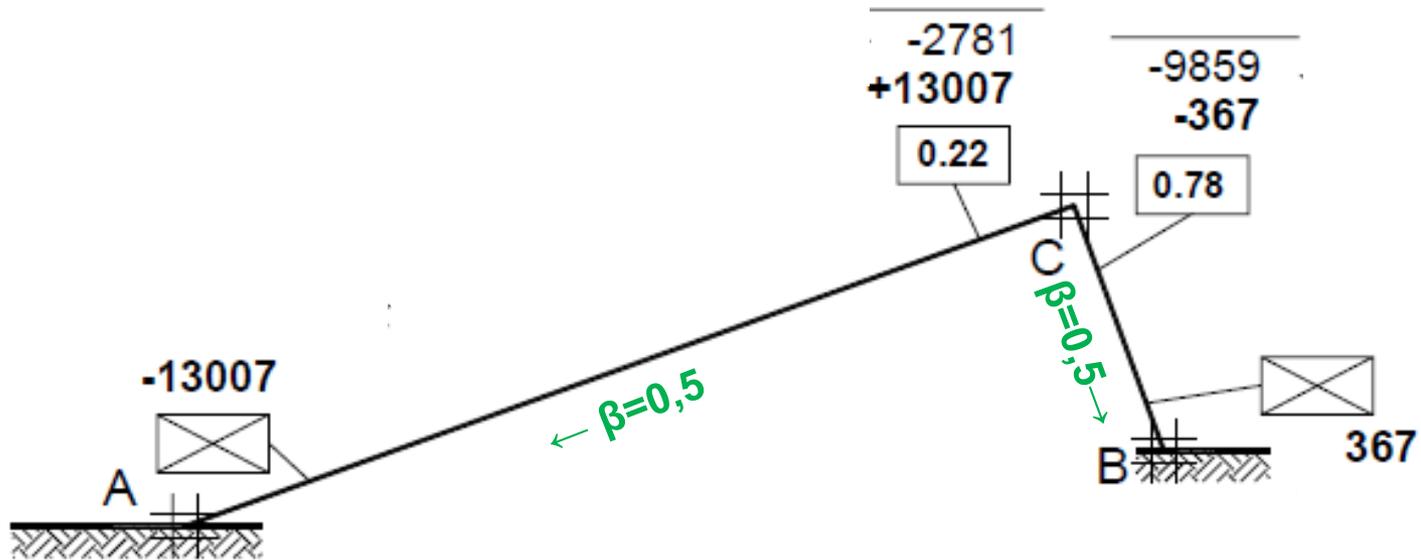
3. CROSS

$$\sum M_C = +13007 - 367 = +12640$$

$\beta=0,5$

$$-\sum M_C = -12640 \quad \begin{array}{l} \times 0,22 = -2781 \\ \times 0,78 = -9859 \end{array}$$

$$\times 0,5 = -1390$$

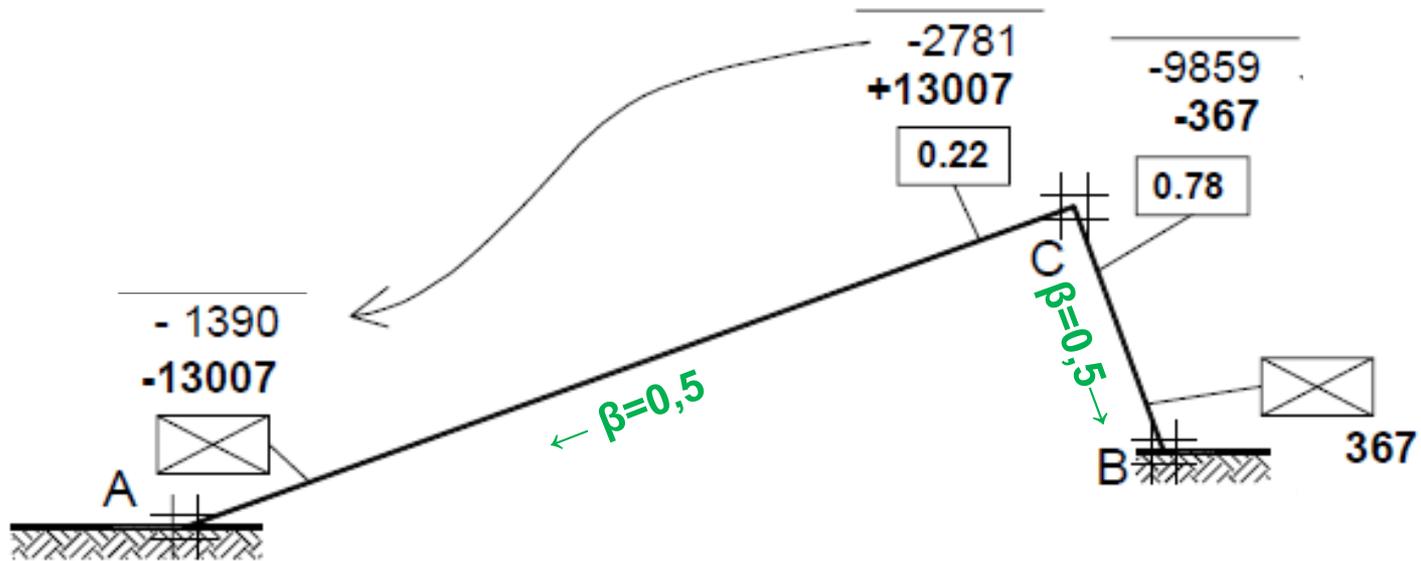


3. CROSS

$$\sum M_C = +13007 - 367 = +12640$$

$\beta=0,5$

$$-\sum M_C = -12640 \quad \begin{matrix} \times 0,22 = -2781 & \times 0,5 = -1390 \\ \times 0,78 = -9859 & \times 0,5 = -4930 \end{matrix}$$



3. CROSS

$$\sum M_C = +13007 - 367 = +12640$$

$\beta=0,5$

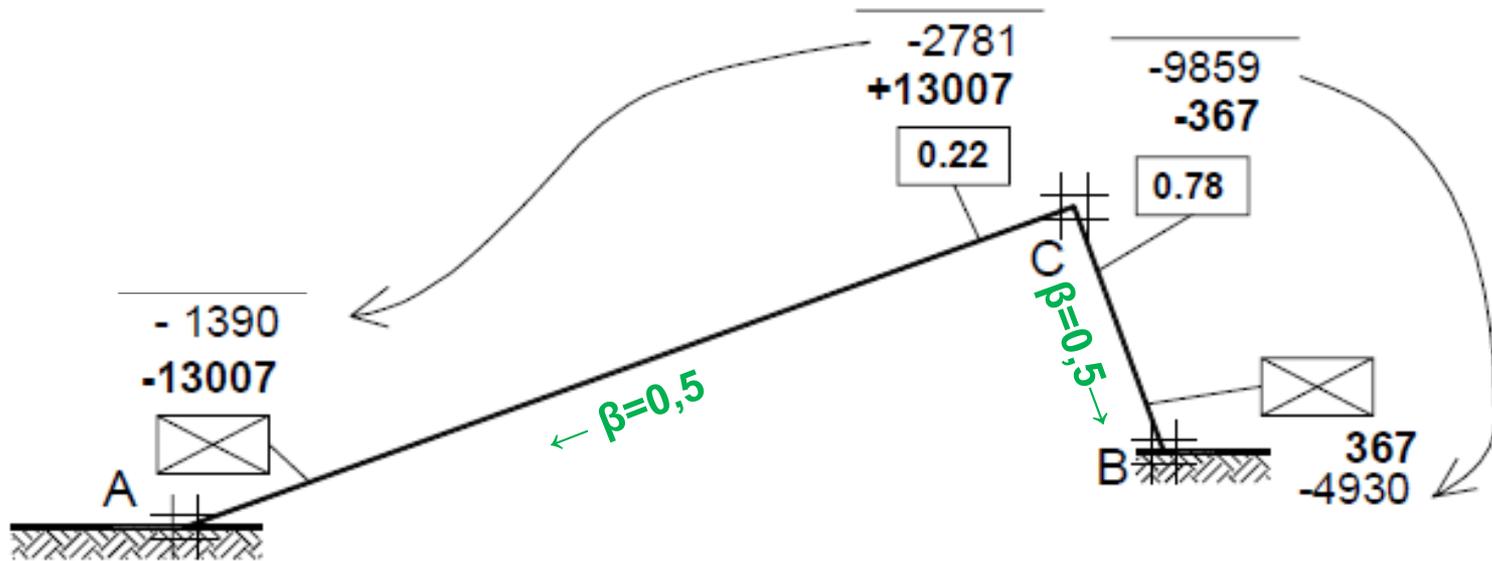
$$-\sum M_C = -12640$$

$$\times 0,22 = -2781$$

$$\times 0,5 = -1390$$

$$\times 0,78 = -9859$$

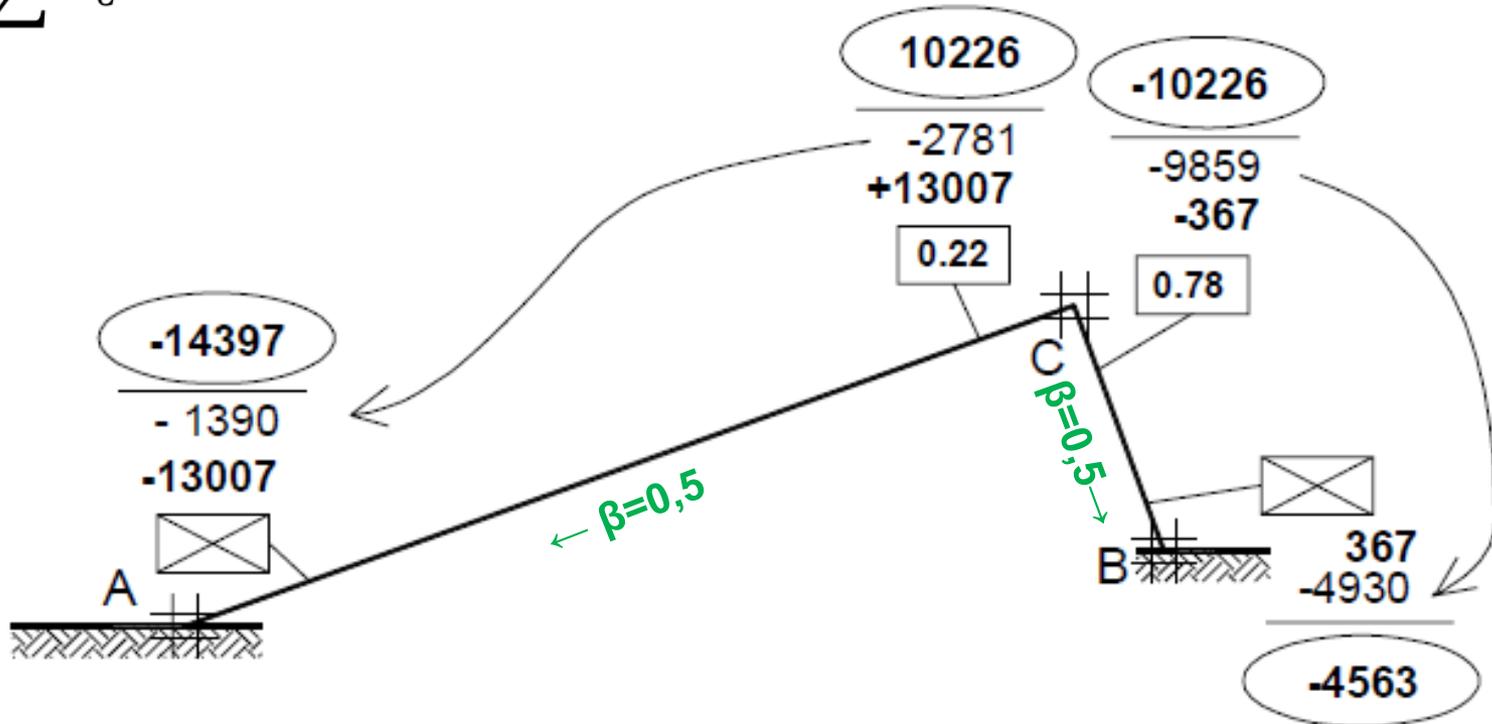
$$\times 0,5 = -4930$$



3. CROSS

Los momentos obtenidos por Cross, son momentos reactivos

$$\sum M_C = 0$$



ETAPAS

1 Análisis de Rigidez de Barras

- Largo / Inercia
 - Vínculos (α)
 - Rigidez (κ)
 - Rigidez Flexional ($\alpha\kappa$)
 - Coef. Transmisión (β)
- ⇒ **Coef. Repartición (r_i)**

2 Momentos Empotramiento Perfecto (M.E.P.)

3 ARTIFICIO DE CROSS (equilibrio de los nudos)

Determinación de Momentos en los extremos de las barras

4 Descargas Barra por Barra (de fuerzas y momentos hacia los extremos de las barras)

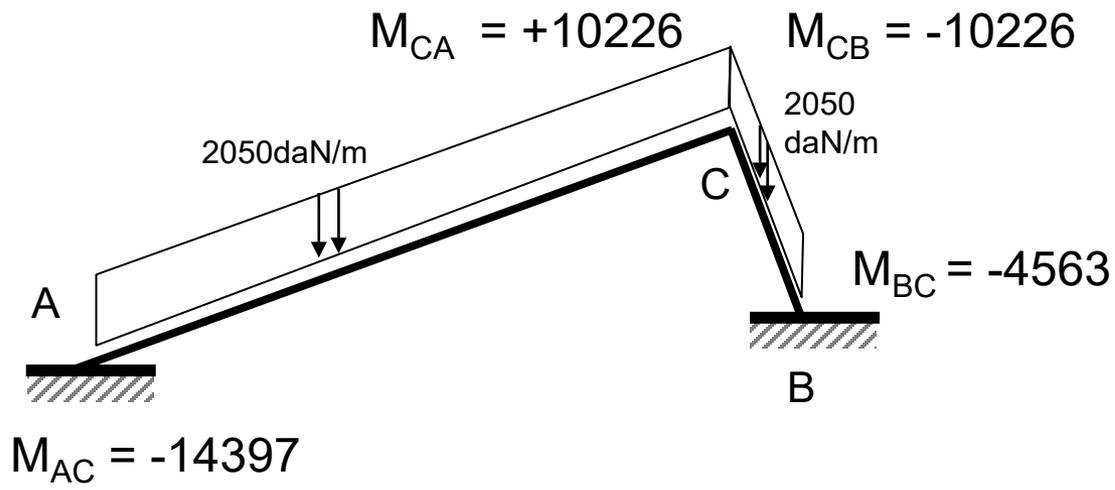
5 Caminos Materiales (a los apoyos)

Nuevo!
(Pórticos Hiperestáticos)

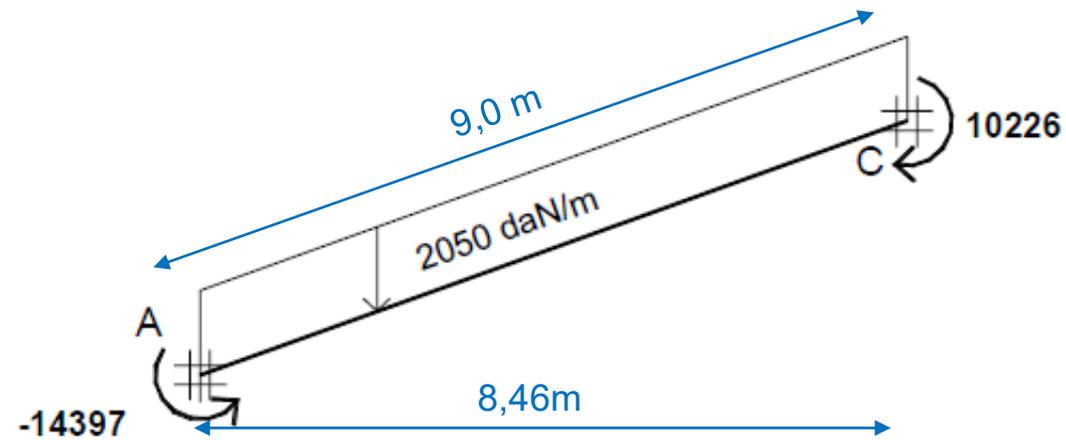
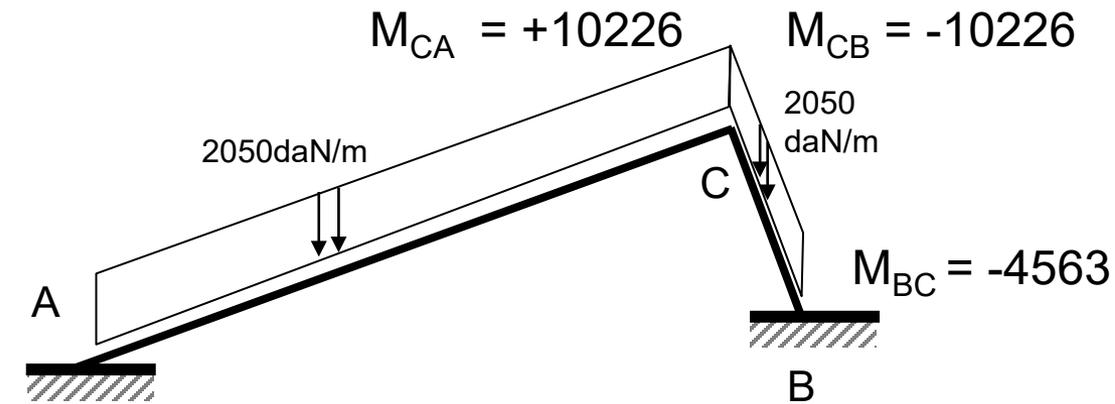
6 Reacciones en apoyos y Equilibrio Global

7 Diagramas de Solicitaciones - Dimensionado

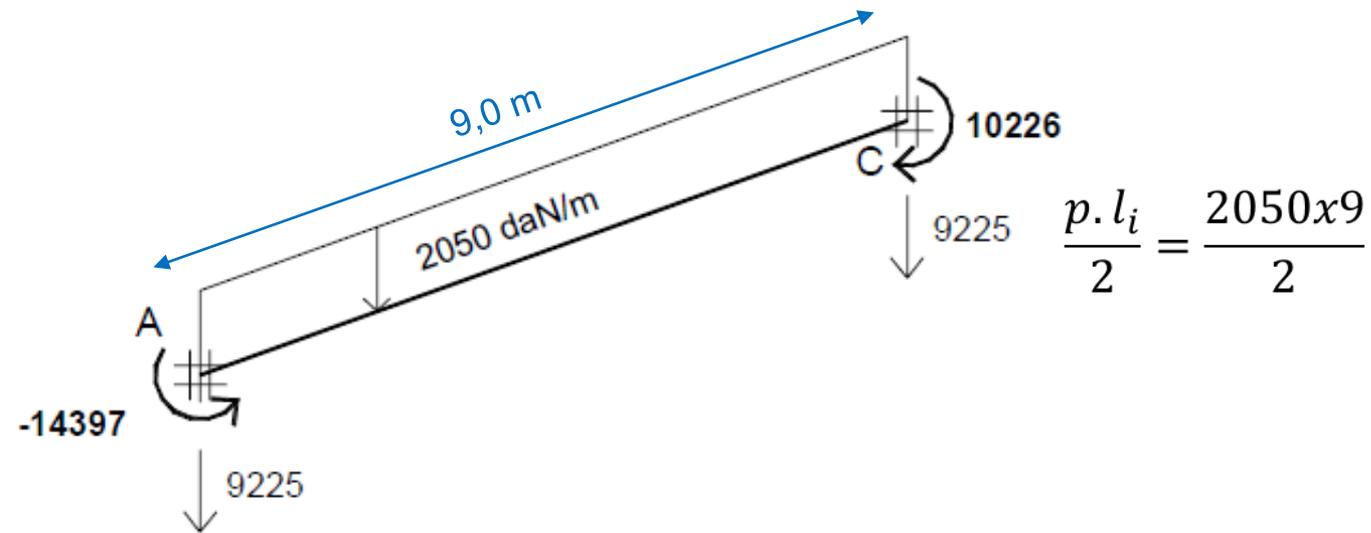
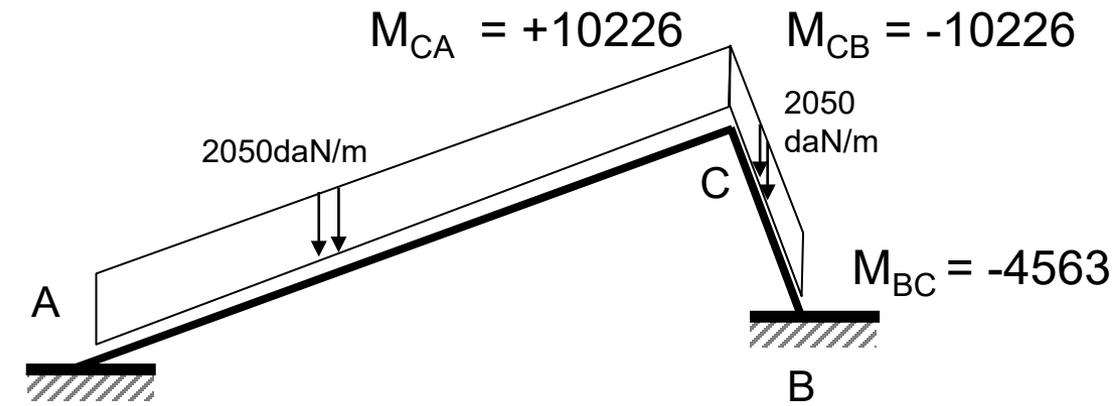
4. DESCARGAS BARRA por BARRA



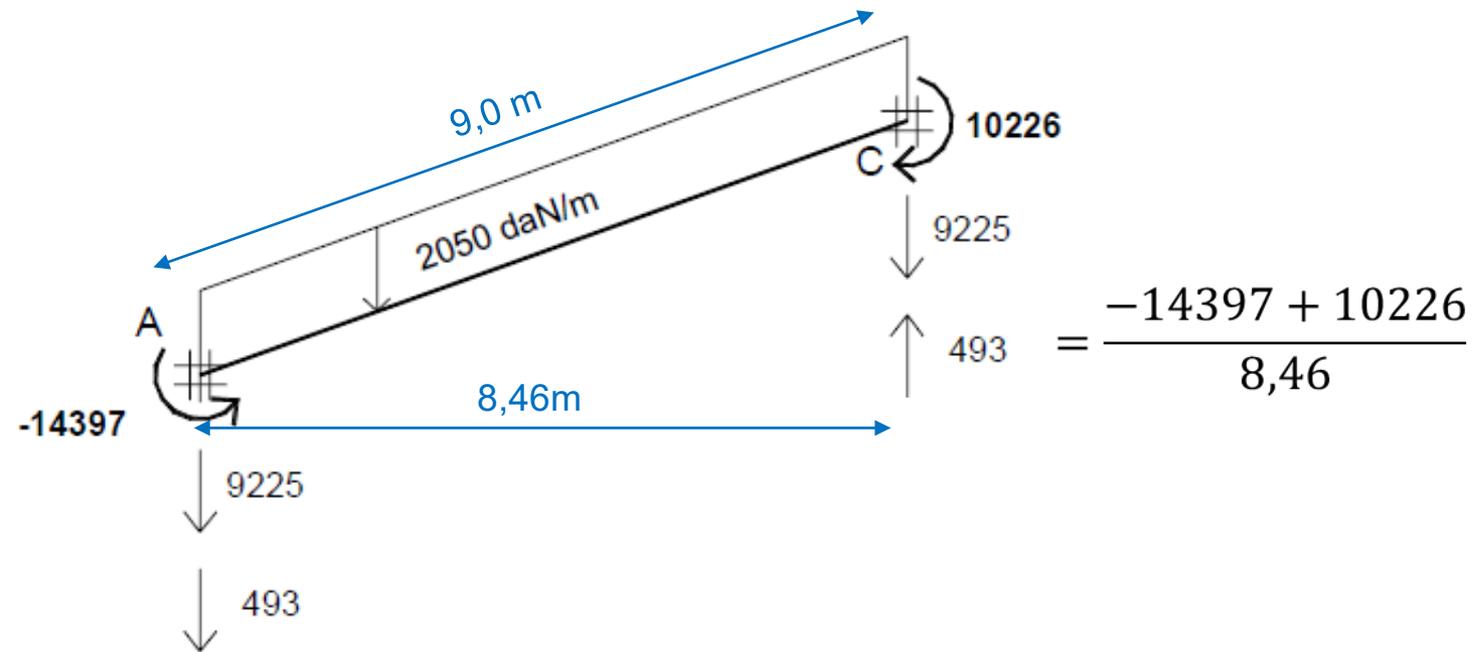
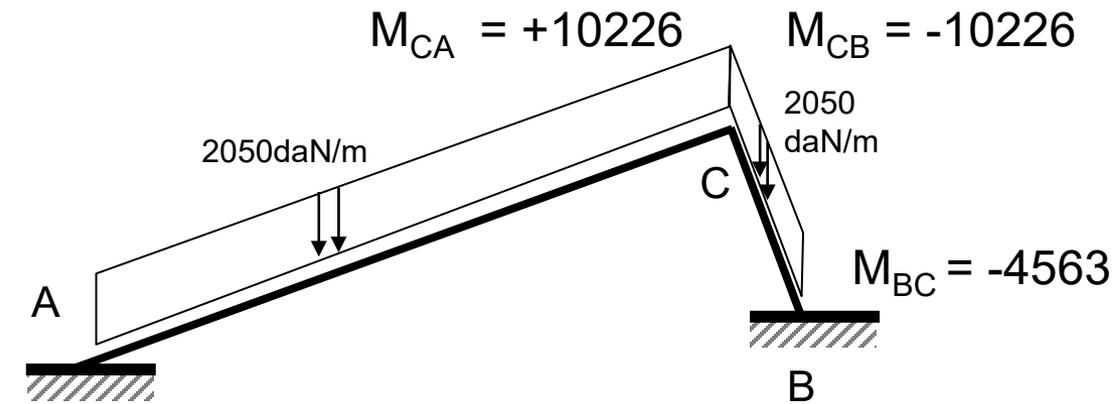
4. DESCARGAS BARRA por BARRA



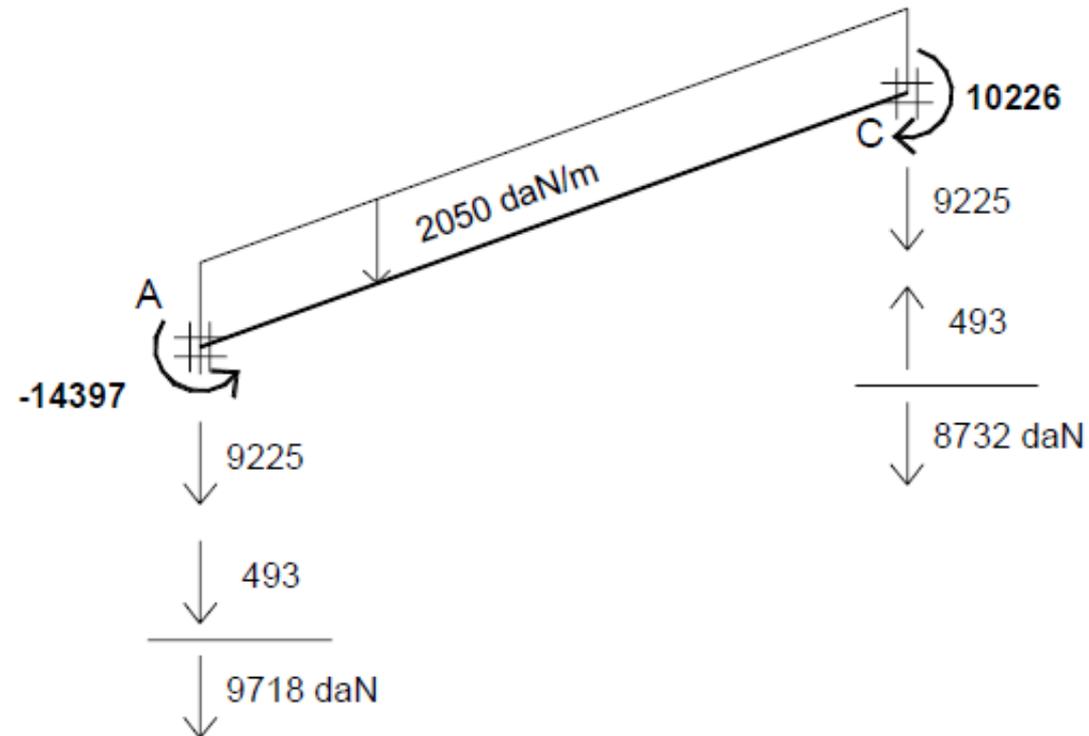
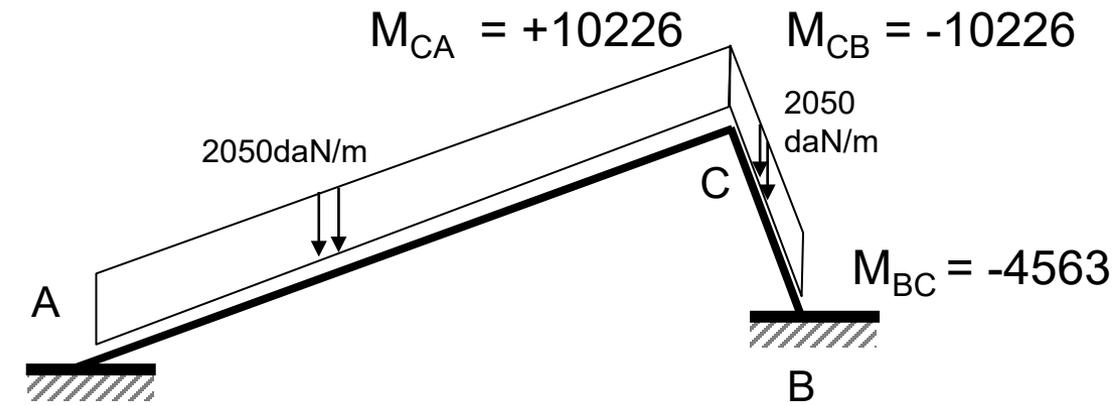
4. DESCARGAS BARRA por BARRA



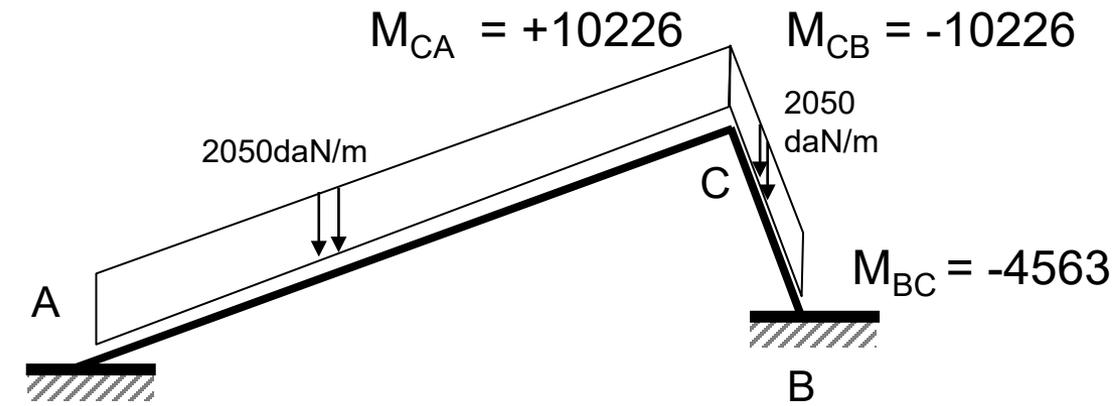
4. DESCARGAS BARRA por BARRA



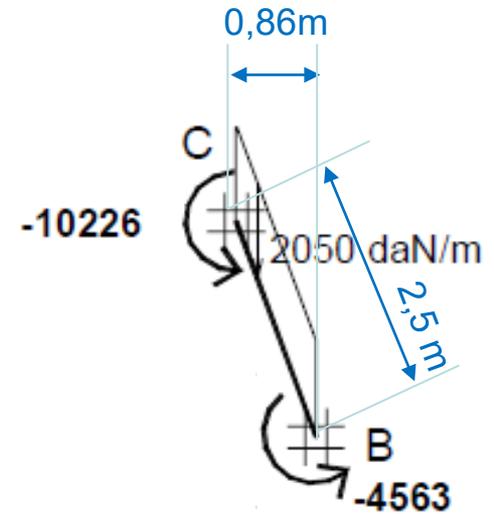
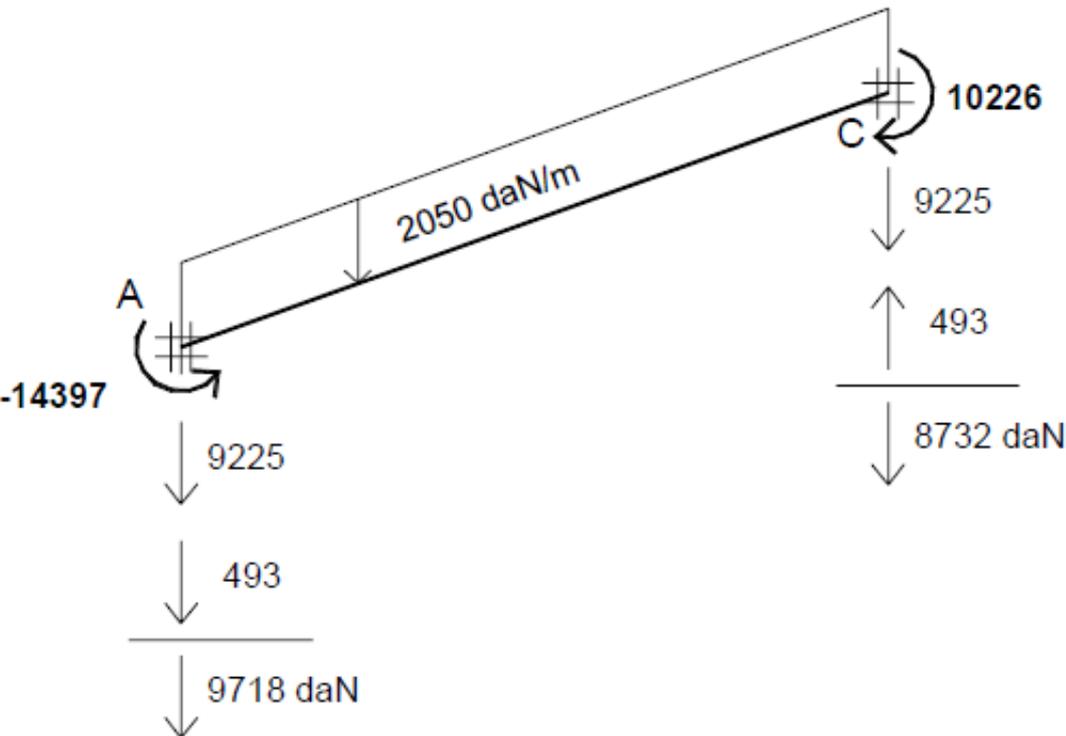
4. DESCARGAS BARRA por BARRA



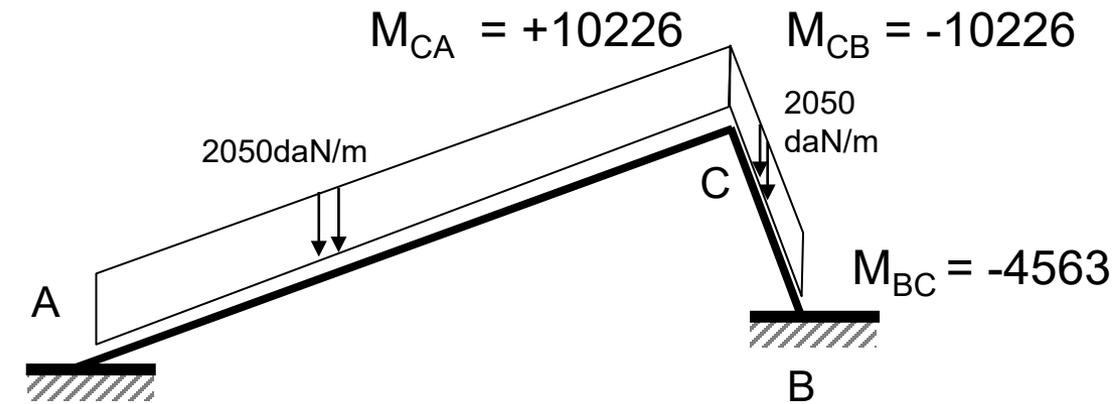
4. DESCARGAS BARRA por BARRA



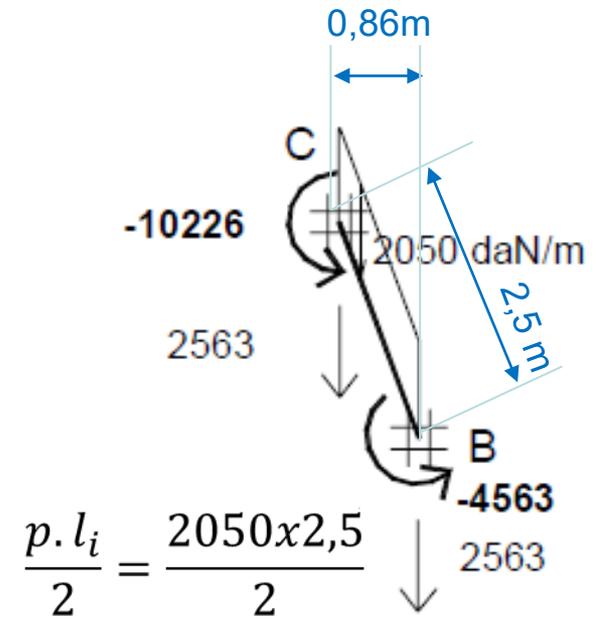
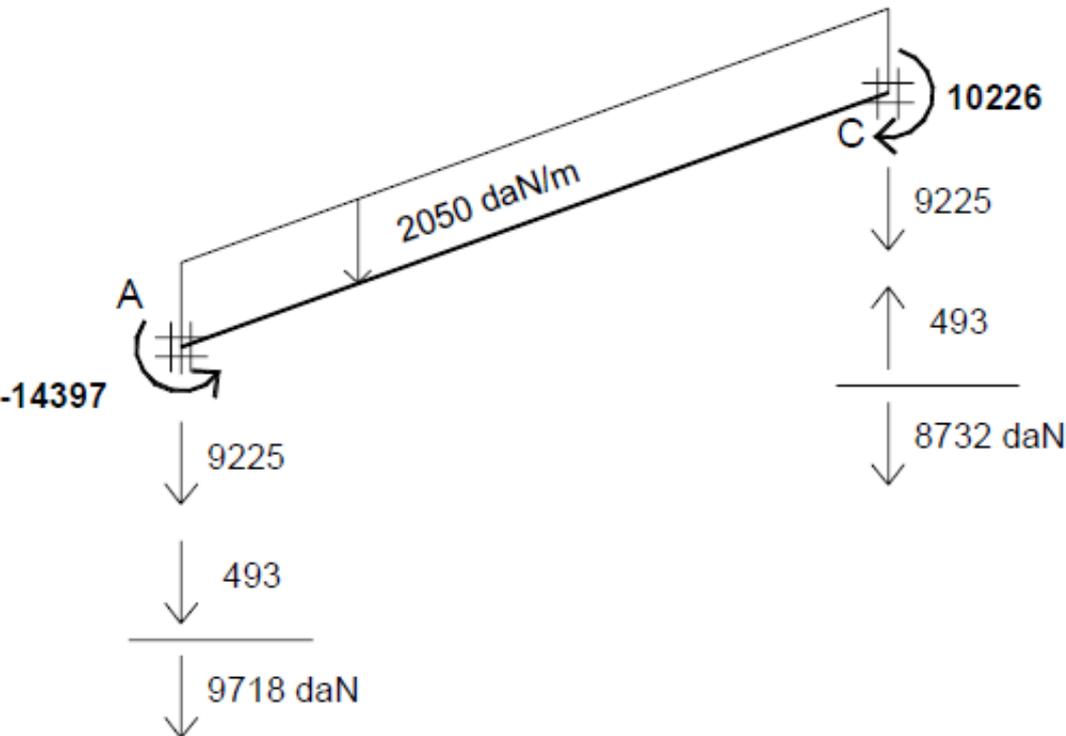
$M_{AC} = -14397$



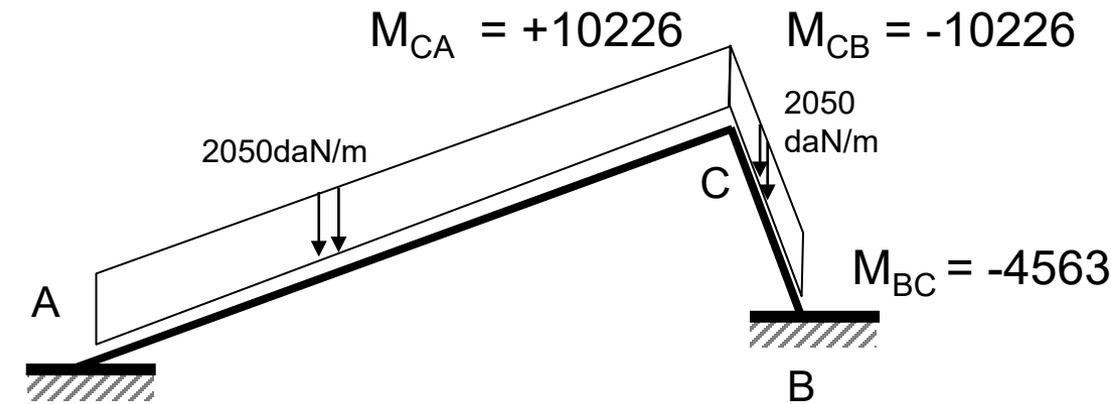
4. DESCARGAS BARRA por BARRA



$$M_{AC} = -14397$$



4. DESCARGAS BARRA por BARRA

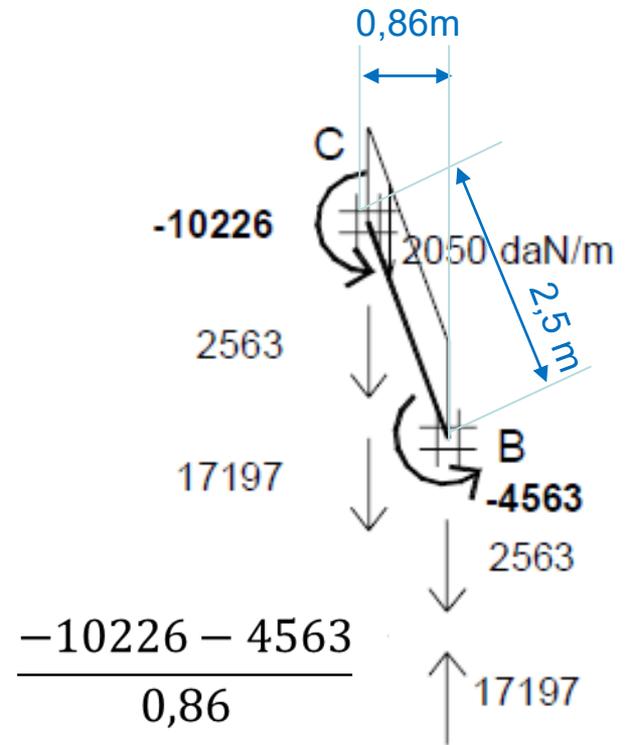
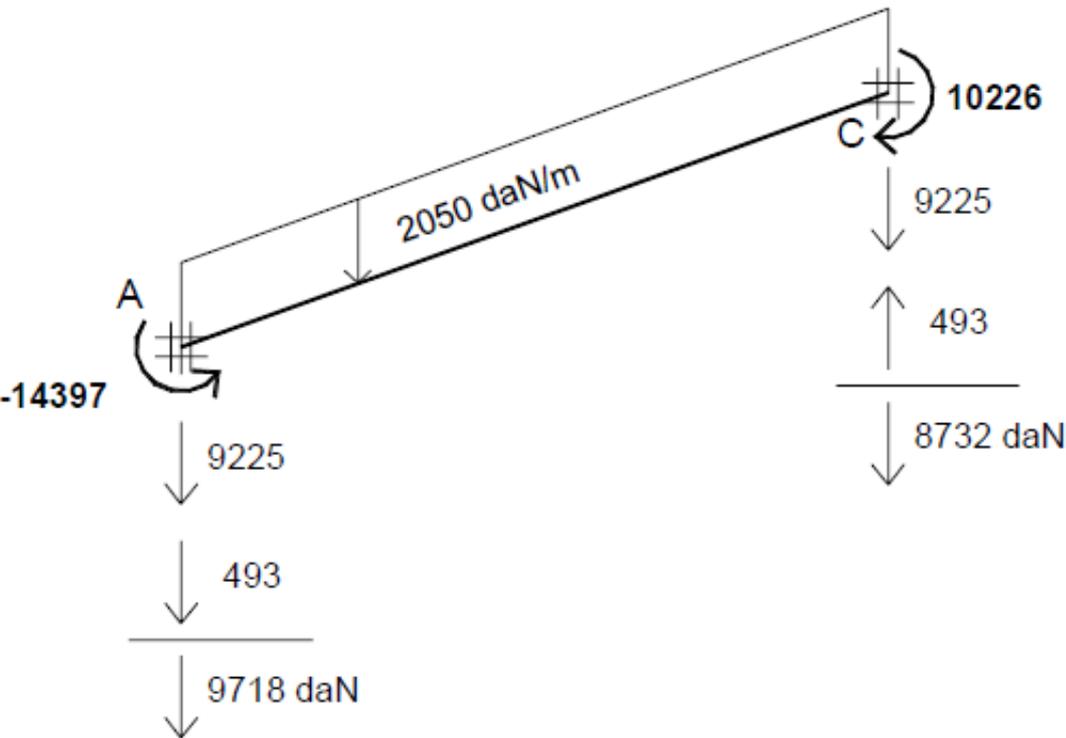


$$M_{CA} = +10226$$

$$M_{CB} = -10226$$

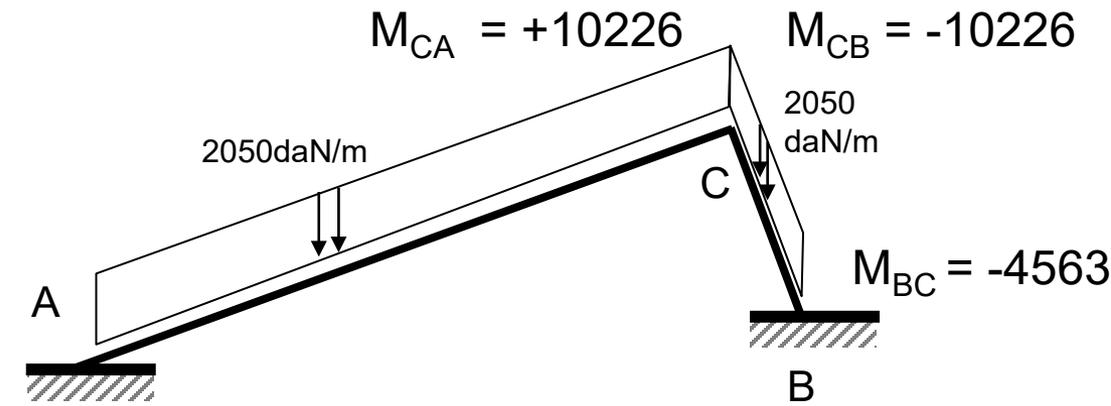
$$M_{AC} = -14397$$

$$M_{BC} = -4563$$

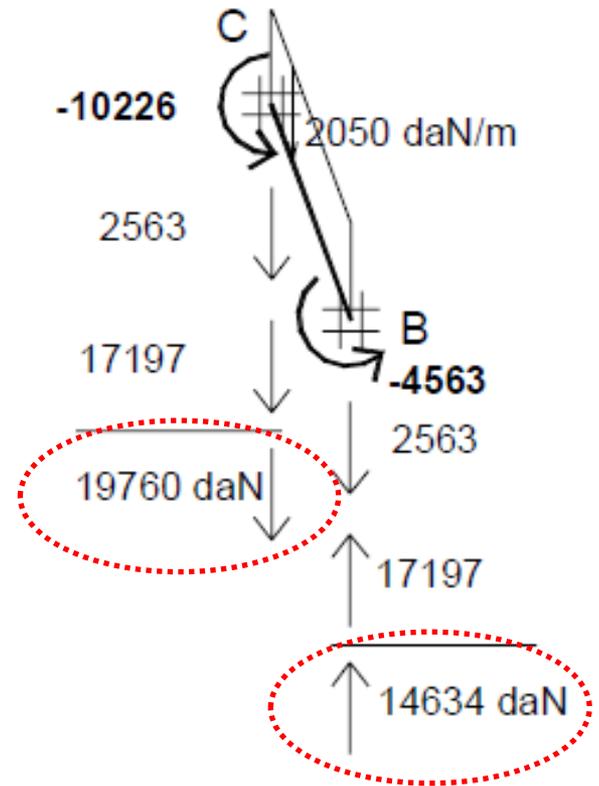
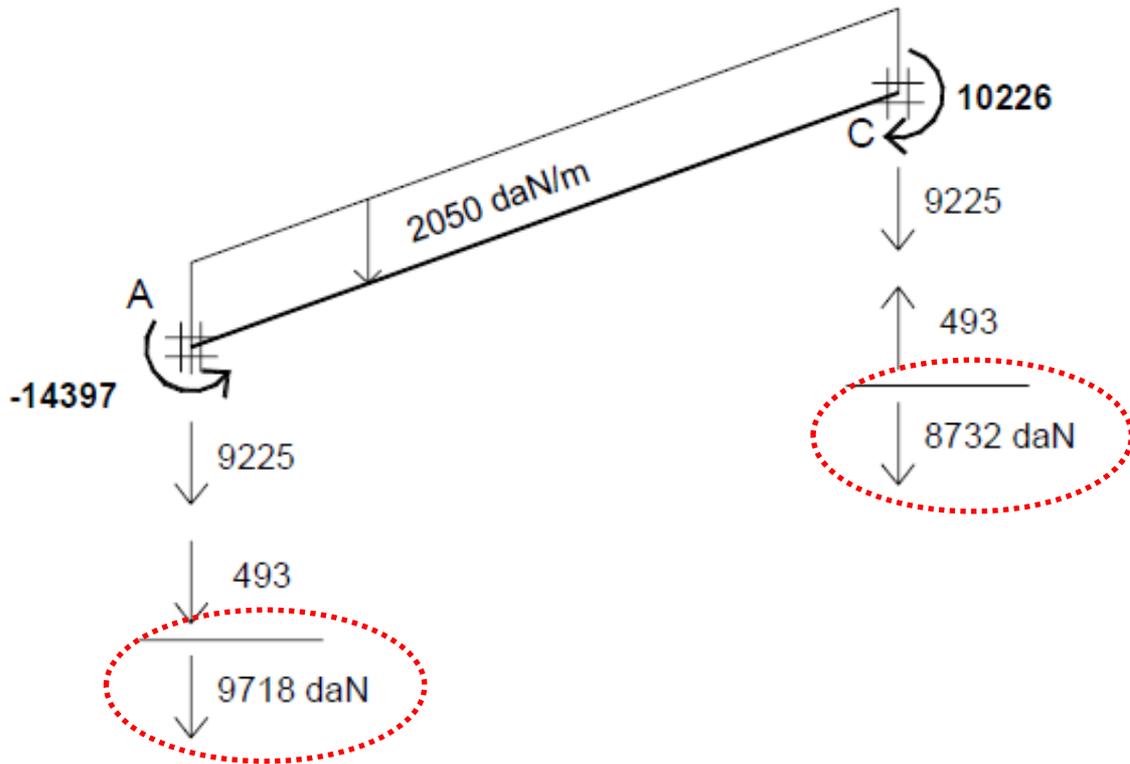


$$\frac{-10226 - 4563}{0,86}$$

4. DESCARGAS BARRA por BARRA



$M_{AC} = -14397$



ETAPAS

1 Análisis de Rigidez de Barras

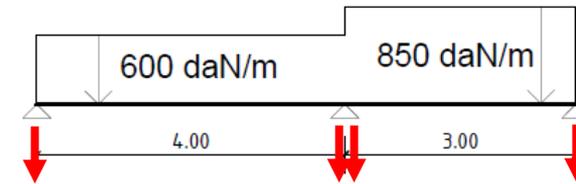
- Largo / Inercia
 - Vínculos (α)
 - Rigidez (κ)
 - Rigidez Flexional ($\alpha\kappa$)
 - Coef. Transmisión (β)
- ⇒ **Coef. Repartición (r_i)**

2 Momentos Empotramiento Perfecto (M.E.P.)

3 ARTIFICIO DE CROSS (equilibrio de los nudos)

Determinación de Momentos en los extremos de las barras

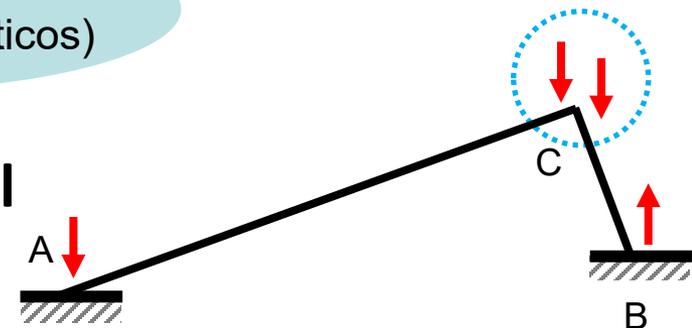
4 Descargas Barra por Barra (de fuerzas y momentos hacia los extremos de las barras)



5 Caminos Materiales (a los apoyos)

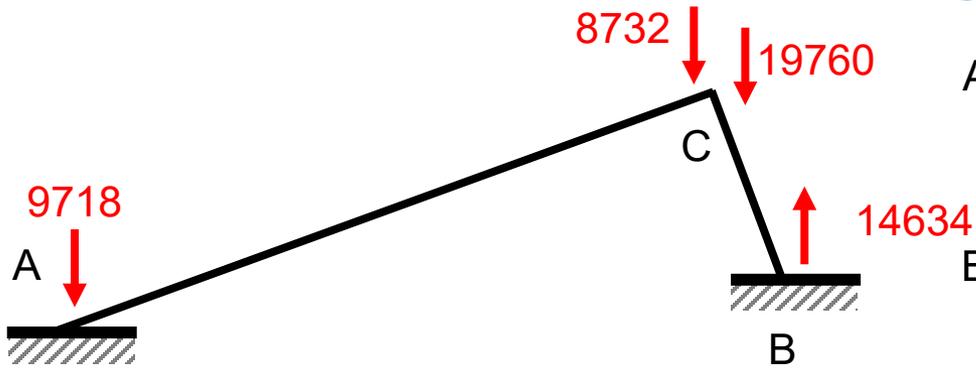
Nuevo!
(Pórticos Hiperestáticos)

6 Reacciones en apoyos y Equilibrio Global



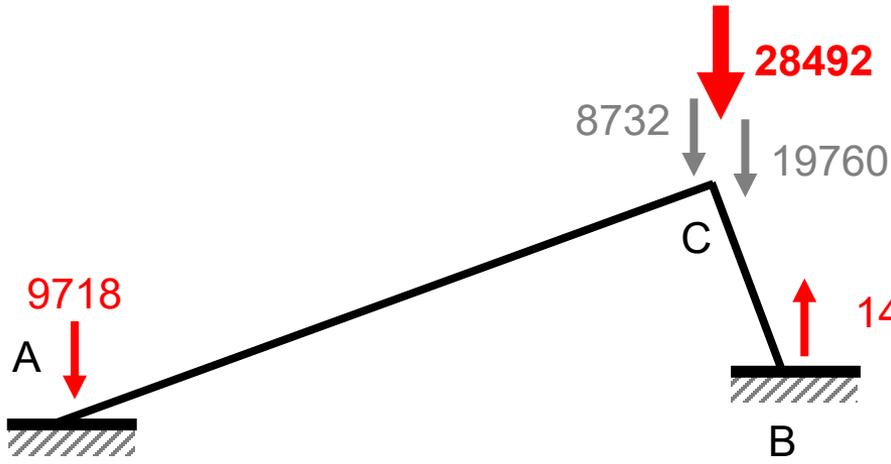
7 Diagramas de Solicitaciones - Dimensionado

5. CAMINOS MATERIALES



- A. se plantea la estructura completa con las descargas en los nudos antes obtenidas (en descargas barras por barra)
- B. se suman en cada nudo

5. CAMINOS MATERIALES



- se plantea la estructura completa con las descargas en los nudos antes obtenidas (en descargas barras por barra)
- se suman en cada nudo

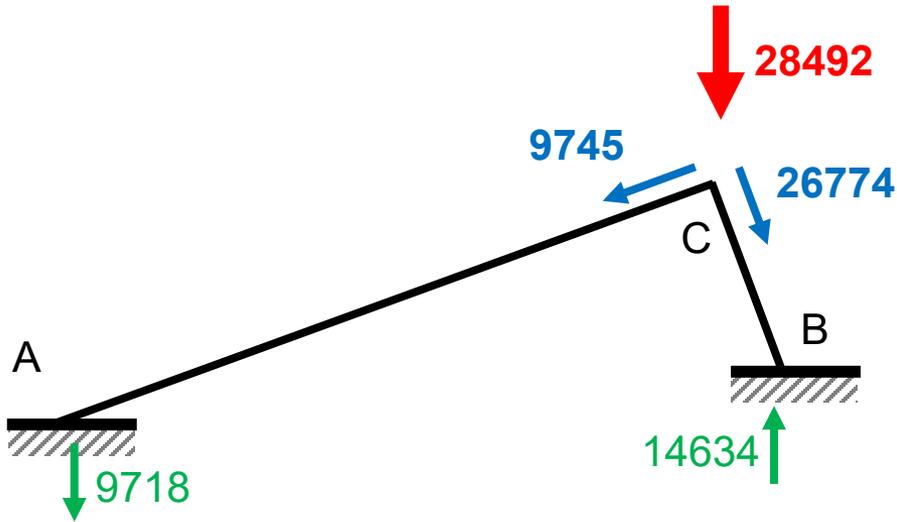
5. CAMINOS MATERIALES



Fuerzas que encontraron su camino a los apoyos

- se plantea la estructura completa con las descargas en los nudos antes obtenidas (en descargas barras por barra)
- se suman en cada nudo
- se descomponen en caminos materiales, intentando llevarlas a los apoyos, **donde deben encontrar su equilibrio**

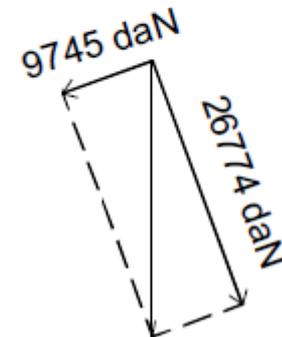
5. CAMINOS MATERIALES



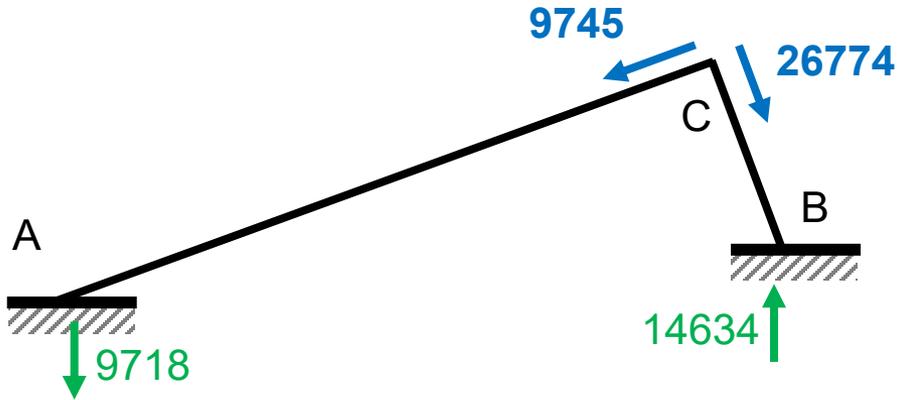
- se plantea la estructura completa con las descargas en los nudos antes obtenidas (en descargas barras por barra)
- se suman en cada nudo
- se descomponen en caminos materiales, intentando llevarlas a los apoyos, **donde deben encontrar su equilibrio**

$$8732 \text{ daN} + 19760 \text{ daN} = 28492 \text{ daN}$$

la fuerza 28492 daN se descompone en sus dos caminos únicos materiales: la barra AC y la barra CB :



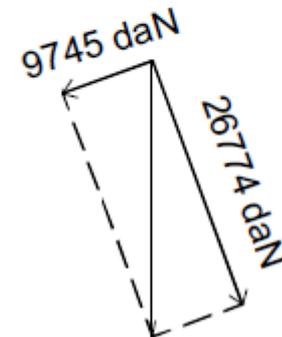
5. CAMINOS MATERIALES



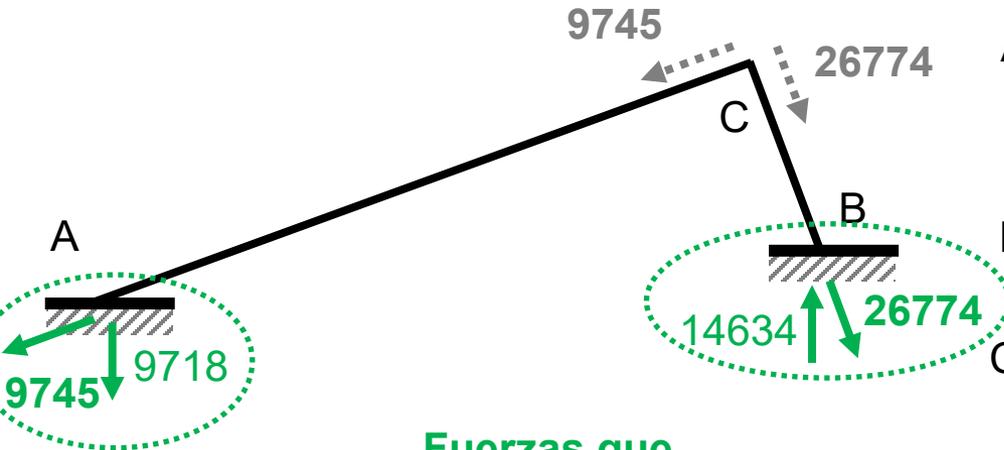
- se plantea la estructura completa con las descargas en los nudos antes obtenidas (en descargas barras por barra)
- se suman en cada nudo
- se descomponen en caminos materiales, intentando llevarlas a los apoyos, **donde deben encontrar su equilibrio**

$$8732 \text{ daN} + 19760 \text{ daN} = 28492 \text{ daN}$$

la fuerza 28492 daN se descompone en sus dos caminos únicos materiales: la barra AC y la barra CB :



5. CAMINOS MATERIALES

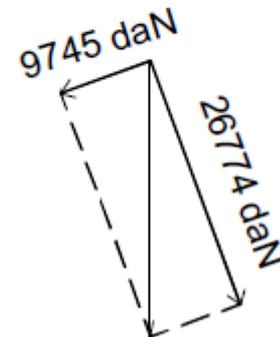


Fuerzas que encontraron su camino a los apoyos

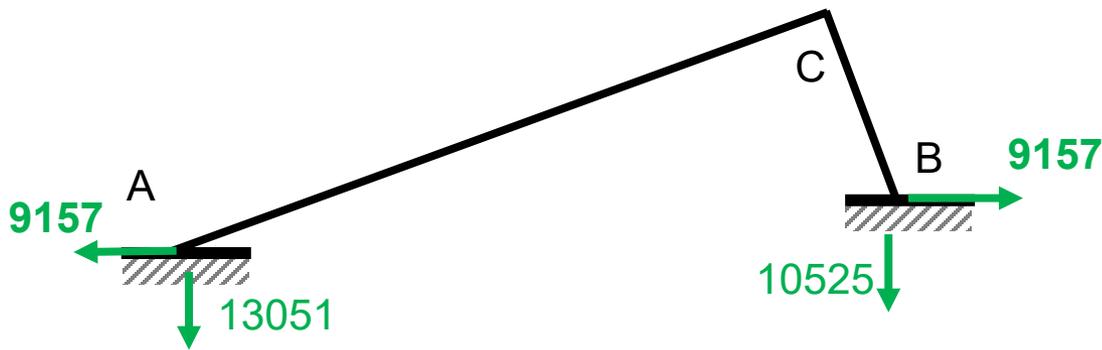
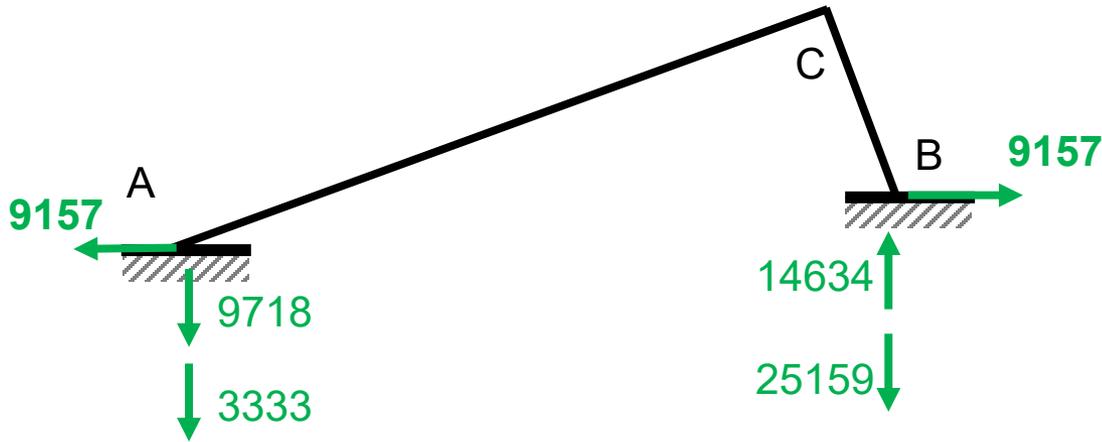
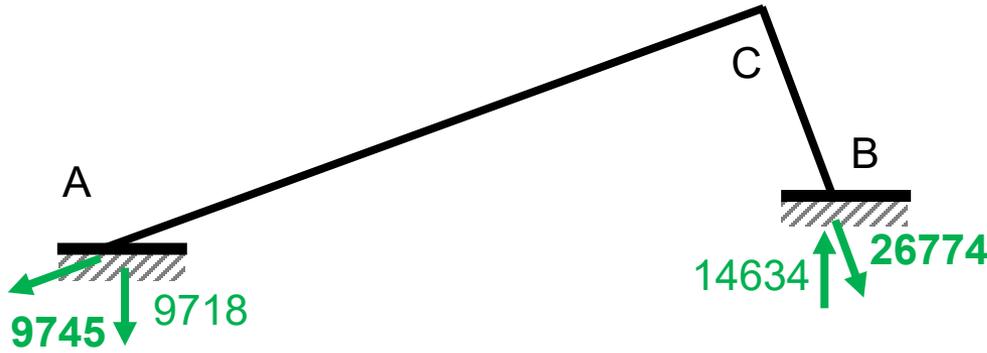
- A. se plantea la estructura completa con las descargas en los nudos antes obtenidas (en descargas barras por barra)
- B. se suman en cada nudo
- C. se descomponen en caminos materiales, intentando llevarlas a los apoyos, donde deben encontrar su equilibrio

$$8732 \text{ daN} + 19760 \text{ daN} = 28492 \text{ daN}$$

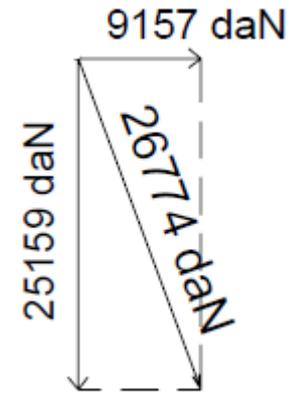
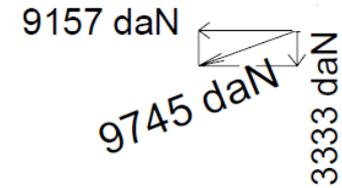
la fuerza 28492 daN se descompone en sus dos caminos únicos materiales: la barra AC y la barra CB :



5. CAMINOS MATERIALES



DESCARGAS EN APOYOS



ETAPAS

1 Análisis de Rigidez de Barras

- Largo / Inercia
- Vínculos (α)
- Rigidez (κ)
- Rigidez Flexional ($\alpha\kappa$)
- Coef. Transmisión (β)
⇒ **Coef. Repartición (r_i)**

2 Momentos Empotramiento Perfecto (M.E.P.)

3 ARTIFICIO DE CROSS (equilibrio de los nudos)

Determinación de Momentos en los extremos de las barras

4 Descargas Barra por Barra (de fuerzas y momentos hacia los extremos de las barras)

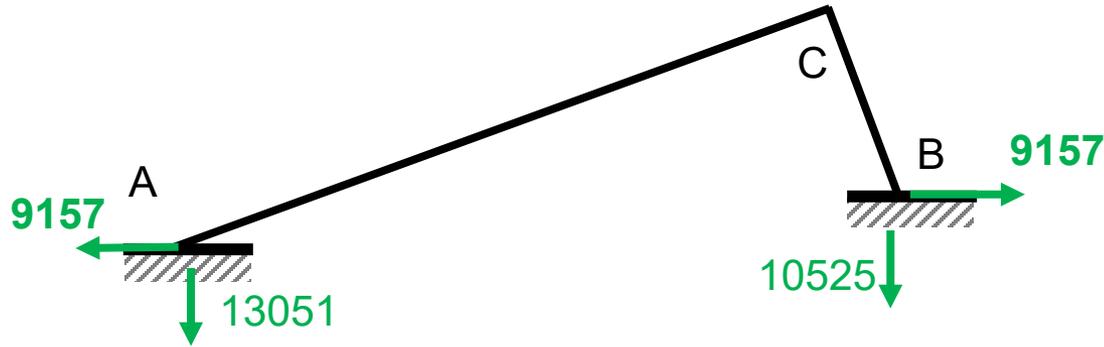
5 Caminos Materiales (a los apoyos)

Nuevo!
(Pórticos Hiperestáticos)

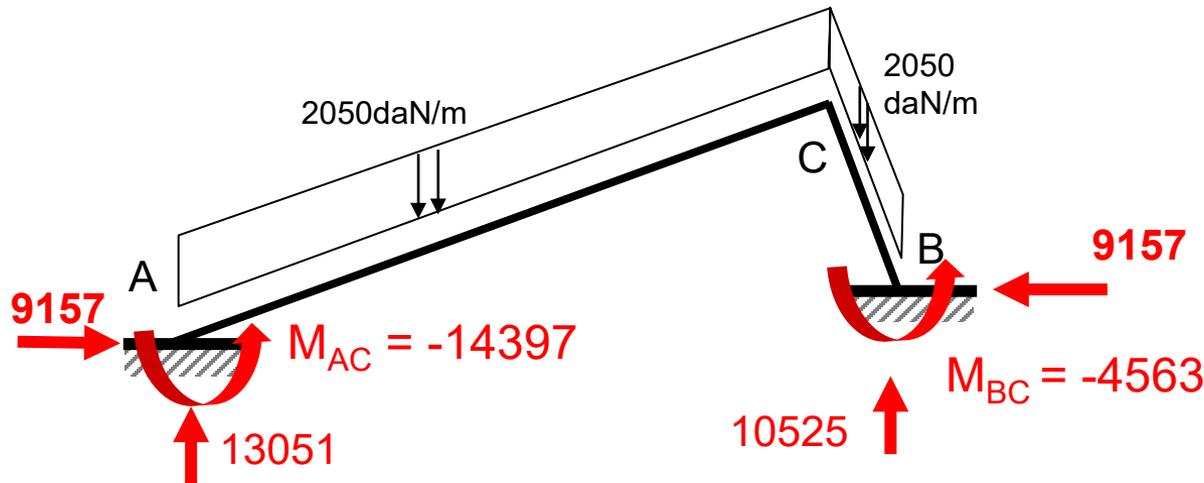
6 Reacciones en apoyos y Equilibrio Global

7 Diagramas de Solicitaciones - Dimensionado

6. REACCIONES EN APOYOS



DESCARGAS
EN APOYOS



REACCIONES
EN APOYOS

Las fuerzas encuentran en los apoyos su equilibrio

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

Los momentos obtenidos por Cross, son momentos reactivos

ETAPAS

1 Análisis de Rigidez de Barras

- Largo / Inercia
 - Vínculos (α)
 - Rigidez (κ)
 - Rigidez Flexional ($\alpha\kappa$)
 - Coef. Transmisión (β)
- ⇒ **Coef. Repartición (r_i)**

2 Momentos Empotramiento Perfecto (M.E.P.)

3 ARTIFICIO DE CROSS (equilibrio de los nudos)

Determinación de Momentos en los extremos de las barras

4 Descargas Barra por Barra (de fuerzas y momentos hacia los extremos de las barras)

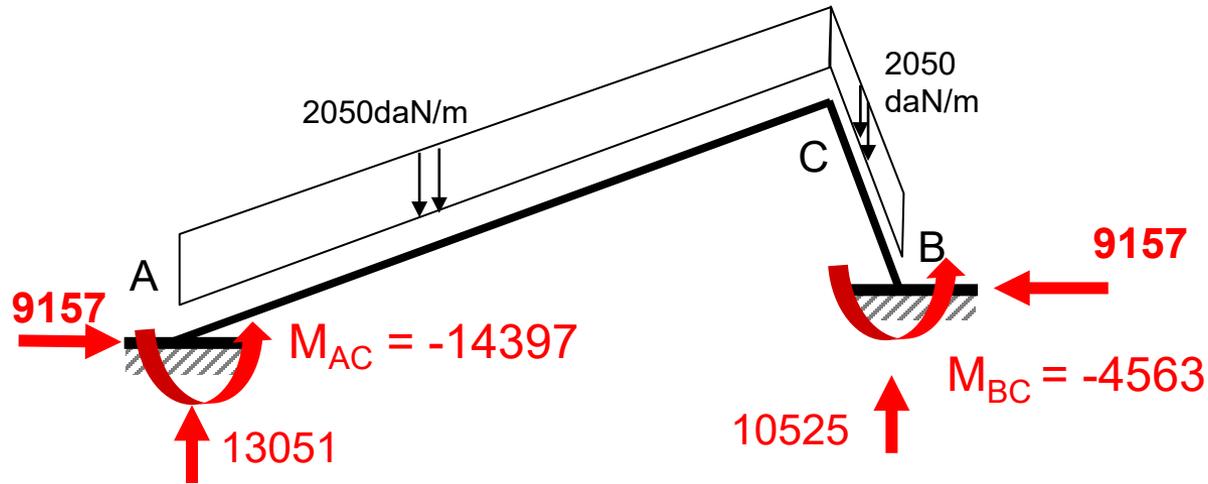
5 Caminos Materiales (a los apoyos)

Nuevo!
(Pórticos Hiperestáticos)

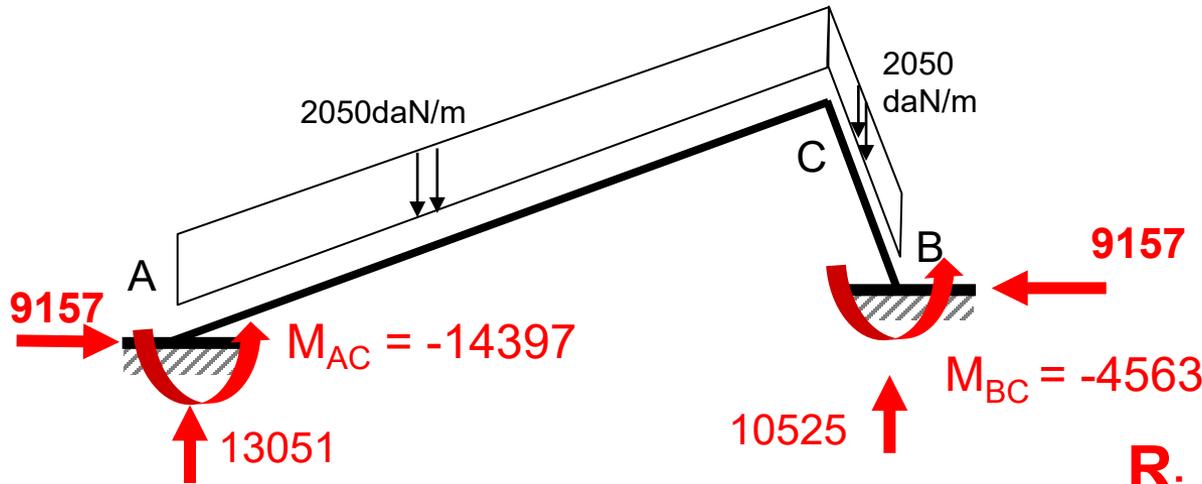
6 Reacciones en apoyos y Equilibrio Global

7 Diagramas de Solicitaciones - Dimensionado

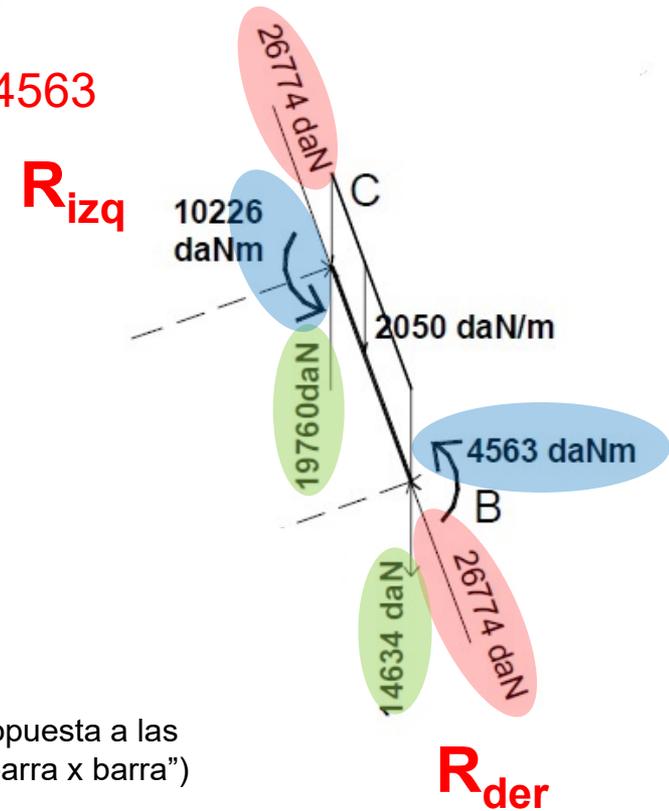
7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES



7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES



TRAMO CB



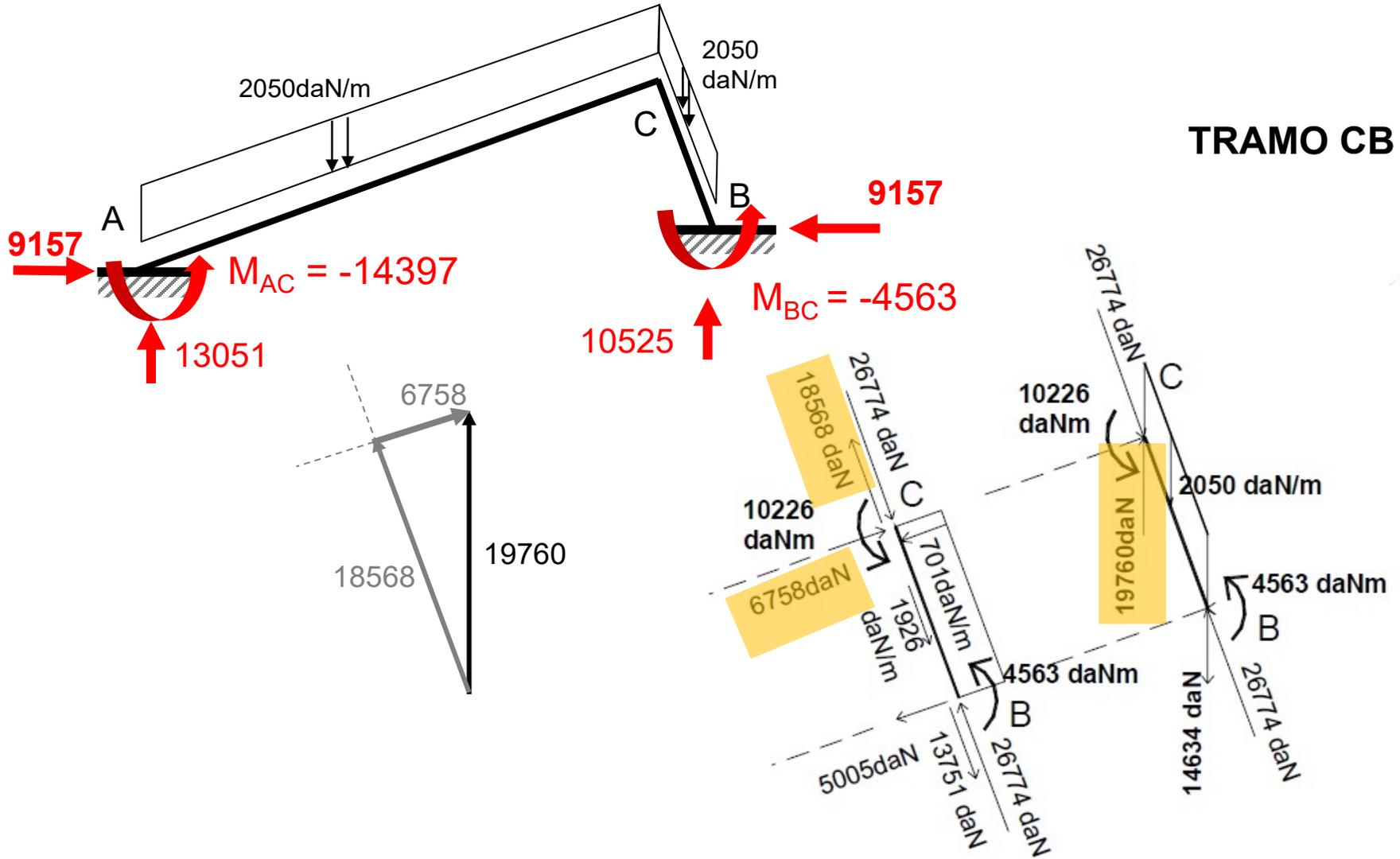
Tramo aislado en equilibrio (Diagrama de Cuerpo Libre)

- **cargas** actuantes s/tramo
- **momentos** (efecto de las demás barras sobre el tramo)
- **fuerzas equilibrantes al tramo:**
 - **Componente vertical**
 - **Componente en la dirección del tramo**

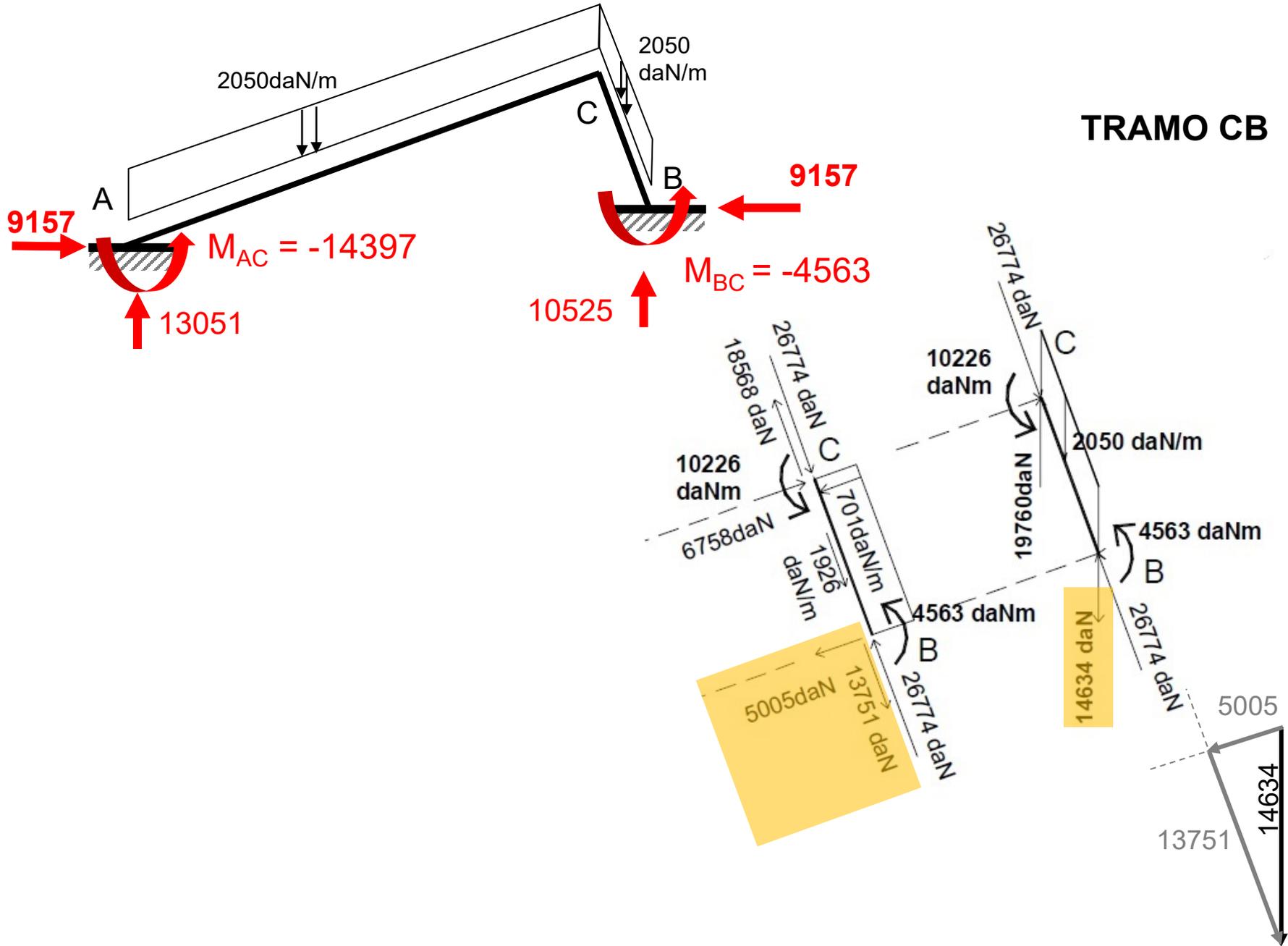
(reacción del tramo: fuerza igual y opuesta a las obtenidas en la etapa "Descargas barra x barra")

(proveniente de la transmisión de las fuerzas por "Caminos Materiales")

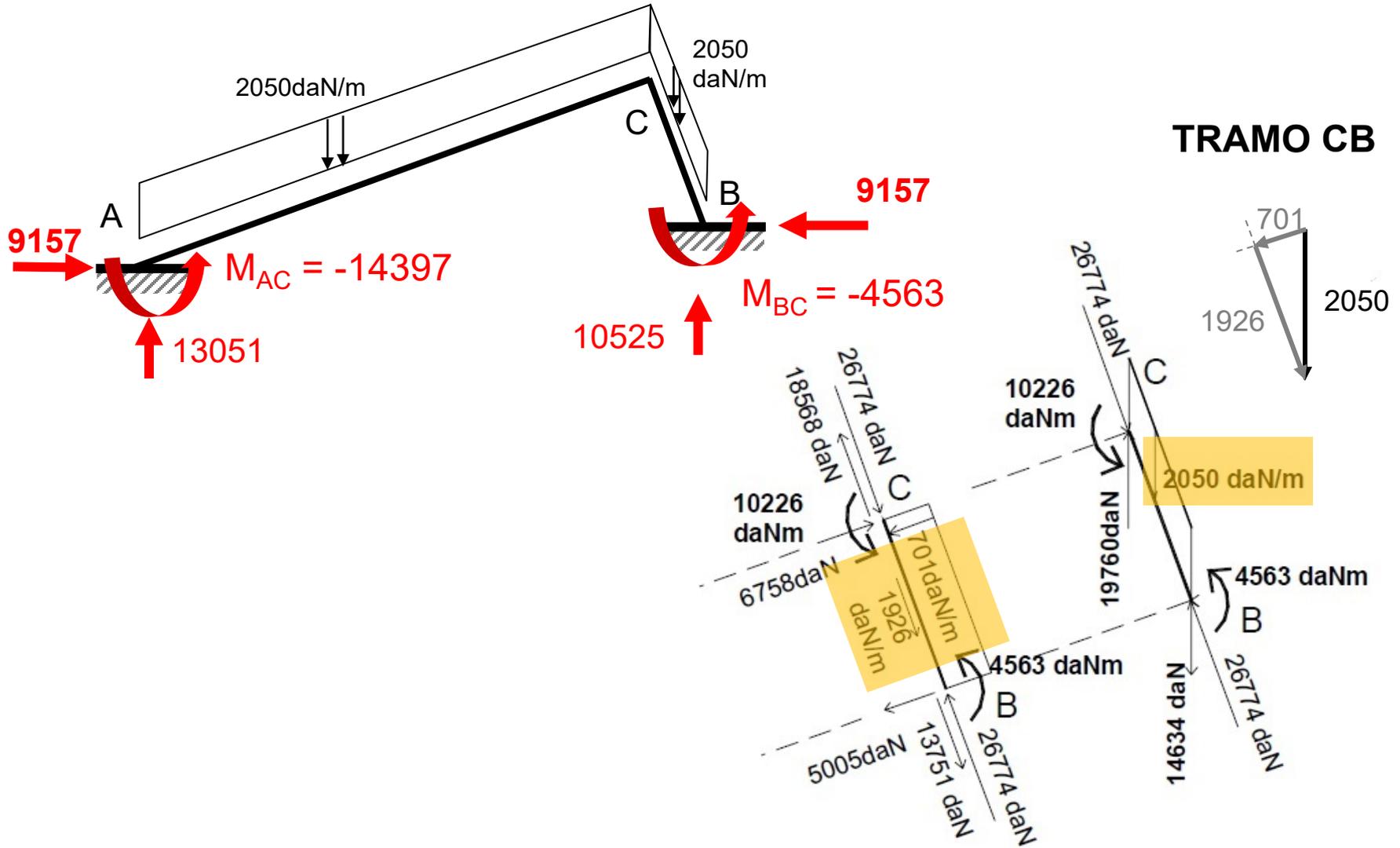
7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES



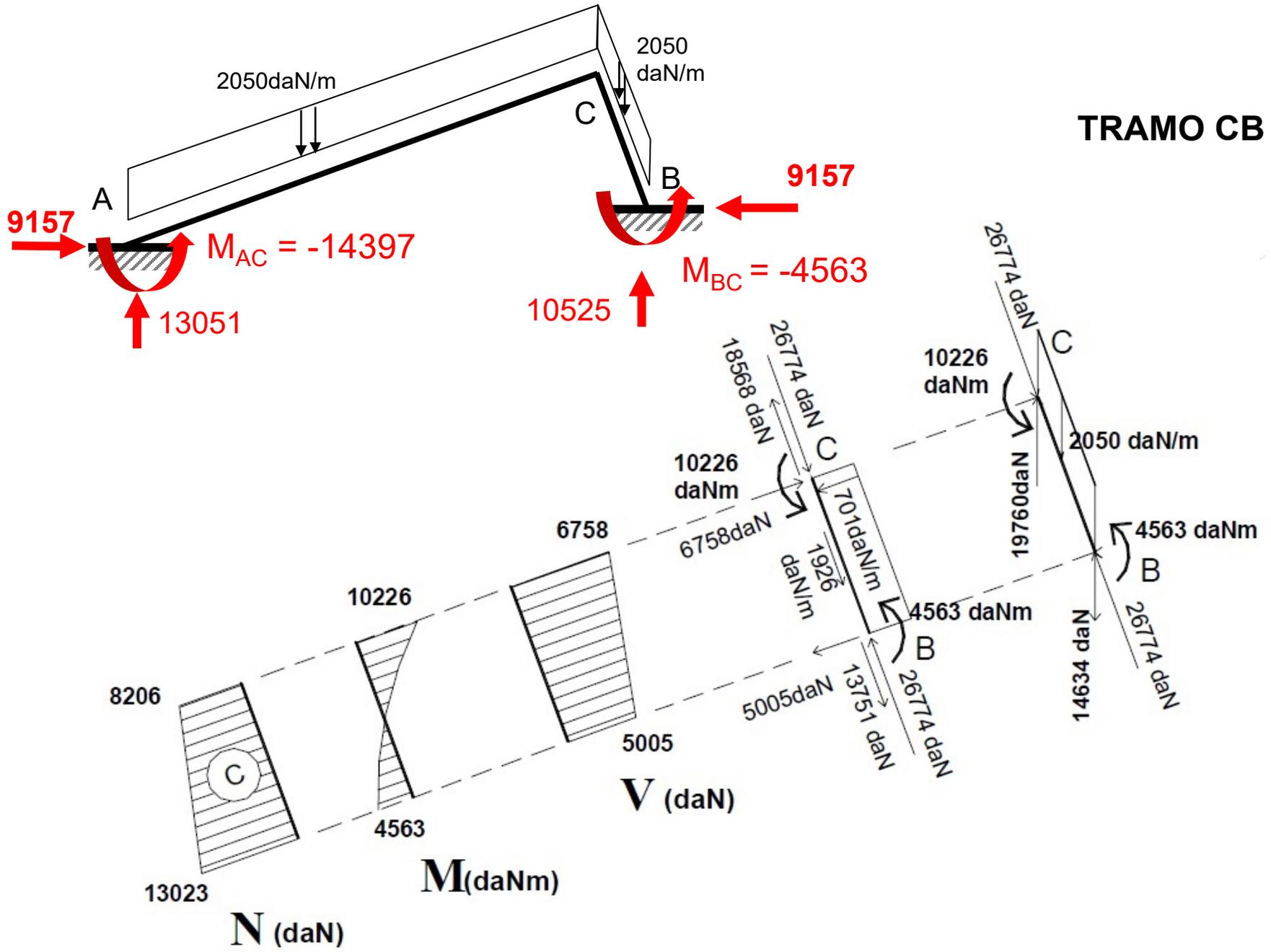
7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES



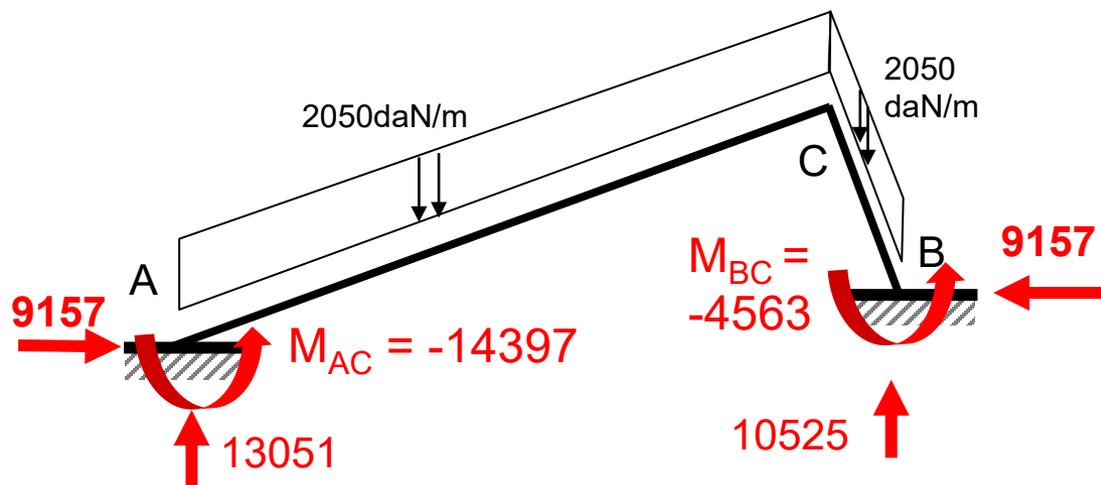
7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES



7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES



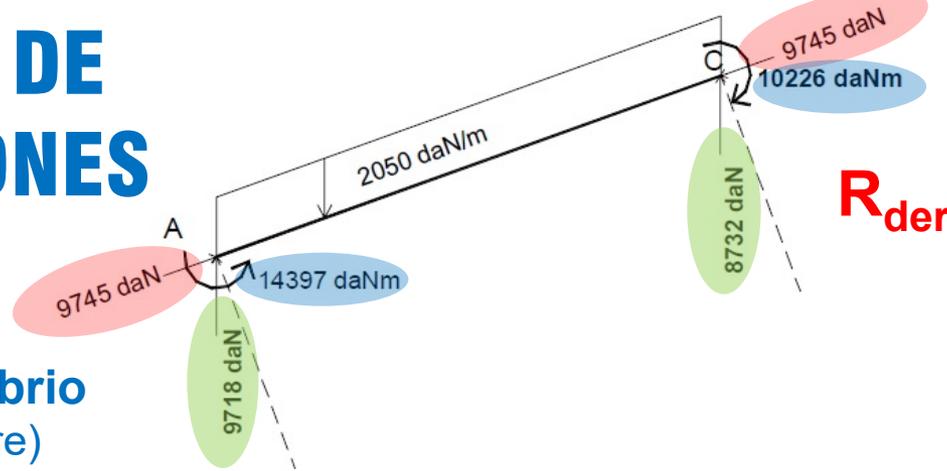
7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES



7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES

TRAMO AC

R_{izq}



R_{der}

Tramo aislado en equilibrio (Diagrama de Cuerpo Libre)

- **cargas** actuantes s/tramo
- **momentos** (efecto de las demás barras sobre el tramo)
- **fuerzas equilibrantes al tramo:**
 - **Componente vertical**
 - **Componente en la dirección del tramo**

(reacción del tramo: fuerza igual y opuesta a las obtenidas en la etapa "Descargas barra x barra")

(proveniente de la transmisión de las fuerzas por "Caminos Materiales")



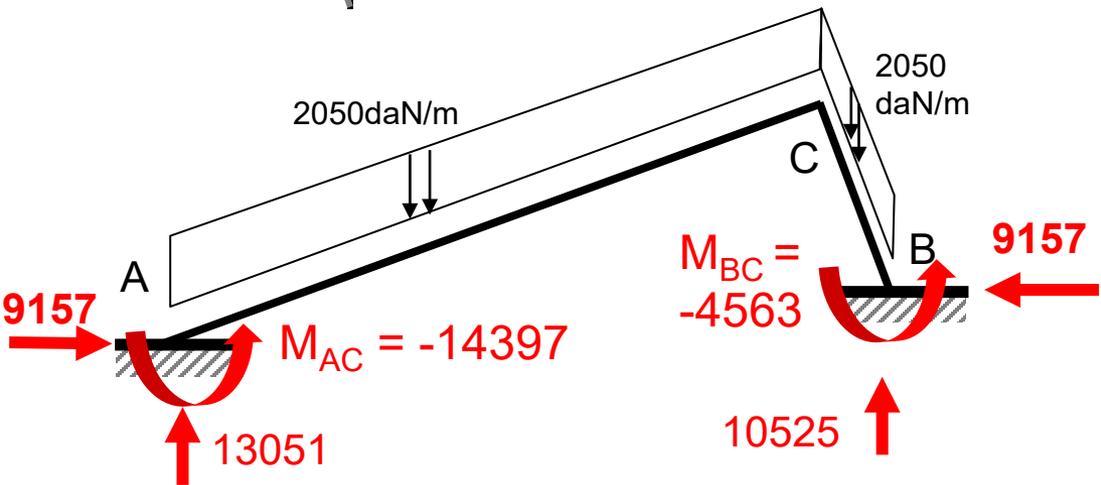
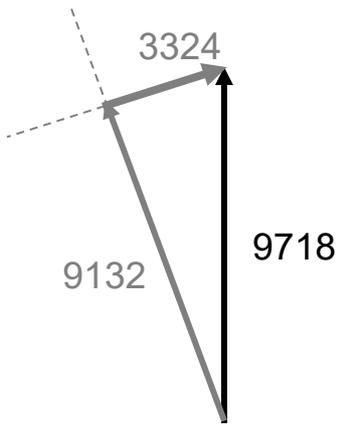
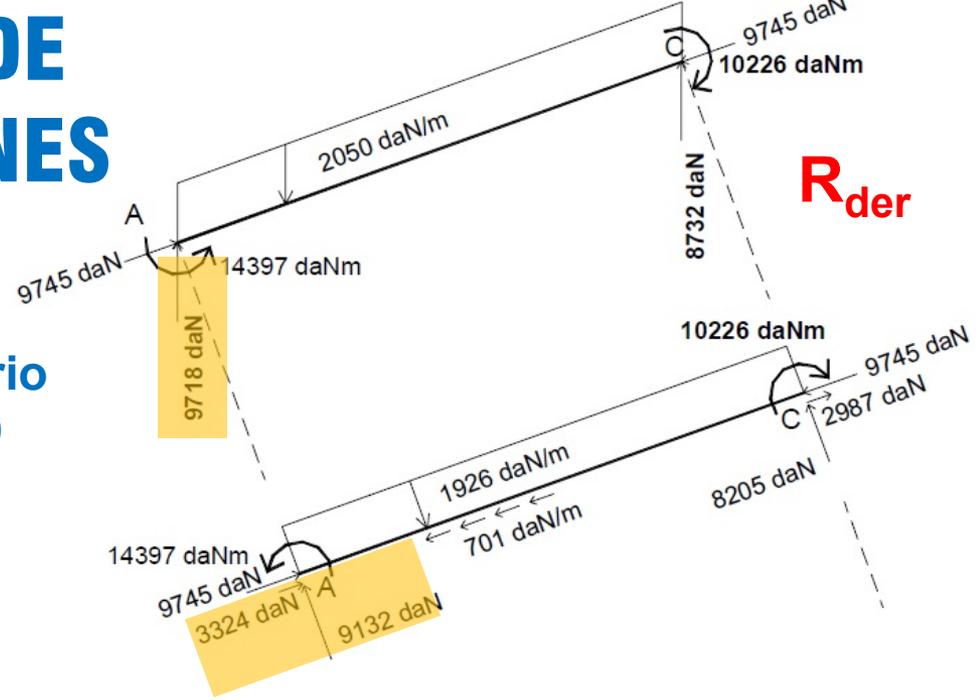
7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES

TRAMO AC

R_{izq}

R_{der}

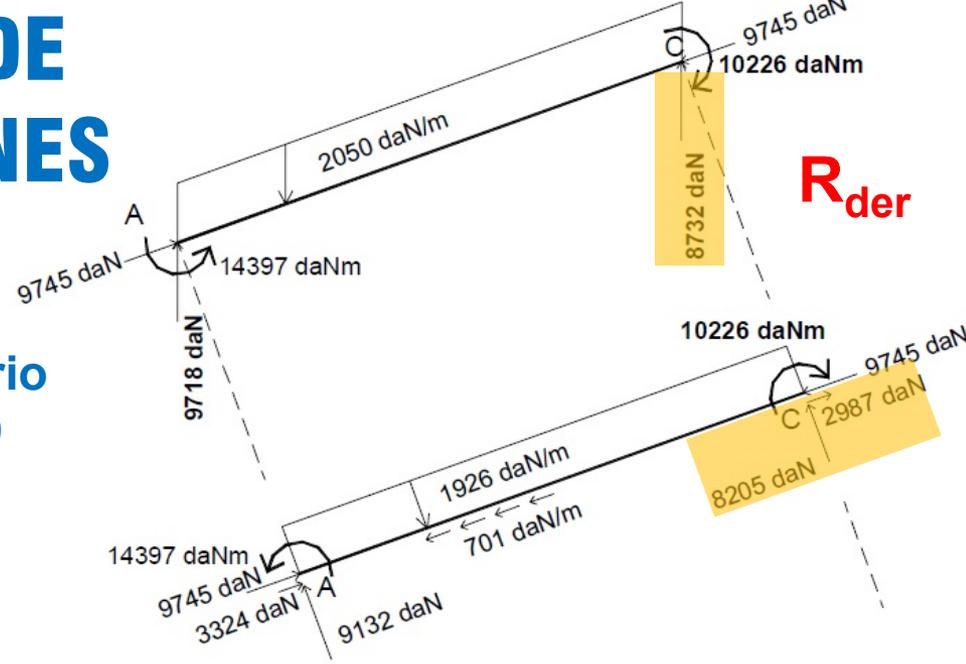
Tramo aislado en equilibrio
(Diagrama de Cuerpo Libre)



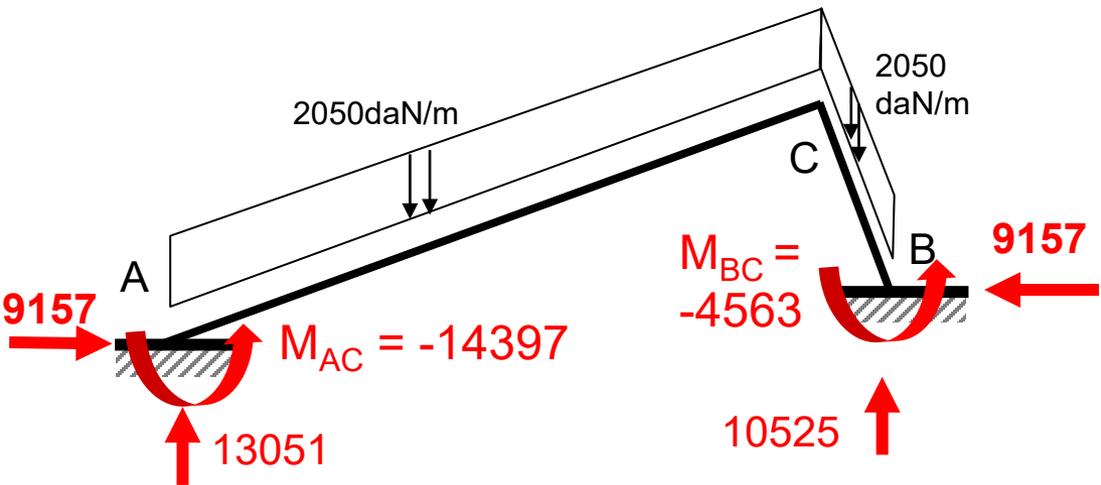
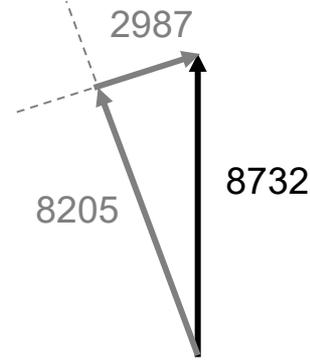
7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES

R_{izq}

Tramo aislado en equilibrio
(Diagrama de Cuerpo Libre)



TRAMO AC



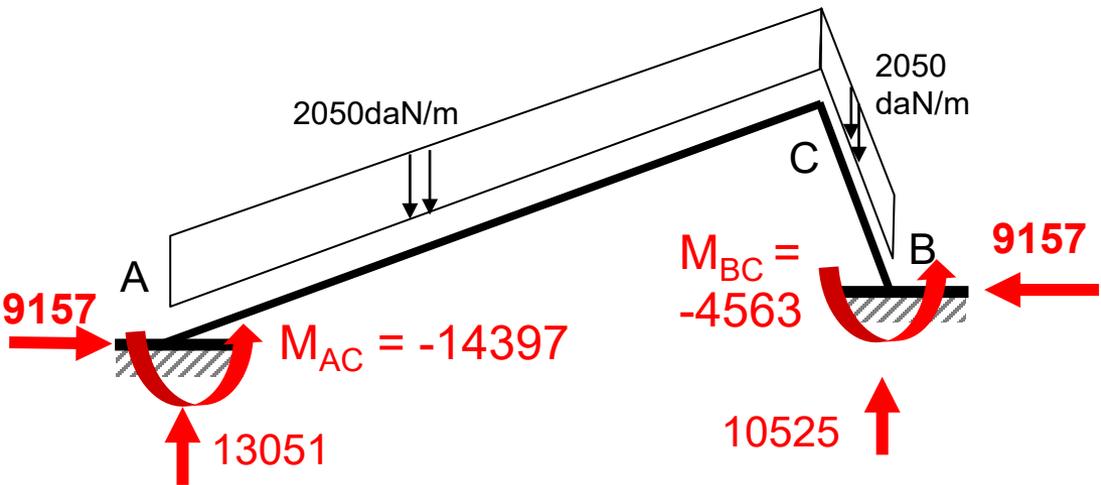
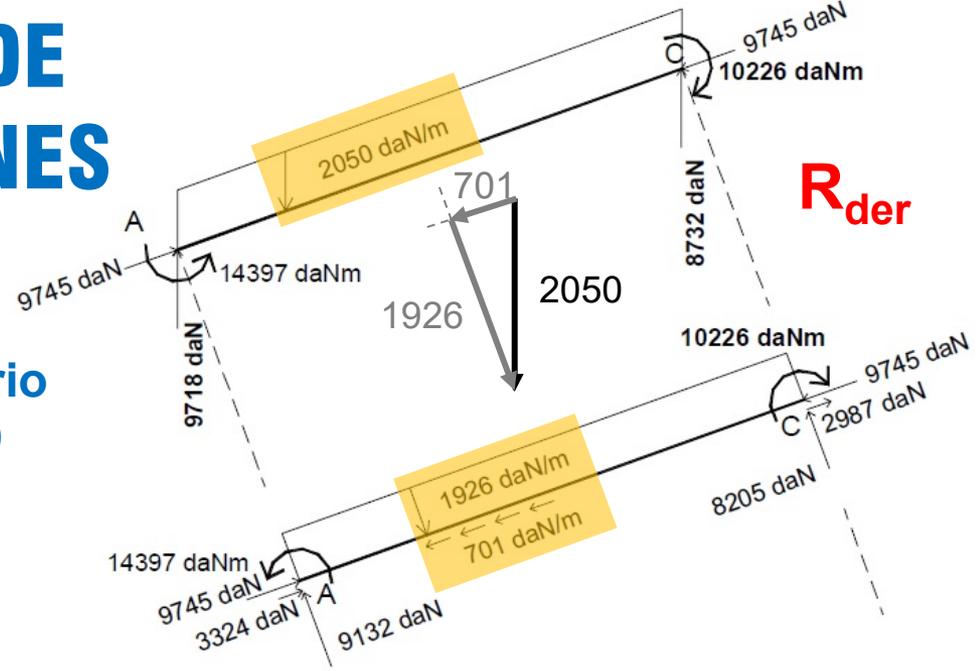
7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES

TRAMO AC

R_{izq}

R_{der}

Tramo aislado en equilibrio
(Diagrama de Cuerpo Libre)

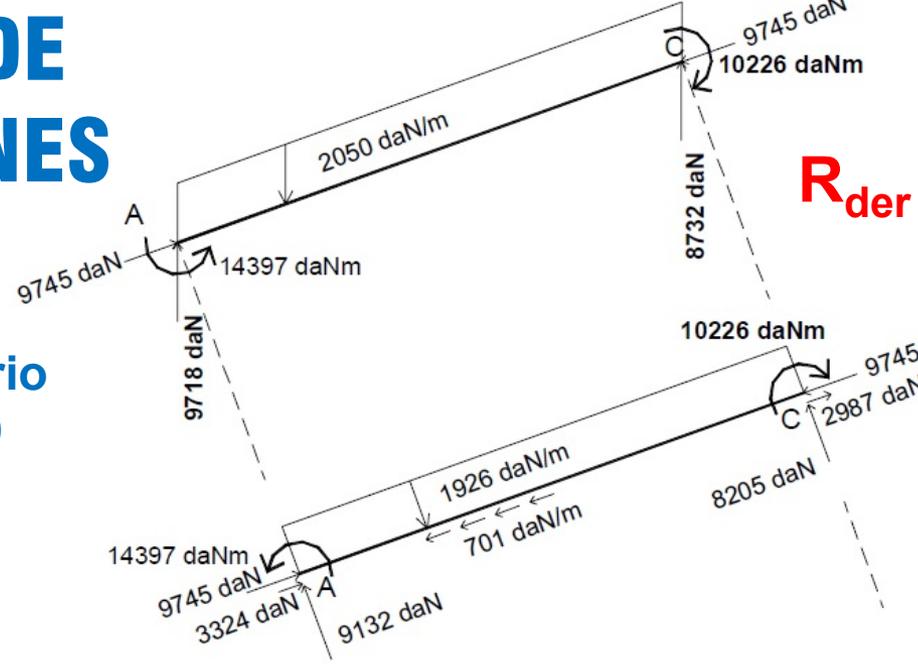


7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES

R_{izq}

Tramo aislado en equilibrio
(Diagrama de Cuerpo Libre)

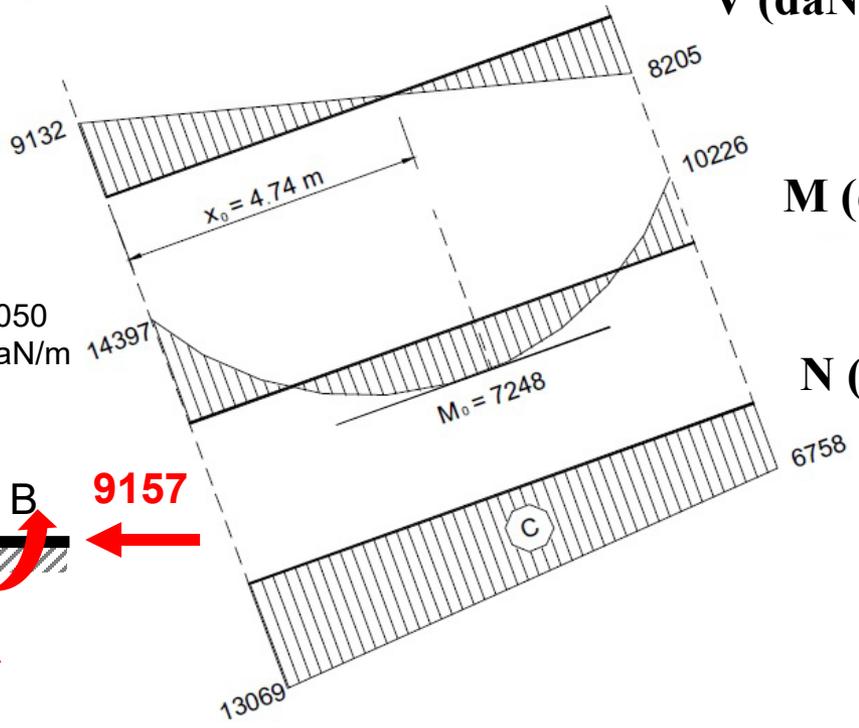
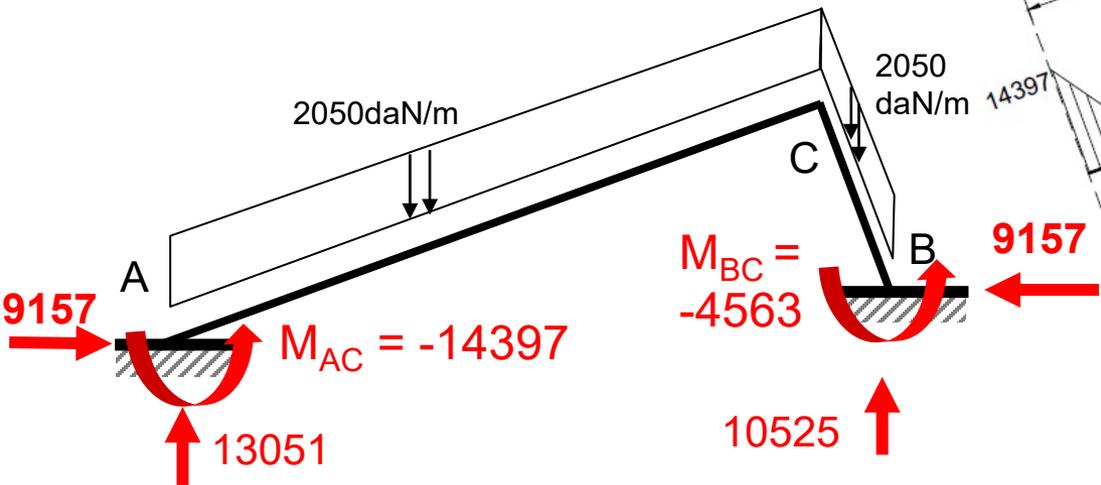
TRAMO AC



V (daN)

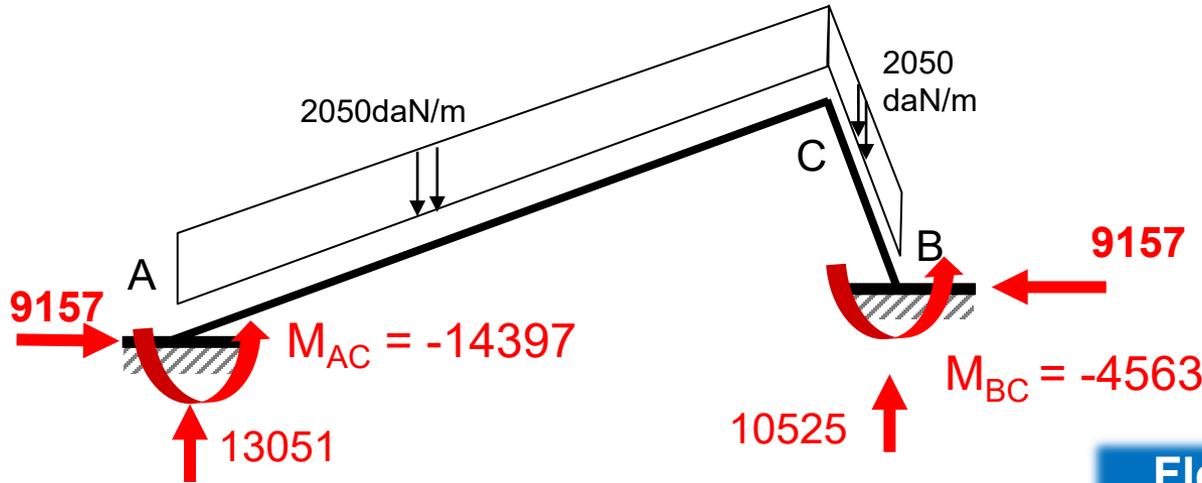
M (daNm)

N (daN)



13069

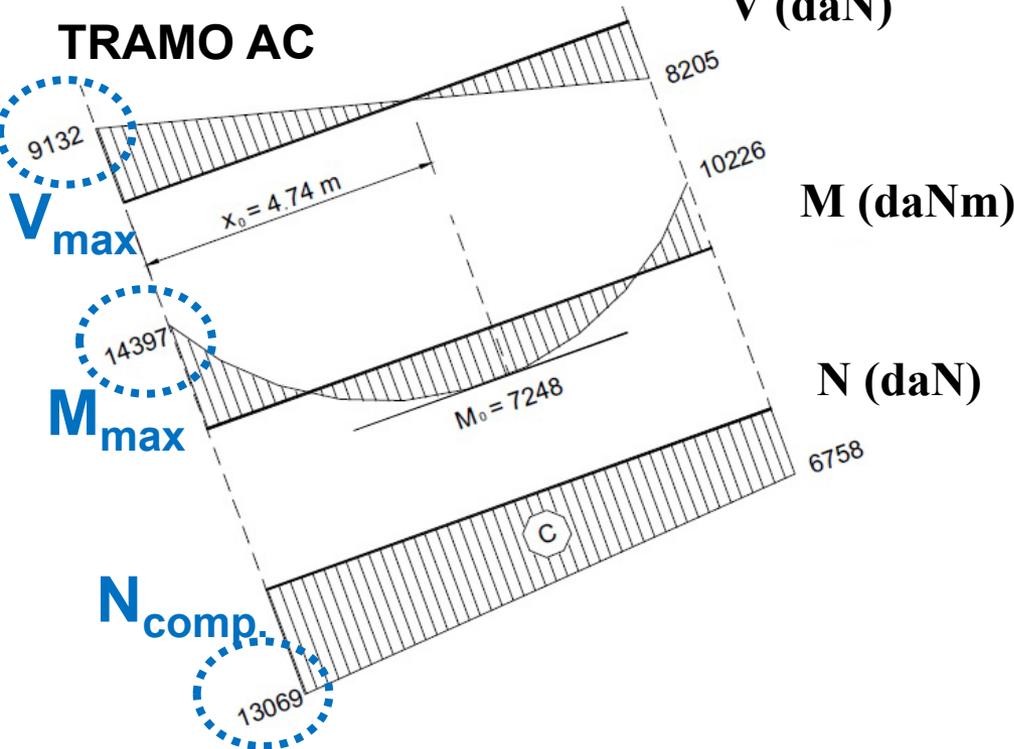
7. DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES



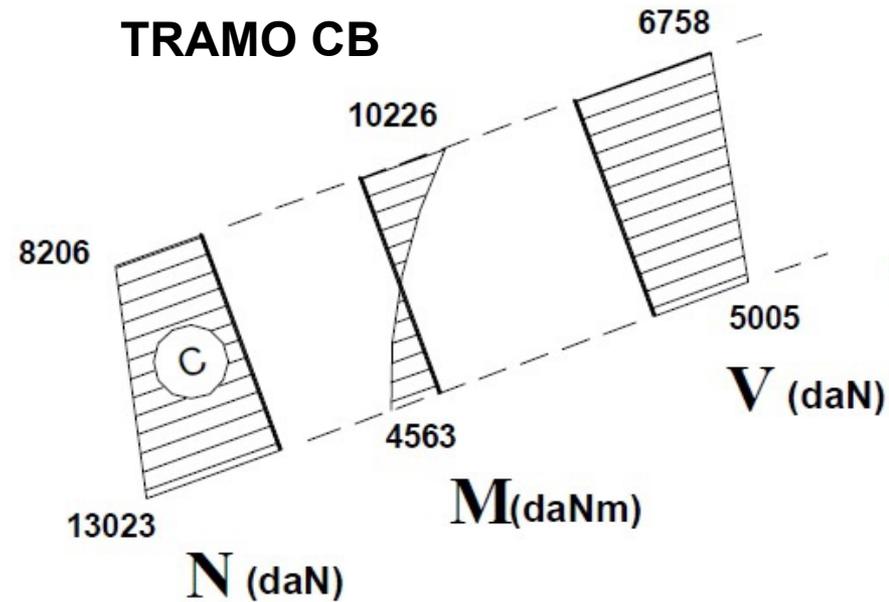
**Flexión
Compuesta**

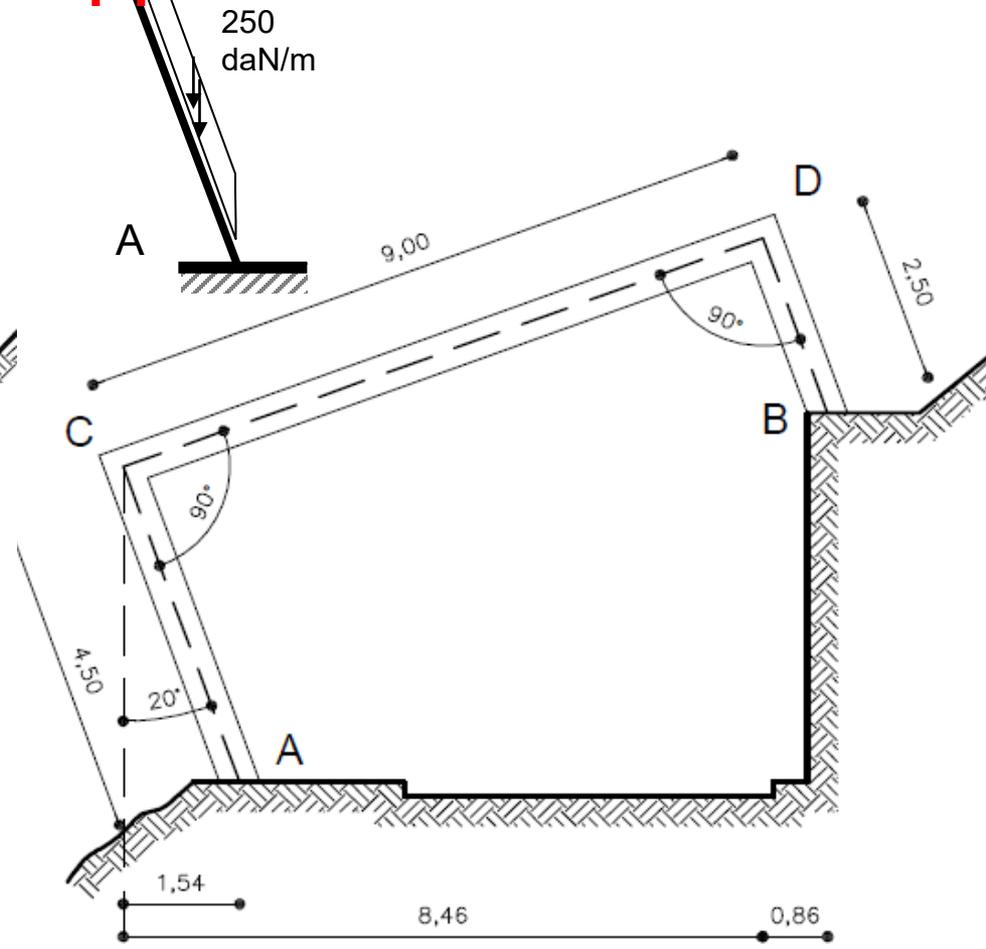
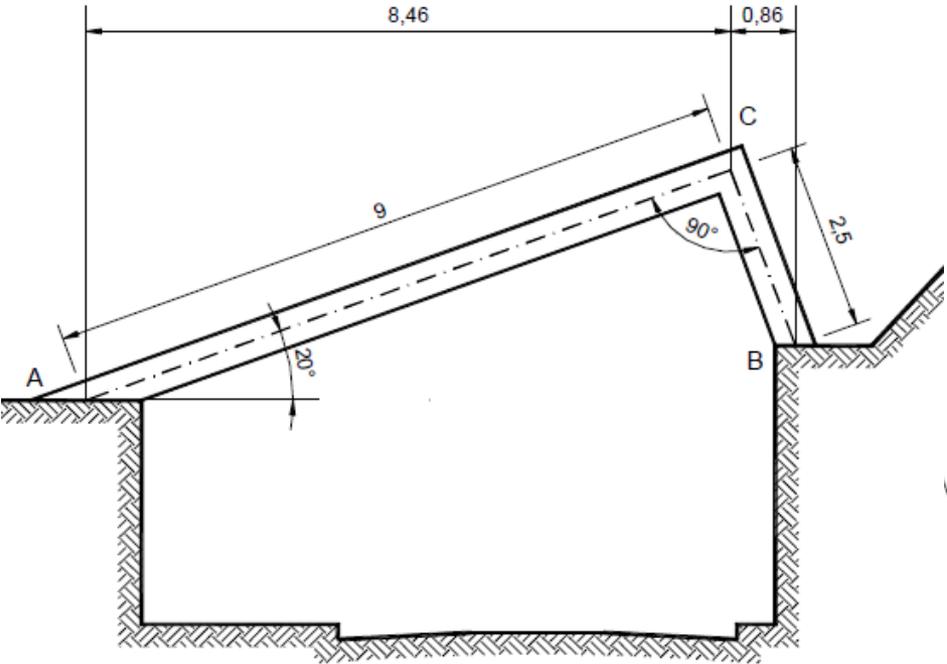
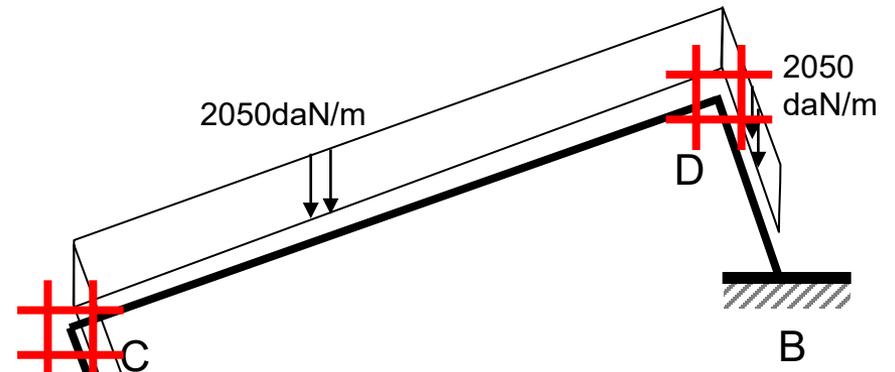
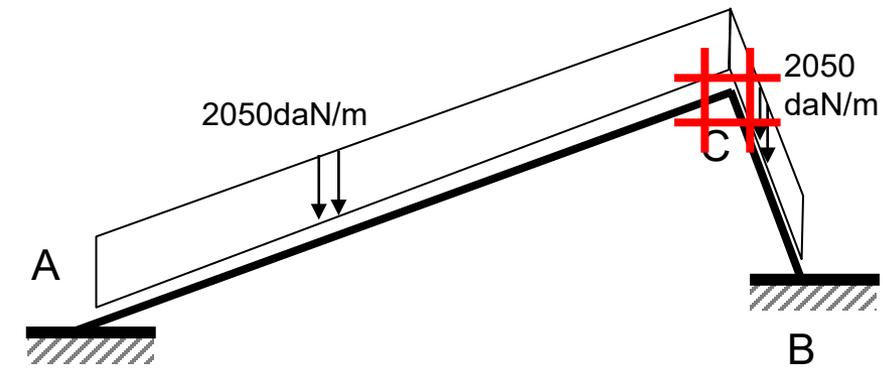
- (N) Axil
- (V) Cortante
- (M) Momento

TRAMO AC

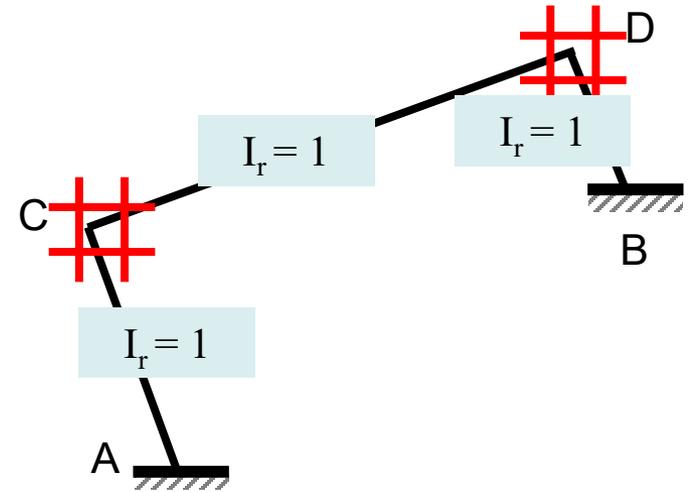
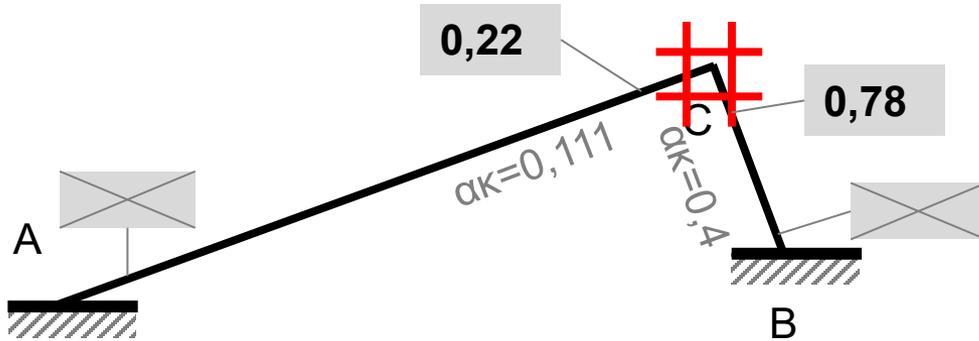


TRAMO CB





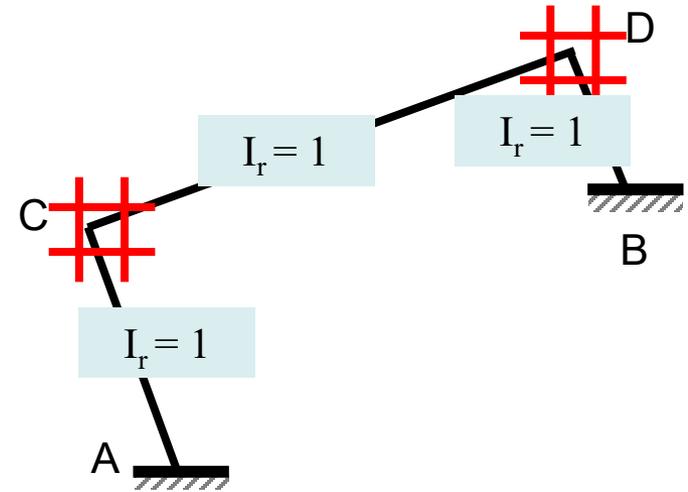
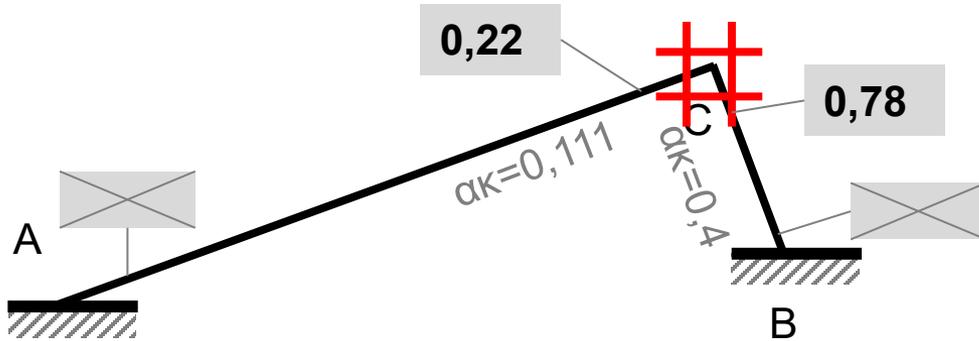
1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS



$$I_r = \frac{I_{tramo}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$

tramo	L (m)	I_r	K	α	$\alpha\kappa$	β
AC	4,5					
CD	9,0					
DB	2,5					

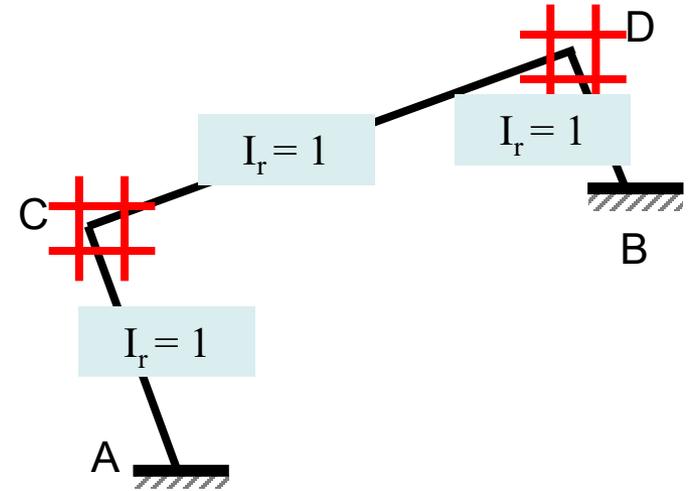
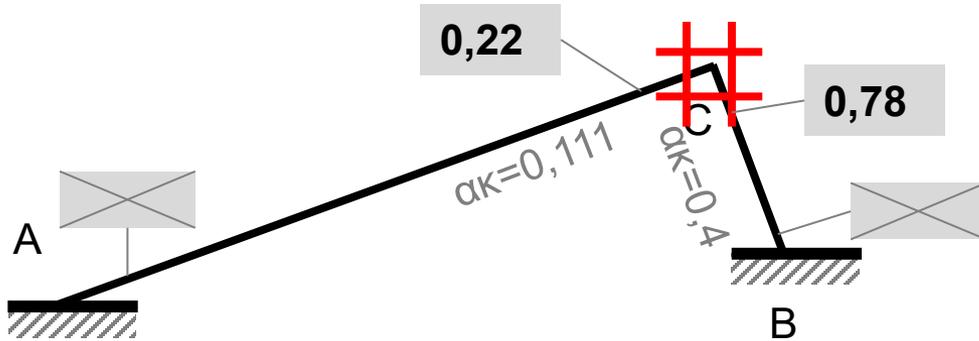
1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS



$$I_r = \frac{I_{tramo}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$

tramo	L (m)	I_r	K	α	$\alpha\kappa$	β
AC	4,5	1				
CD	9,0	1				
DB	2,5	1				

1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS



$$I_r = \frac{I_{\text{tramo}}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$

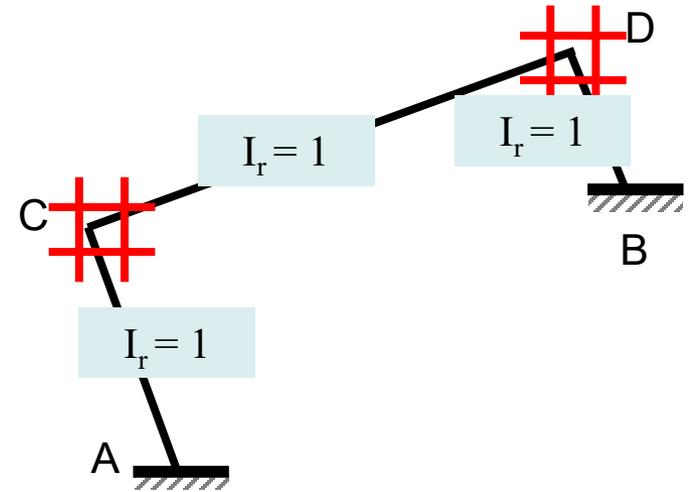
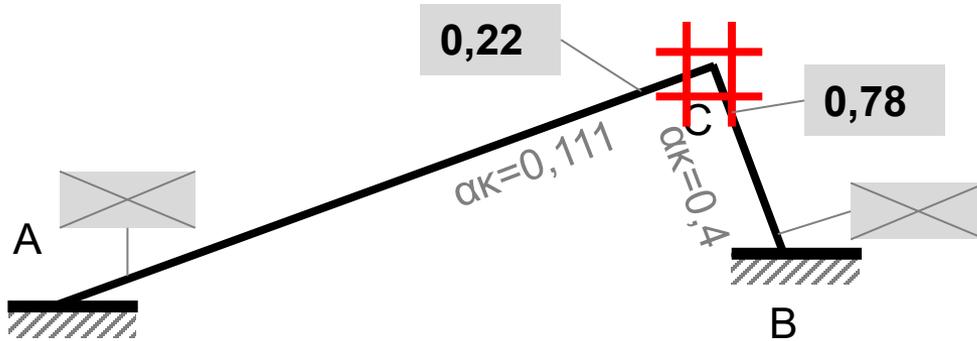
$$\kappa = \frac{E \cdot I}{L}$$

RIGIDEZ

$$\cong \kappa = \frac{I_r}{L}$$

tramo	L (m)	I_r	K	α	$\alpha\kappa$	β
AC	4,5	1				
CD	9,0	1				
DB	2,5	1				

1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS



$$I_r = \frac{I_{\text{tramo}}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$

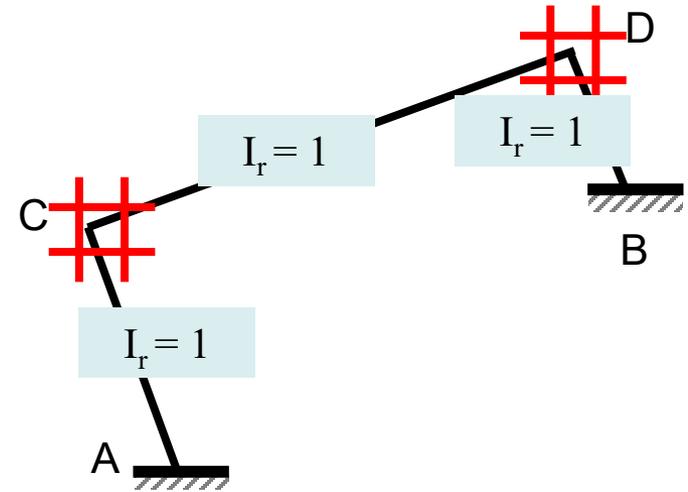
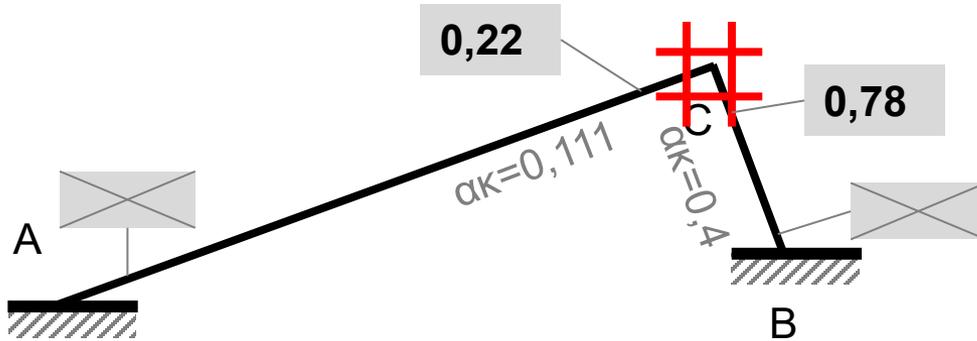
$$K = \frac{E \cdot I}{L}$$

RIGIDEZ

$$\cong K = \frac{I_r}{L}$$

tramo	L (m)	I_r	K	α	$\alpha\kappa$	β
AC	4,5	1	0,222			
CD	9,0	1	0,111			
DB	2,5	1	0,400			

1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS



$$I_r = \frac{I_{\text{tramo}}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$

$$\kappa = \frac{E \cdot I}{L}$$

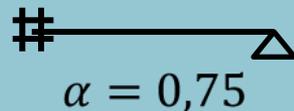
RIGIDEZ

$$\cong \kappa = \frac{I_r}{L}$$

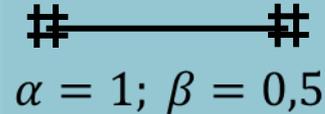
tramo	L (m)	I_r	K	α	$\alpha\kappa$	β
AC	4,5	1	0,222	1		0,5
CD	9,0	1	0,111	1		0,5
DB	2,5	1	0,400	1		0,5

$\alpha\kappa$ RIGIDEZ FLEXIONAL

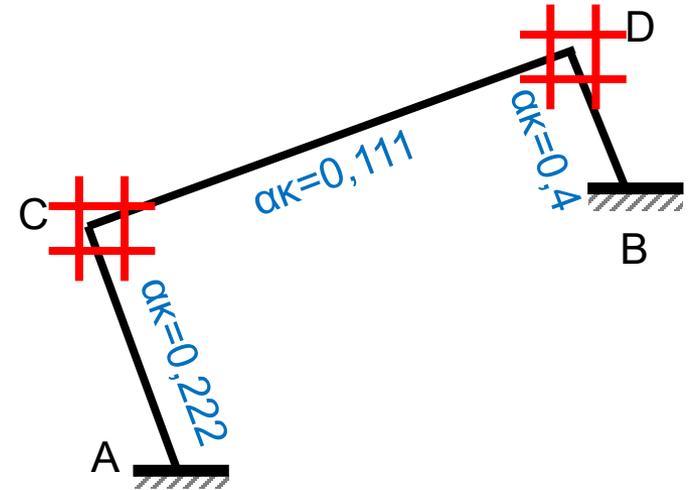
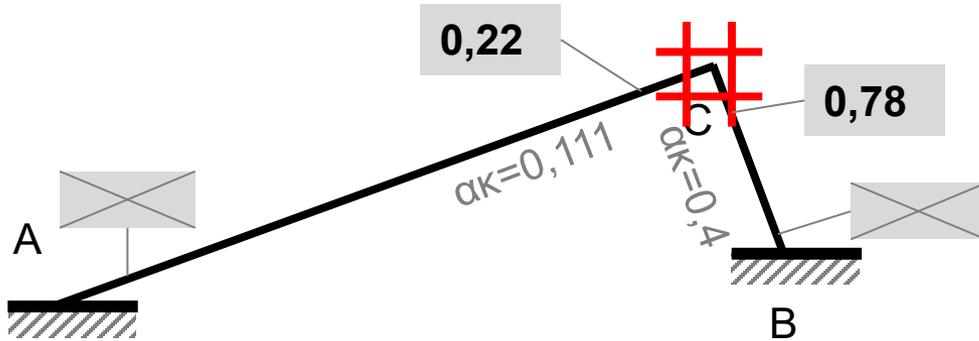
Para inercia cte.:



Para inercia cte.:



1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS



$$I_r = \frac{I_{\text{tramo}}}{I_{\text{mín.estruct.}}}$$

$$K = \frac{E \cdot I}{L}$$

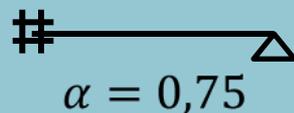
RIGIDEZ

$$\cong K = \frac{I_r}{L}$$

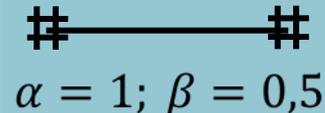
tramo	L (m)	I_r	K	α	αk	β
AC	4,5	1	0,222	1	0,222	0,5
CD	9,0	1	0,111	1	0,111	0,5
DB	2,5	1	0,400	1	0,400	0,5

αK RIGIDEZ FLEXIONAL

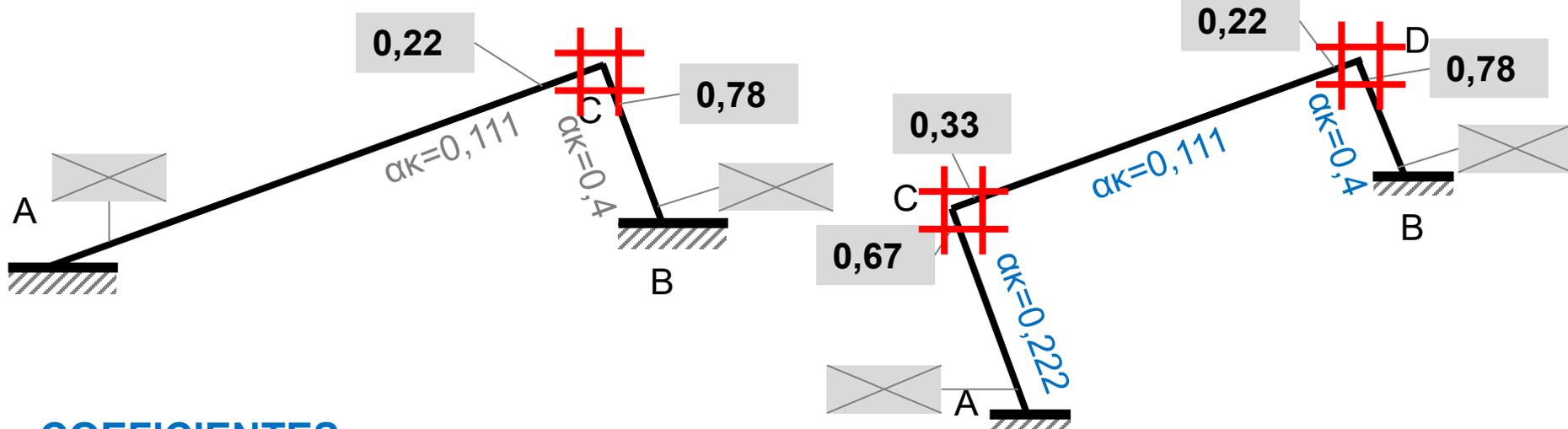
Para inercia cte.:



Para inercia cte.:



1. ANÁLISIS DE RIGIDEZ DE BARRAS



COEFICIENTES DE REPARTICIÓN

$$r_t = \frac{\alpha_t \cdot \kappa_t}{\sum \alpha_i \cdot \kappa_i}$$

tramo	L (m)	lr	K	α	$\alpha\kappa$	β
AC	4,5	1	0,222	1	0,222	0,5
CD	9,0	1	0,111	1	0,111	0,5
DB	2,5	1	0,400	1	0,400	0,5

NUDO C

$$\Sigma \alpha\kappa = 0,222 + 0,111 = 0,333$$

$$r_{CA} = \frac{0,222}{0,333} = 0,67$$

$$r_{CD} = \frac{0,111}{0,333} = 0,33$$

Suman 1

NUDO D

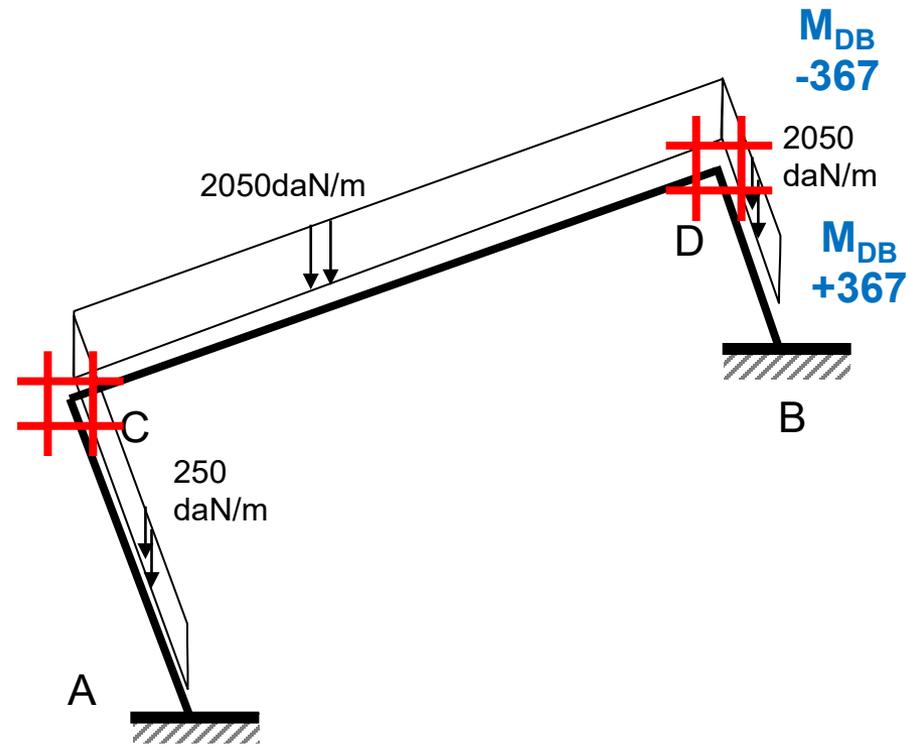
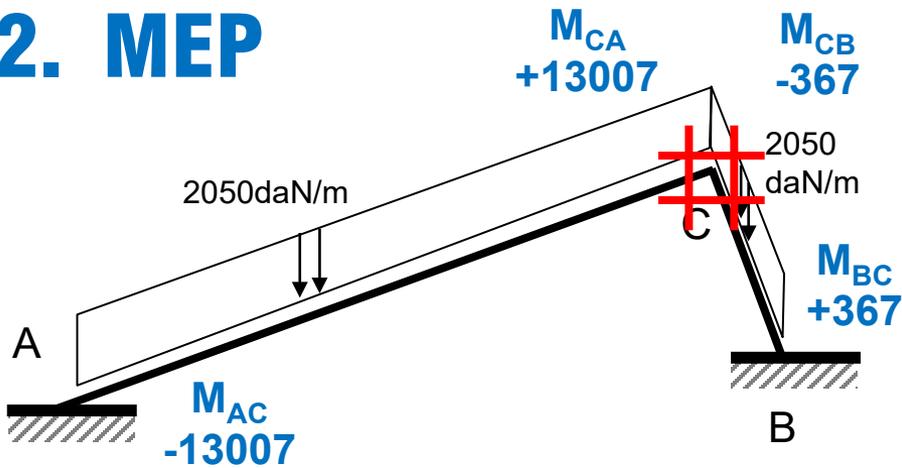
$$\Sigma \alpha\kappa = 0,111 + 0,400 = 0,511$$

$$r_{DC} = \frac{0,111}{0,511} = 0,22$$

$$r_{DB} = \frac{0,400}{0,511} = 0,78$$

Suman 1

2. MEP

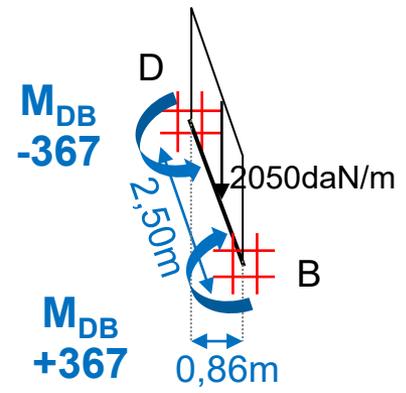


$$MEP = \frac{p_i \cdot L_h \cdot L_i}{12}$$

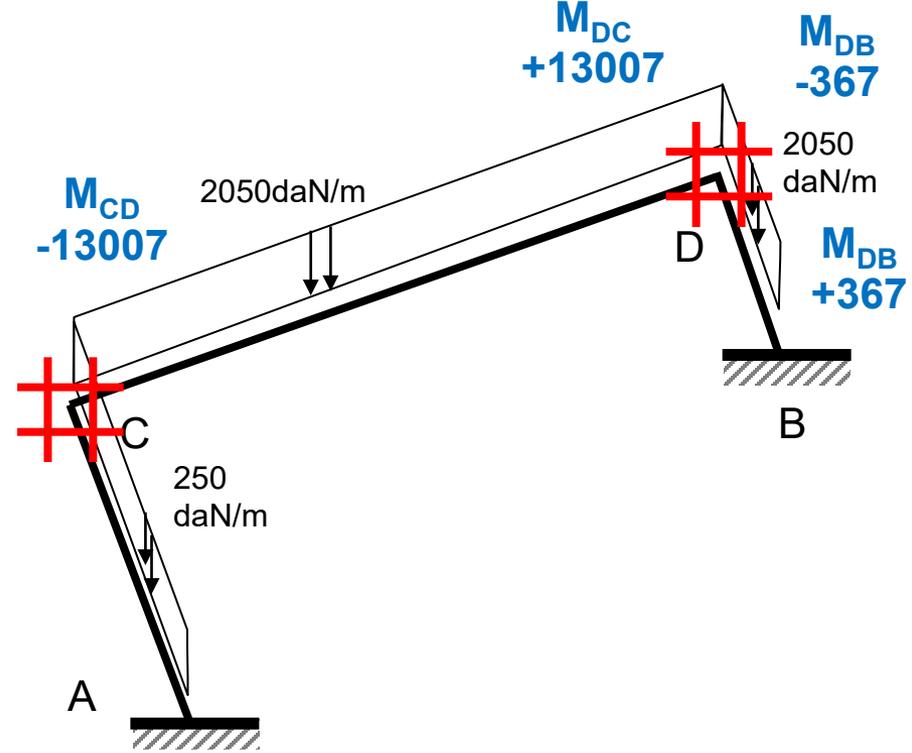
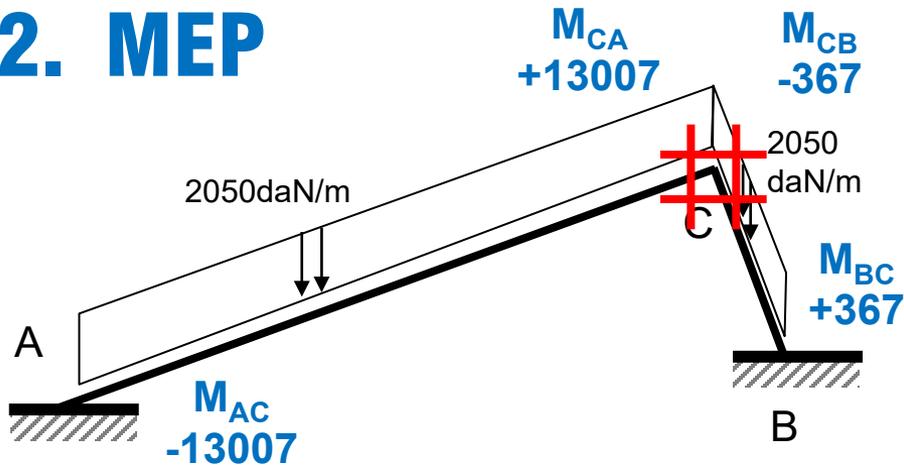
$$DB \quad M.E.P. = \frac{p \cdot l_h \cdot l_i}{12} = \frac{2050 \times 0,86 \times 2,5}{12} = 367 \text{ daNm}$$

REACCIONES Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PARA TRAMOS DE INERCIA CONSTANTE

CARGAS	Ra	Rb	Ma	Mb	Ma	Mb
	$\frac{pl}{2}$	$\frac{pl}{2}$	$\frac{1}{8} pl^2$	$\frac{1}{8} pl^2$	$\frac{1}{12} pl^2$	$\frac{1}{12} pl^2$

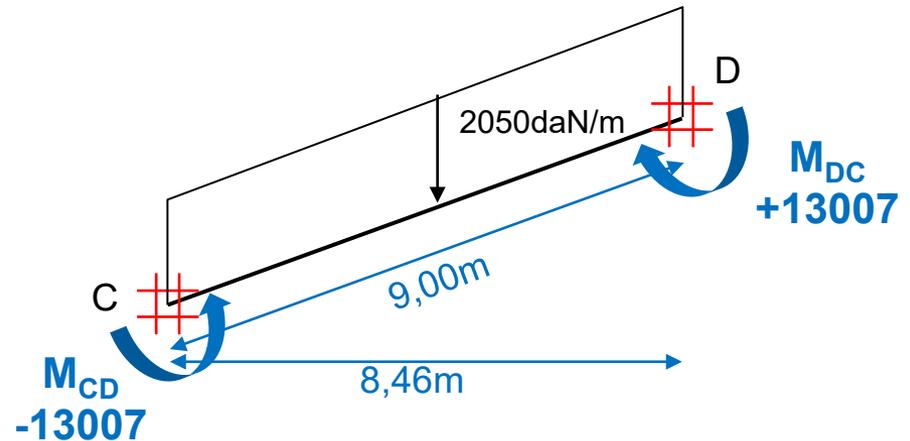


2. MEP

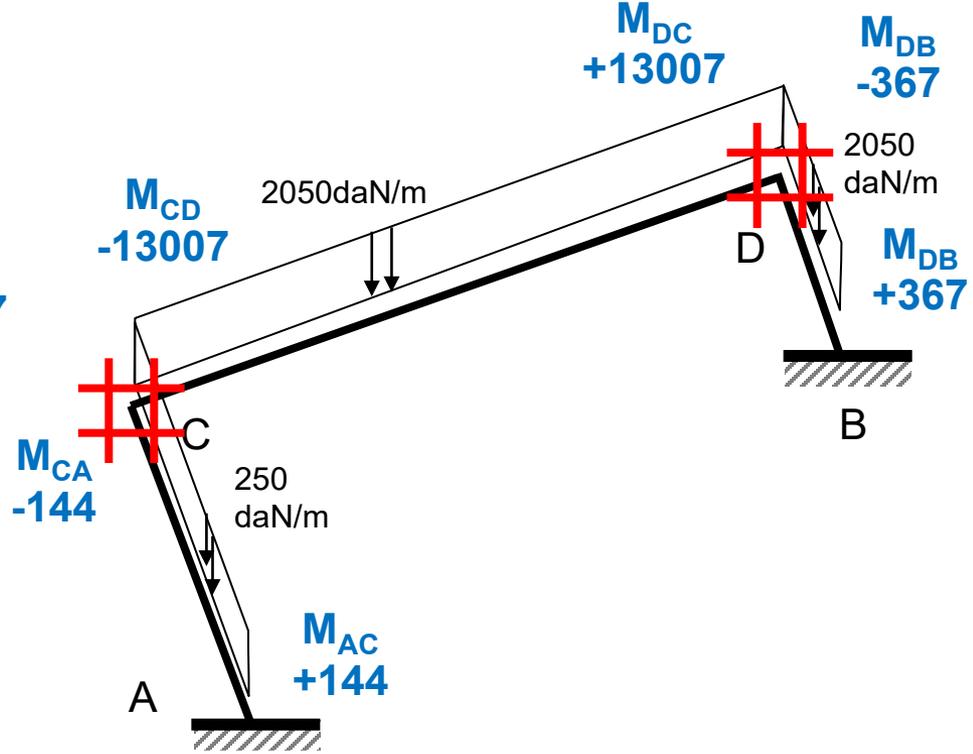
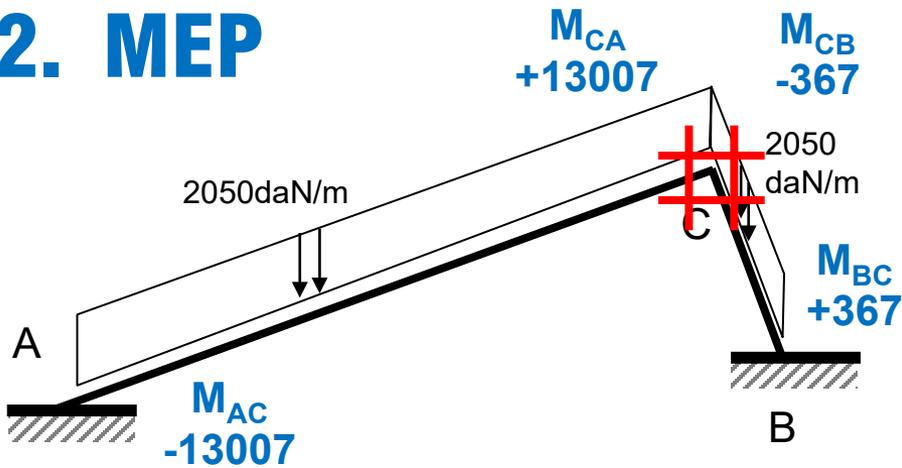


$$MEP = \frac{p_i \cdot L_h \cdot L_i}{12}$$

CD M.E.P. = $\frac{p \cdot l_h \cdot l_i}{12} = \frac{2050 \times 9 \times 8,46}{12} = 13007 \text{ daNm}$

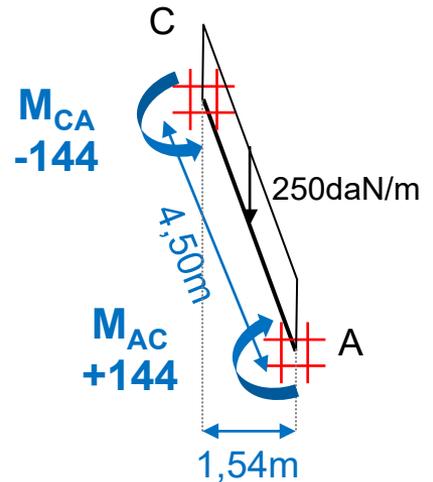


2. MEP



$$MEP = \frac{p_i \cdot L_h \cdot L_i}{12}$$

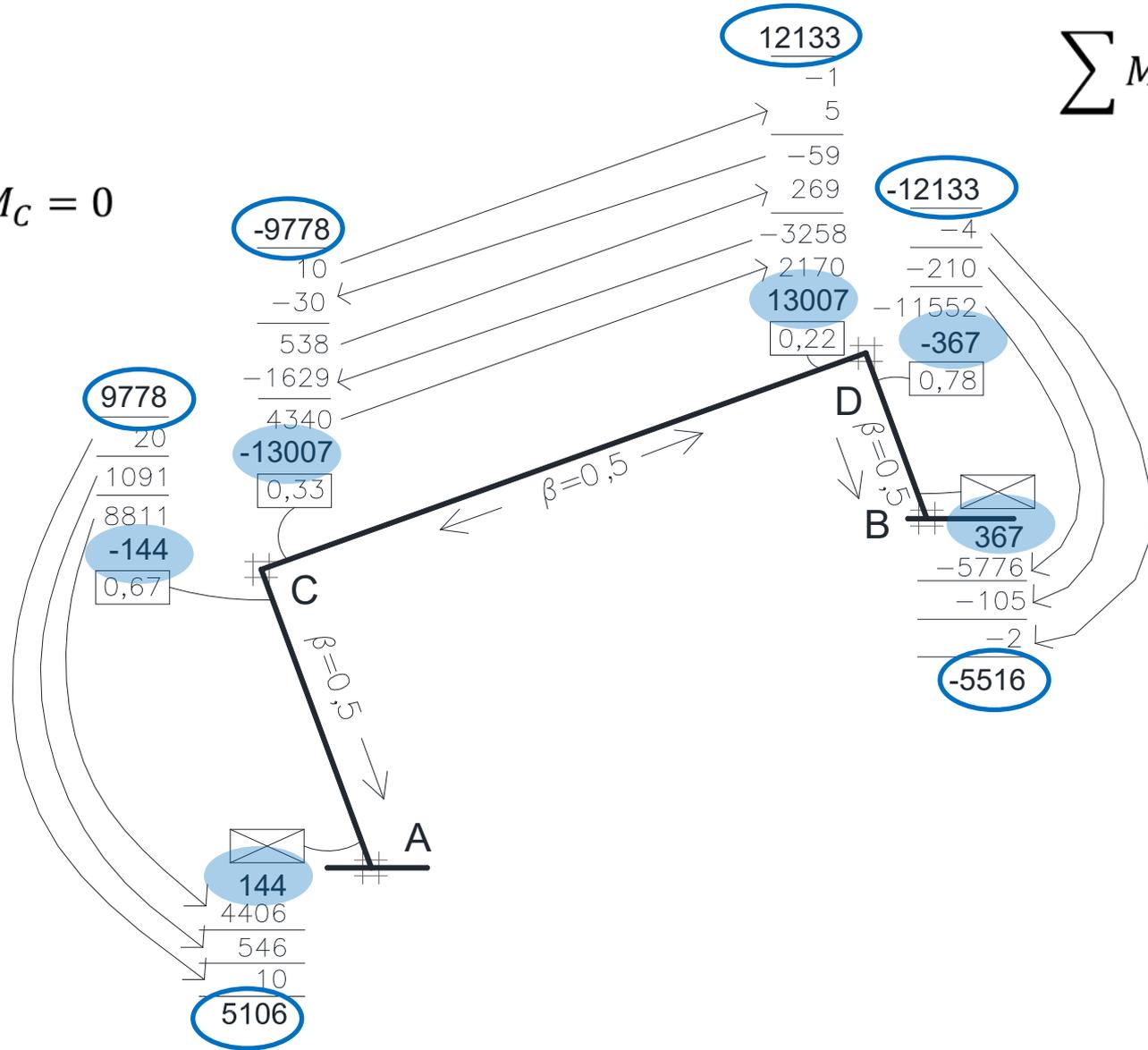
AC $M.E.P. = \frac{p \cdot l_h \cdot l_i}{12} = \frac{250 \times 4,5 \times 1,54}{12} = 144 \text{ daNm}$



3. ARTIFICIO DE CROSS

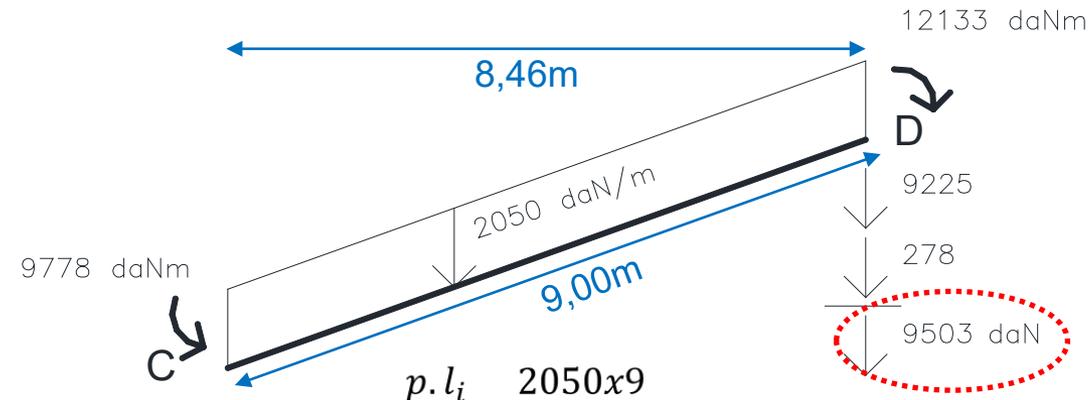
$$\sum M_C = 0$$

$$\sum M_D = 0$$



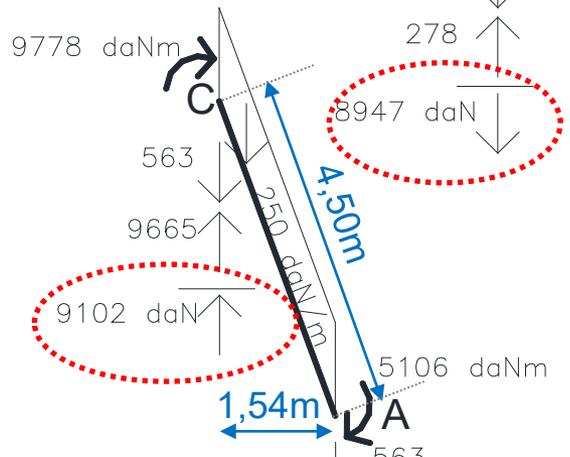
Se determinan las descargas (de cargas y de momentos) en los extremos de los tramos

4. DESCARGAS BARRA por BARRA



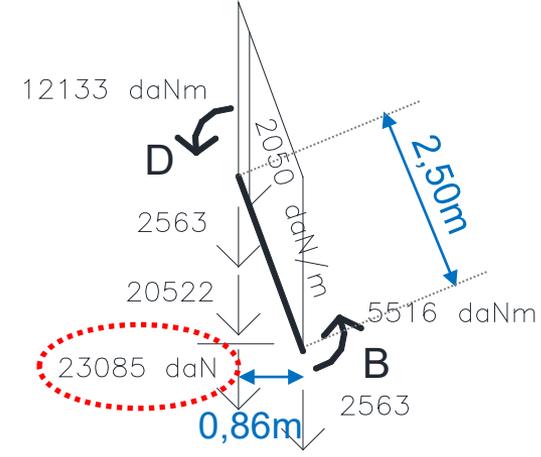
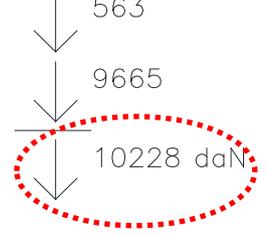
$$\frac{p \cdot l_i}{2} = \frac{2050 \times 9}{2}$$

$$\frac{-9778 + 12133}{8,46}$$



$$\frac{p \cdot l_i}{2} = \frac{250 \times 4,5}{2}$$

$$\frac{+9778 + 5106}{1,54}$$



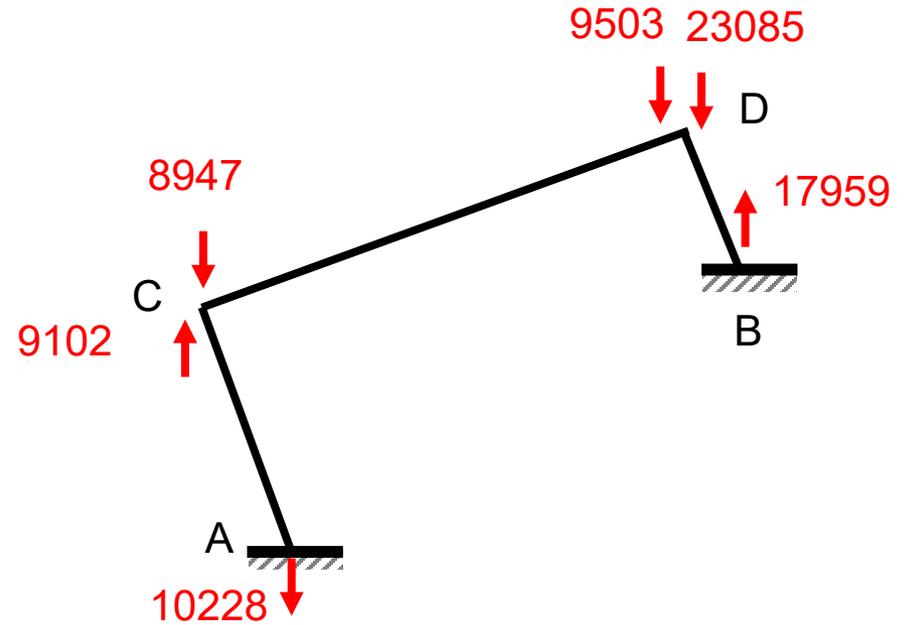
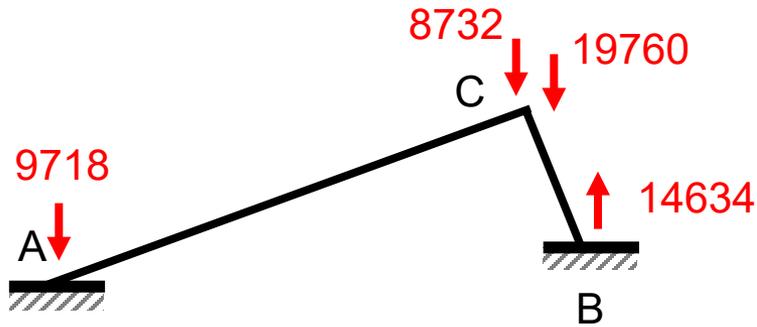
$$\frac{p \cdot l_i}{2} = \frac{2050 \times 2,5}{2}$$

$$\frac{-12133 - 5516}{0,86}$$



5. CAMINOS MATERIALES

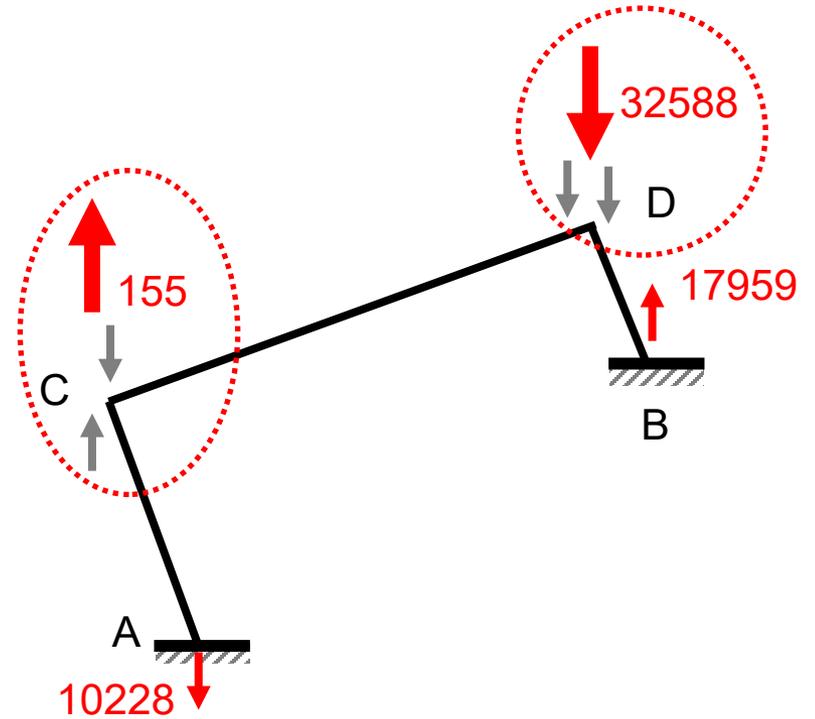
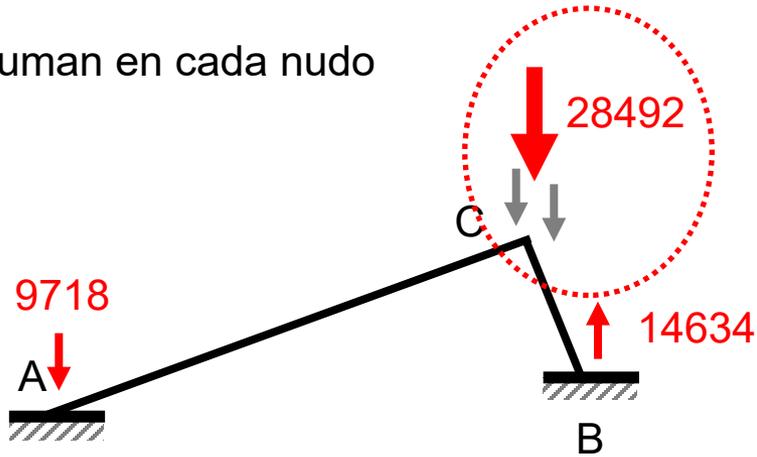
- A. se plantea la estructura completa con las descargas en los nudos antes obtenidas (en descargas barras por barra)
- B. se suman en cada nudo



5. CAMINOS MATERIALES

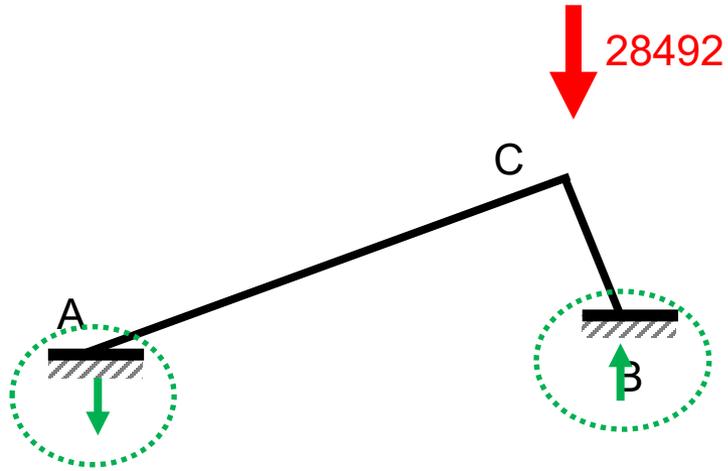
A. se plantea la estructura completa con las descargas en los nudos antes obtenidas (en descargas barras por barra)

B. se suman en cada nudo

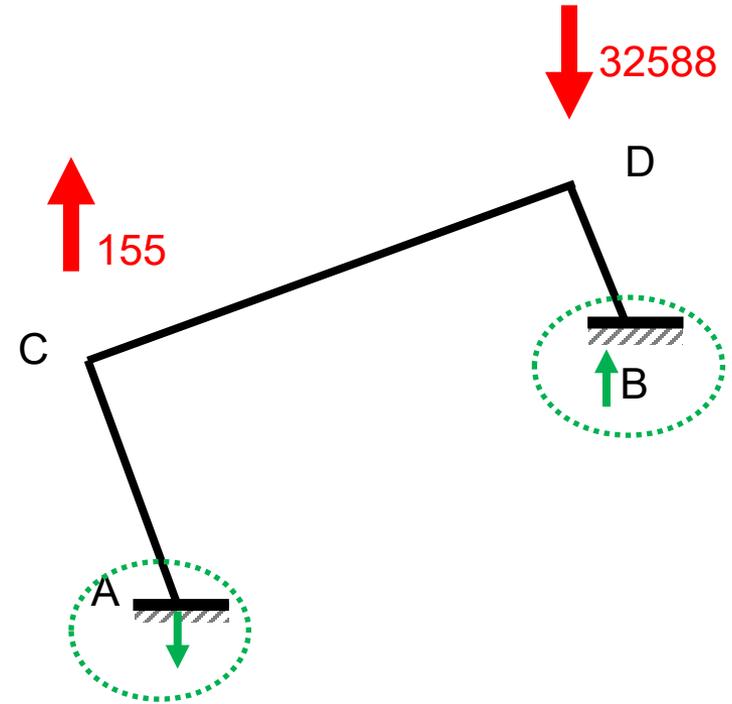


- C. se descomponen en caminos materiales, intentando llevarlas a los apoyos, donde deben encontrar su equilibrio

5. CAMINOS MATERIALES

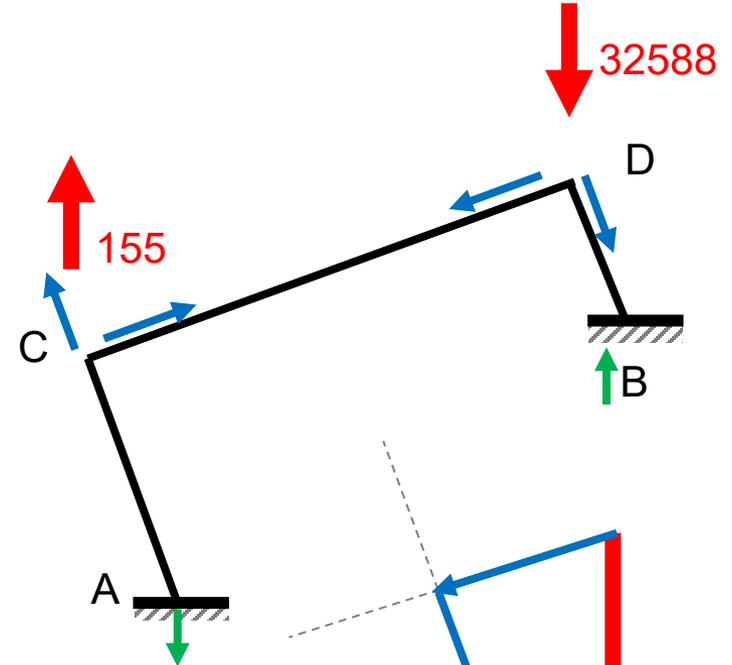
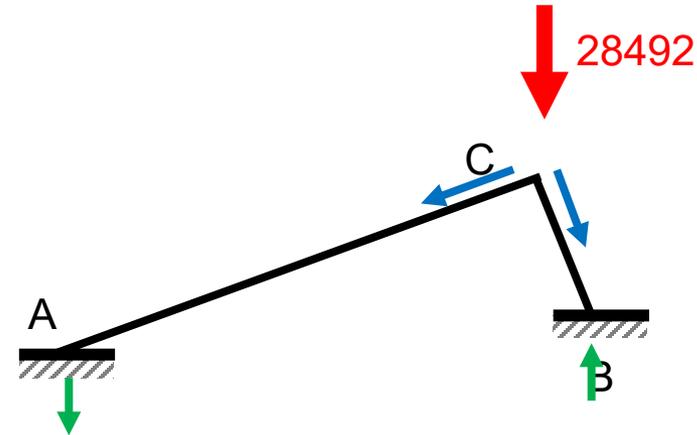


Fuerzas que encontraron su camino a los apoyos

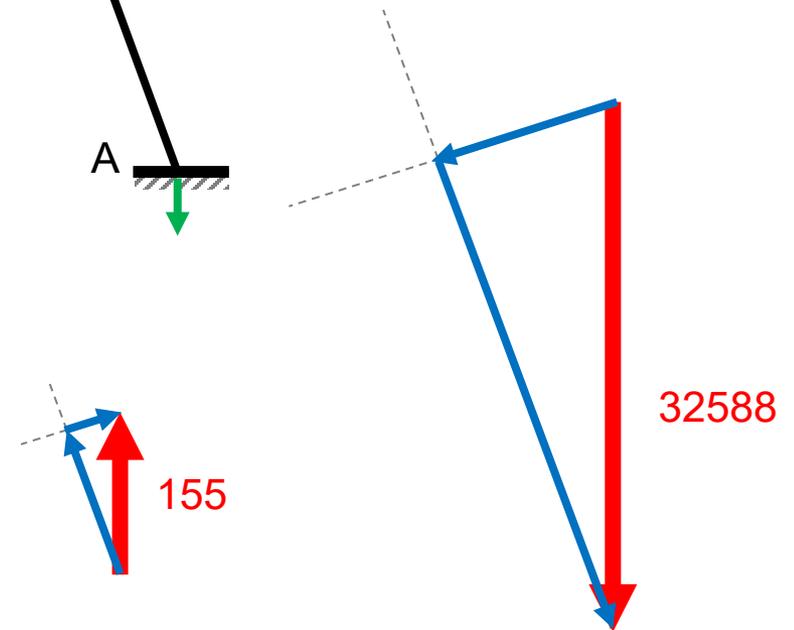
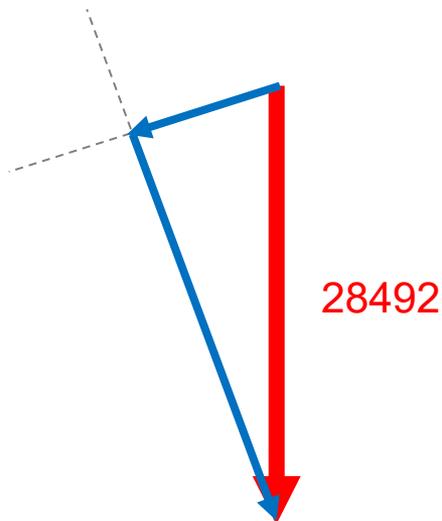


- C. se descomponen en caminos materiales, intentando llevarlas a los apoyos, donde deben encontrar su equilibrio

5. CAMINOS MATERIALES

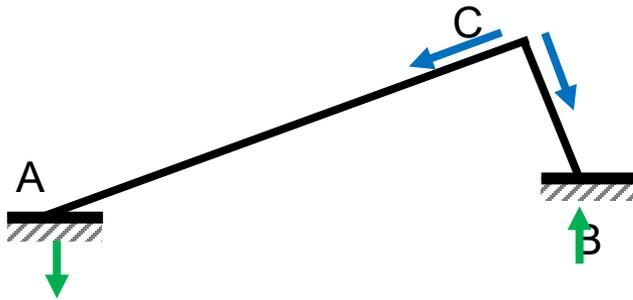


Se descomponen
en caminos
materiales

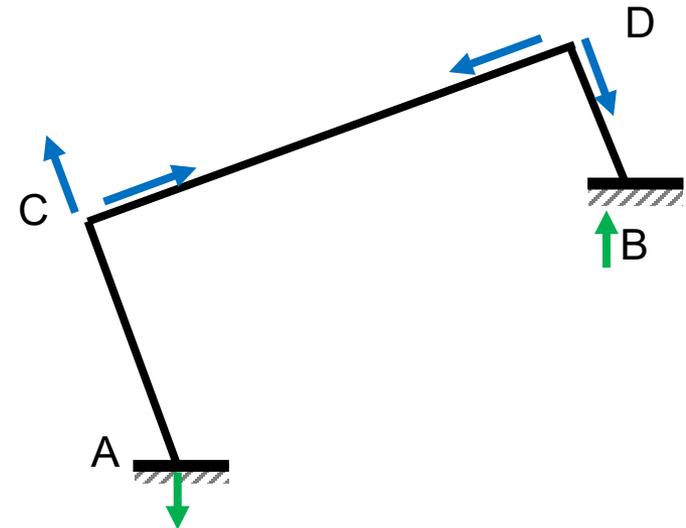


- C. se descomponen en caminos materiales, intentando llevarlas a los apoyos, donde deben encontrar su equilibrio

5. CAMINOS MATERIALES

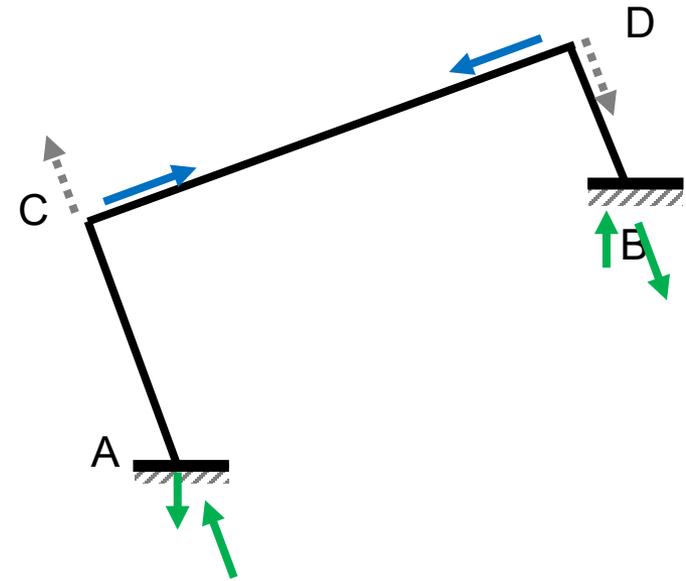
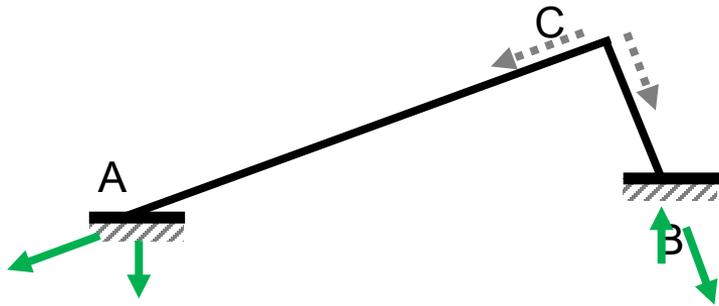


Se descomponen
en caminos
materiales

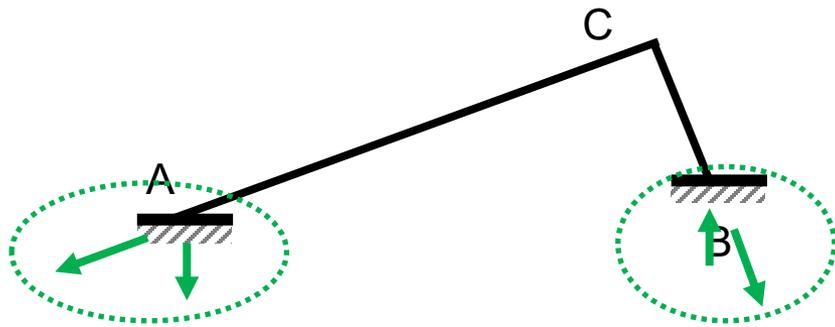


- C. se descomponen en caminos materiales, intentando llevarlas a los apoyos, donde deben encontrar su equilibrio

5. CAMINOS MATERIALES



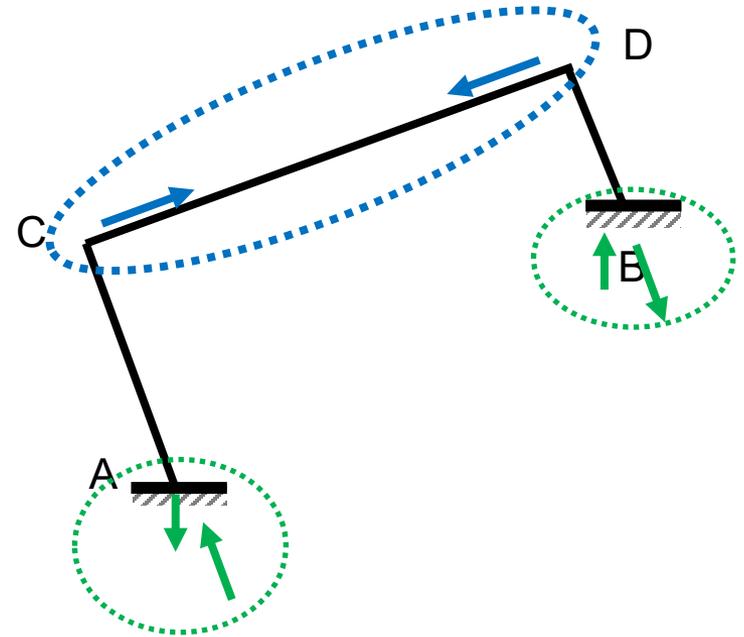
- C. se descomponen en caminos materiales, intentando llevarlas a los apoyos, donde deben encontrar su equilibrio



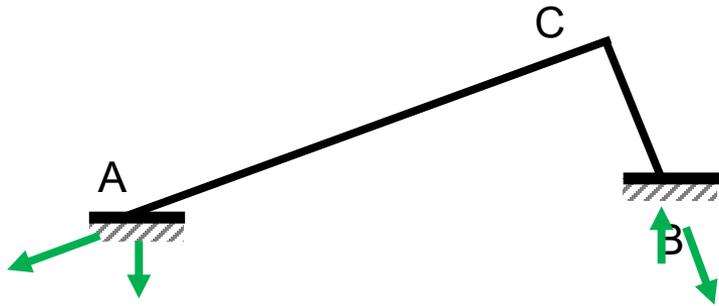
Fuerzas que encontraron su camino a los apoyos

5. CAMINOS MATERIALES

Fuerzas que NO encontraron su camino a los apoyos

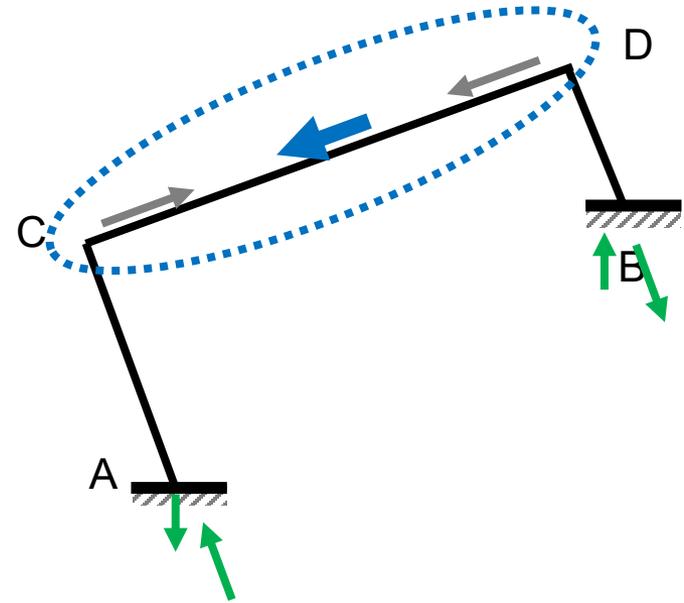


- C. se descomponen en caminos materiales, intentando llevarlas a los apoyos, donde deben encontrar su equilibrio



5. CAMINOS MATERIALES

Fuerzas que NO encontraron su camino a los apoyos

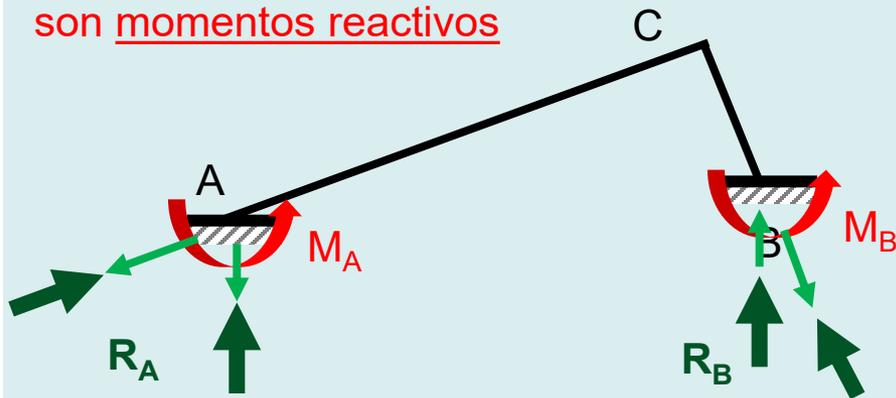


- C. se descomponen en caminos materiales, intentando llevarlas a los apoyos, donde deben encontrar su equilibrio

5. CAMINOS MATERIALES

Por lo cual, pueden darse dos casos:

Momentos hallados en el Cross son momentos reactivos



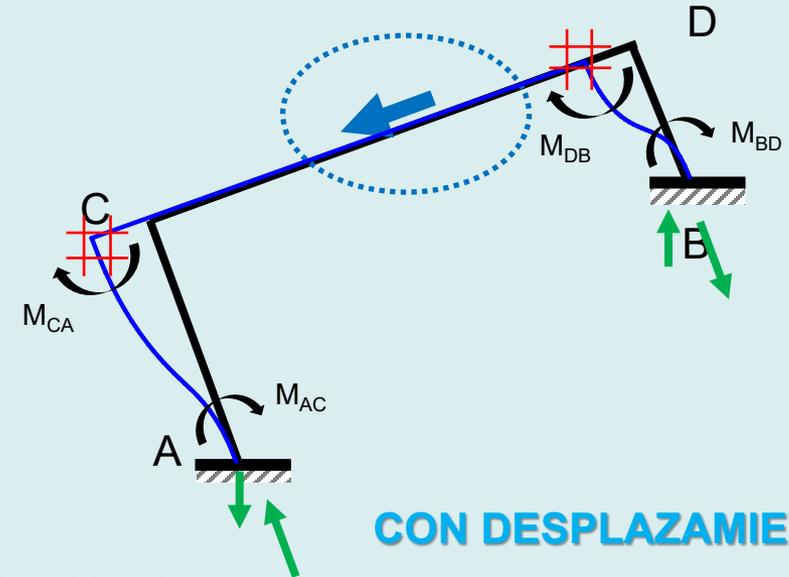
SIN DESPLAZAMIENTO

- a) Por caminos materiales, todas las descargas:
- van hacia los apoyos de la estructura, o
 - se equilibran a través de barras, solicitando axialmente las barras que transitan.

los momentos hallados en Cross

Son los MOM. FINALES

REACCIONES - SOLICITACIONES



CON DESPLAZAMIENTO

- b) Hay fuerzas que, por caminos materiales, no se pueden transmitir a los apoyos o equilibrar a través de las barras

fuerza de desviación (F)

Produce deformaciones por flexión

Afectan los Mom. hallados en Cross

1 Análisis de Rigidez de Barras

2 Momentos Empotramiento Perfecto (M.E.P.)

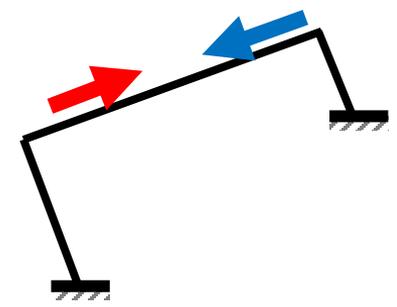
3 ARTIFICIO DE CROSS
(momentos en los extremos de las barras)

4 Descargas Tramo por Tramo

5 Caminos Materiales 

6 Reacciones en los Apoyos

7 Diagramas de Solicitaciones



a) A TRAVÉS DE CAMINOS MATERIALES las fuerzas llegan a los apoyos o se equilibran a través de barras:

SIN DESPLAZAMIENTO

b) Las fuerzas NO tienen CAMINO MATERIAL:

CON DESPLAZAMIENTO

- Debemos cuantificar los momentos que equilibran dicha fuerza (2ºCross):
(= Mom. 2º Cross)
- MOMENTOS FINALES =
(Mom. 1ºCross) + (Mom. 2ºCross)
- Descarga por barras **FINALES**
- Caminos Materiales **FINALES**
(verificando que no hay desplazamiento)