

**ESTABILIDAD DE LAS
CONSTRUCCIONES III**

LOSAS 1

CASOS DE LOSAS AISLADAS

CUERPO DOCENTE DE ESTABILIDAD III
2007

CUERPO DOCENTE DE ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES III

Arq. JORGE SCHINCA
Arq. ORLANDO LASSUS
Arq. MARÍA E. FERNÁNDEZ
Arq. FERNANDO RISCHEWSKI
Arq. LAURA DOMINGO
Arq. ALEJANDRO NOCETTI
Arq. JOSÉ L. SOLARES
Arq. SANTIAGO MERLO

LOSAS

CASOS DE LOSAS AISLADAS

PROLOGO

Esta nueva presentación del tema revisa y amplía a la anterior versión del año 1990 y responde a la forma en que el tema es tratado en la actualidad en el curso de Estabilidad de las Construcciones III.

En esta primera sección se aborda la consideración de los modelos correspondientes a una serie de casos de losas aisladas y con su plano medio horizontal. En próximas secciones se abordará el estudio de la continuidad y los casos de losas quebradas y con su plano medio inclinado.

En la exposición del tema se recoge la experiencia del dictado del mismo en los últimos 10 años, en él ha participado, cubriendo distintos aspectos, la totalidad del cuerpo docente del curso.

Como capítulo anexo se incluye el tratamiento de los modelos matemáticos que se aplican al tema y que no son desarrollados en el curso.

Febrero de 2007

CAPITULO I GENERALIDADES

Las placas son elementos estructurales (unidades funcionales estructurales) de carácter superficial es decir que en ellas dos de las dimensiones predominan sobre la tercera.

Están asociadas al hormigón armado como el material de construcción más idóneo, o quizás único, para materializarlas.

Las deformaciones que se producen están determinadas por las condiciones de apoyo y por la posición relativa entre el plano medio y la dirección de las cargas. Se distinguen así como distintos tipos de placas a muros, vigas altas y losas.

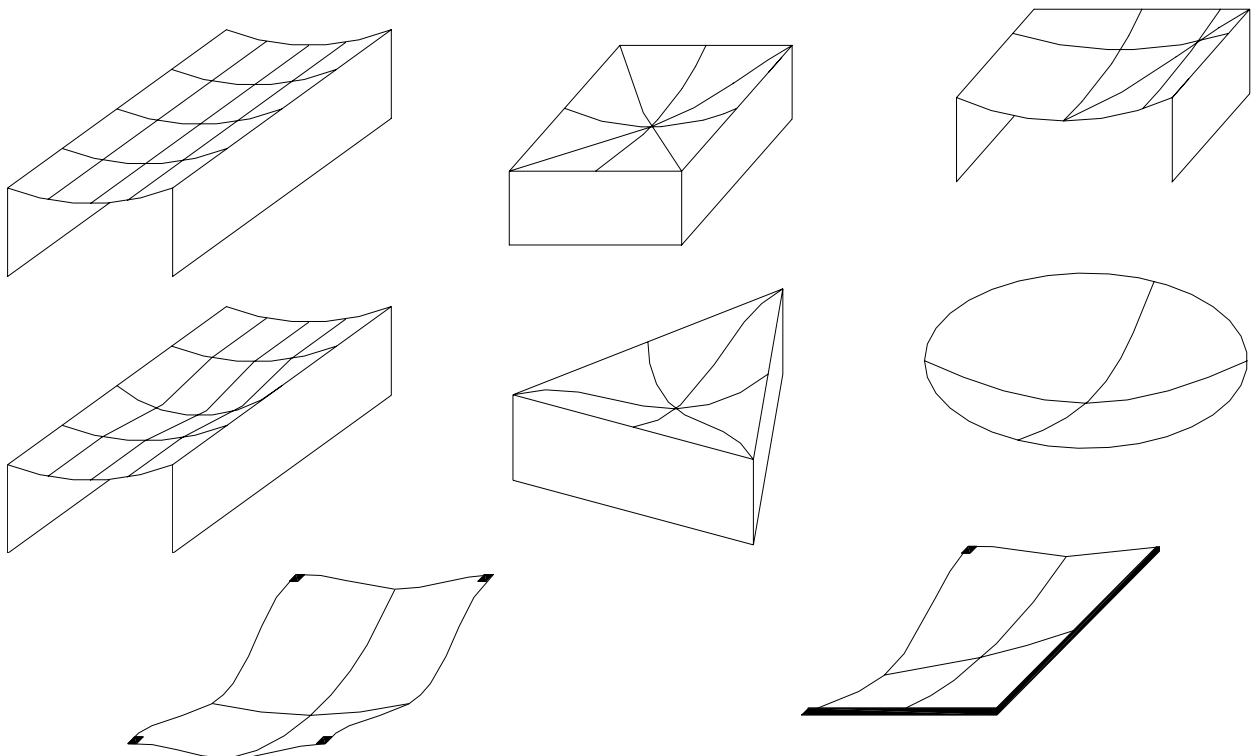
El uso más generalizado y también el primero que aparece en la historia es para estructurar cerramientos intermedios o superiores, el plano medio es horizontal o sensiblemente horizontal. En esta situación particular a las placas se las suele designar como losas.

En las losas la acción de las cargas es sensiblemente normal al plano medio, en consecuencia se producirá el descenso de los puntos que no pertenecen a los apoyos configurándose una superficie deformada que en la mayoría de los casos es de doble curvatura.

La superficie deformada presenta características derivadas de las condiciones de apoyo, carga o forma de la planta de la losa.

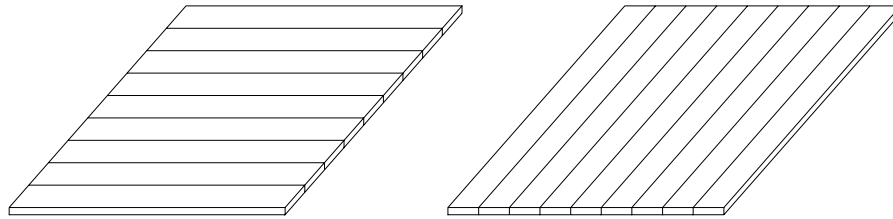
Los apoyos podrán ser puntuales o lineales y estos paralelos o concurrentes; las cargas superficiales, lineales o puntuales y la forma de la planta cualquiera.

En los siguientes gráficos se presentan algunos ejemplos y sus respectivas deformadas.

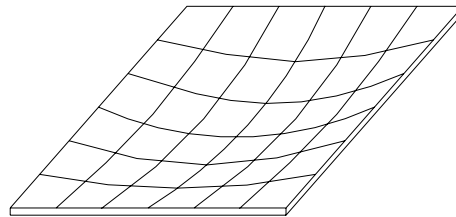


El estudio de un caso particular, una losa de planta rectangular simplemente apoyada en todo su perímetro y cargada uniformemente, permite establecer criterios de comportamiento y modelos de análisis que resultarán luego extrapolables a otros casos más complejos.

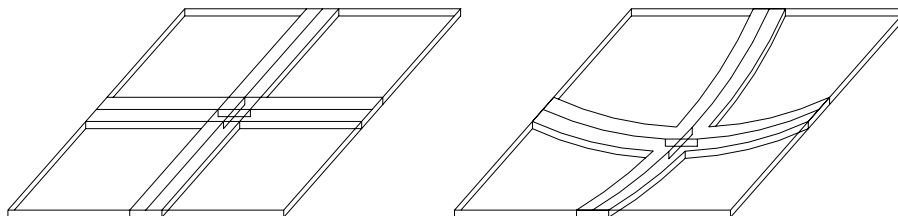
Para comprender el comportamiento de esta losa se la modeliza como dos conjuntos de fajas perpendiculares entre sí. Cada elemento de superficie de la losa pertenece a los dos sistemas de fajas y por lo tanto el total de carga que actúa sobre él influye en la deformación de las dos fajas que lo atraviesan, produciéndose descargas en las cuatro zonas de apoyo de las fajas.



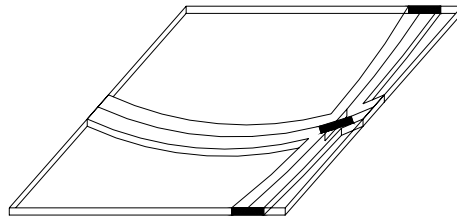
Las dos fajas se curvan, se flexan. Se visualiza así el trabajo a flexión en más de una dirección que es característico de las placas apoyadas en todo su contorno.



La deformación de las dos fajas centrales presenta una curvatura análoga a la que se produce en un tramo lineal (viga), igualándose los descensos máximos.

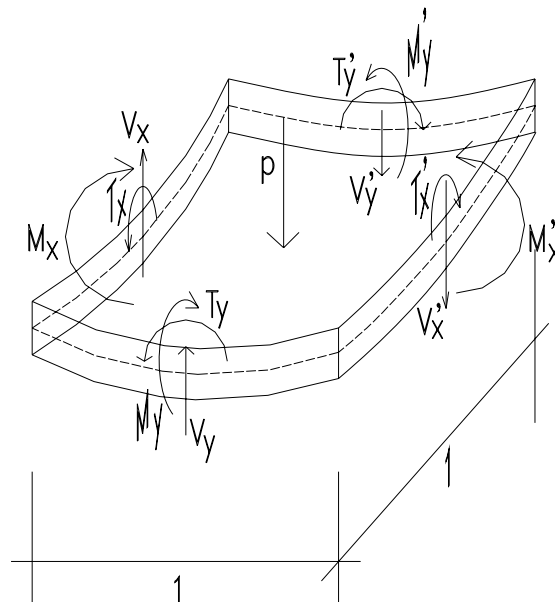


Para el resto de las fajas la deformación que se produce no es solamente una curvatura (flexión) sino que también resultan alabeadas (torsionadas) debido a que la compatibilidad de deformaciones entre los dos conjuntos de fajas hace que las secciones de una faja, tal como la que se grafica, giren con respecto a las de los apoyos que permanecen con sus lados en posición horizontal y vertical.



La capacidad resistente de las placas surge por lo tanto no solamente de su rigidez flexional, la resistencia a curvarse en ambas direcciones, sino también de la rigidez torsional es decir la resistencia a alabearse.

Por lo tanto si se toma un trozo de losa, de lados uno, sobre el que actúa una carga “p” se debe plantear que el equilibrio de ese trozo se logra por la existencia de momentos flectores M , fuerzas cortantes V y momentos torsores T . En la sección a la izquierda se tienen valores M_x , V_x y T_x , en la de la derecha valores M'_x , V'_x y T'_x , en la sección frontal valores M_y , V_y y T_y y en la posterior valores M'_y , V'_y y T'_y .



Tal como sucede en los elementos con forma de barra, de la interpretación de este equilibrio y de la relación entre las sollicitaciones y las deformaciones surgen las ecuaciones que posibilitan el estudio de las losas.

El conjunto de relaciones resultante es de mayor complejidad que en el caso de las barras y su resolución ha pasado por distintas aproximaciones, desde las primeras de Grashoff y Marcus hasta las actuales de los elementos finitos.

En el anexo se desarrolla el conjunto de ecuaciones y se da noticia de la aproximación mediante la aplicación de los elementos finitos.

En todos los casos la materialización será una lámina de hormigón armado, maciza o aligerada con la malla de acero ubicada en la proximidad de la cara traccionada.

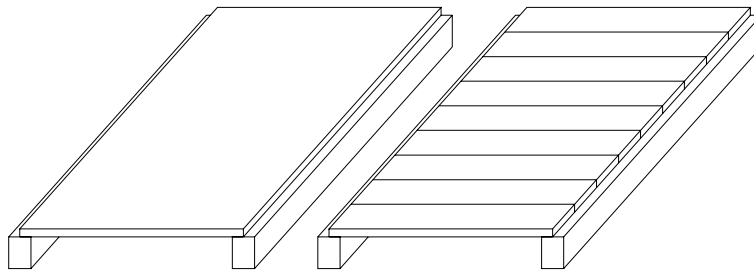
CAPITULO II

LOSA RECTANGULAR SOBRE APOYOS PARALELOS

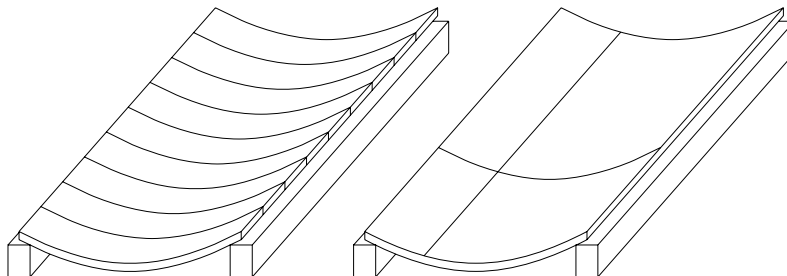
LOSA EN MENSULA

Caso general.

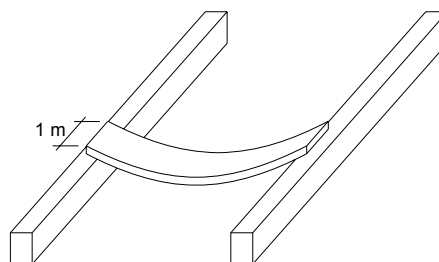
Este es el caso más simple de modelizar ya que en él las fajas resistentes tienen una única dirección, la perpendicular a los apoyos.



Si la carga es superficial uniforme todas las fajas reciben la misma carga y todas sufrirán una deformación igual. Todos los cortes perpendiculares a los apoyos son iguales entre sí y los cortes paralelos a los apoyos son líneas rectas, es una deformación de simple curvatura que se designa como cilíndrica. Los dos casos tratados en este capítulo son los únicos en los que no aparecen esfuerzos de torsión.



La determinación de solicitaciones y de deformaciones se puede realizar a través de una única faja representativa que por conveniencia operativa se toma de 1m de ancho. Determinadas la solicitaciones, momentos flectores y cortantes se puede proceder a su dimensionado aplicándose las mismas expresiones que se utilizan para el caso de barras con un ancho de 1m o 100cm.



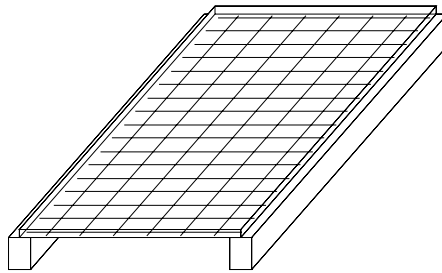
Los casos de continuidad hiperestática se pueden resolver aplicando los mismos criterios que se aplican en los casos de barras ya que, en este único caso de losas, el estudio se realiza siempre a través de una faja representativa que como tal es asimilable a una barra.

El espesor de la lámina no tiene, en la mayoría de los casos, incidencia en la formalización del proyecto por lo cual será fijado por razones de estabilidad (resistencia y deformación) y de economía.

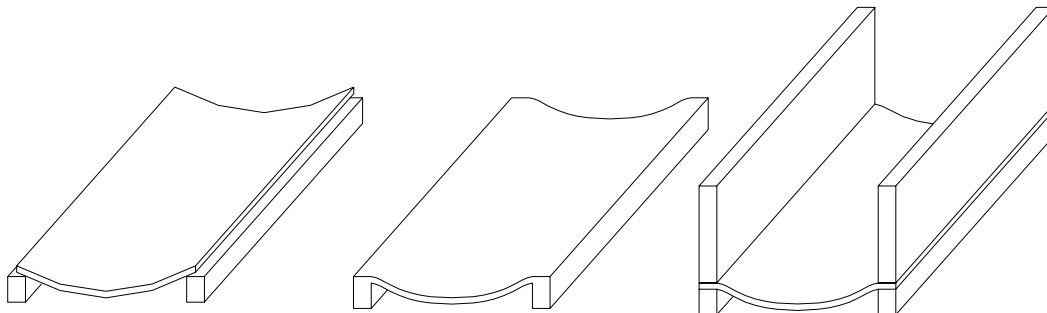
Se admite un espesor mínimo de 8cm aunque no es recomendable en nuestro medio especificar menos de 10, dado que se considera que espesores menores son demasiado sensibles a imperfecciones de obra.

De acuerdo a UNIT 1050 espesores mayores al treintavo de la luz eximen de la verificación por deformaciones.

La armadura, como en toda losa, forma una malla ubicada en las cercanías de la cara traccionada. Una de las direcciones de la malla, que será la realmente resistente, se forma con barras igualmente espaciadas colocadas en la dirección perpendicular a los apoyos. Se completa la malla con barras también igualmente espaciadas paralelas a los apoyos cuya necesidad no es resistente por lo cual se dice que es una armadura secundaria dispuesta a los efectos de dar unidad al conjunto y participar en la absorción de tracciones derivadas de razones térmicas y de retracción del hormigón.

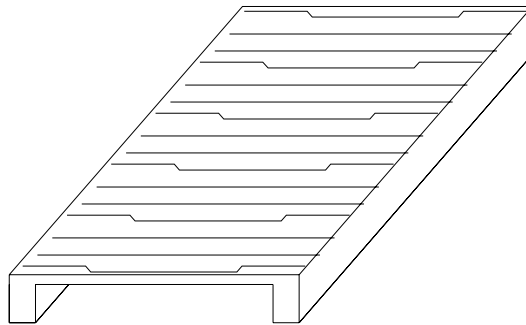


Este primer esquema de malla requiere correcciones ya que, aunque se haya hecho la hipótesis de simple apoyo, que produce tracciones solamente en la cara inferior, se aconseja que se coloque una cierta cantidad de armadura en la cara superior cerca de los apoyos ya que la continuidad con las vigas de apoyo o la existencia de cargas sobre el apoyo impiden el libre giro y se generan tracciones en la cara superior.



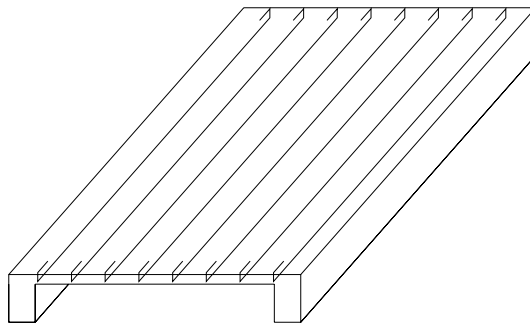
Surge así la habitual organización de la armadura combinando barras rectas y barras dobladas que pasan de una cara a la otra. UNIT 1050 plantea que la armadura que se ubique en la cara

superior sea un tercio de la armadura resistente, respetando esta recomendación surge como módulo básico de barras para conformar la armadura resistente la combinación de dos rectas y una doblada.

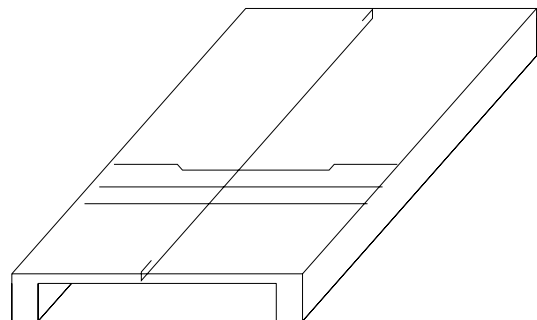
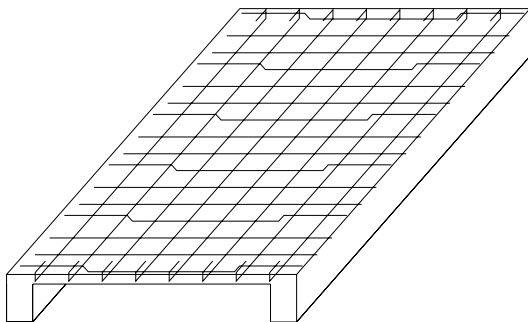


En los casos de bordes sin continuidad el doblado se realiza al quinto de la luz, en los bordes con continuidad se respetará el diagrama de momentos.

La armadura secundaria debe tener una capacidad resistente igual a un quinto de la capacidad resistente de la armadura principal y se organizará de manera que proteja al borde libre de posibles fisuraciones prolongándose por la cara superior de la losa una dimensión igual a dos veces el espesor.



La malla presenta por lo tanto la organización que se representa en las siguientes figuras, la primera representa la totalidad y la segunda la tipología de barras.

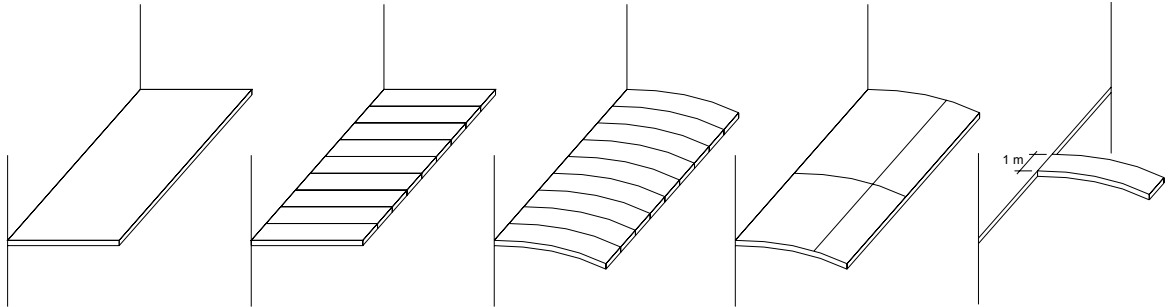


La separación entre barras en las dos direcciones no debe superar el doble del espesor de la losa ni ser mayor a 20 cm.

Para los espesores habituales de losas macizas que se utilizan en el medio se recomienda que el diámetro máximo de las barras sea 12 mm.

Caso de losa en ménsula.

Todo lo expresado en cuanto al modelo de comportamiento de la losa apoyada en lados paralelos es aplicable a la losa en ménsula apoyada en una única línea.

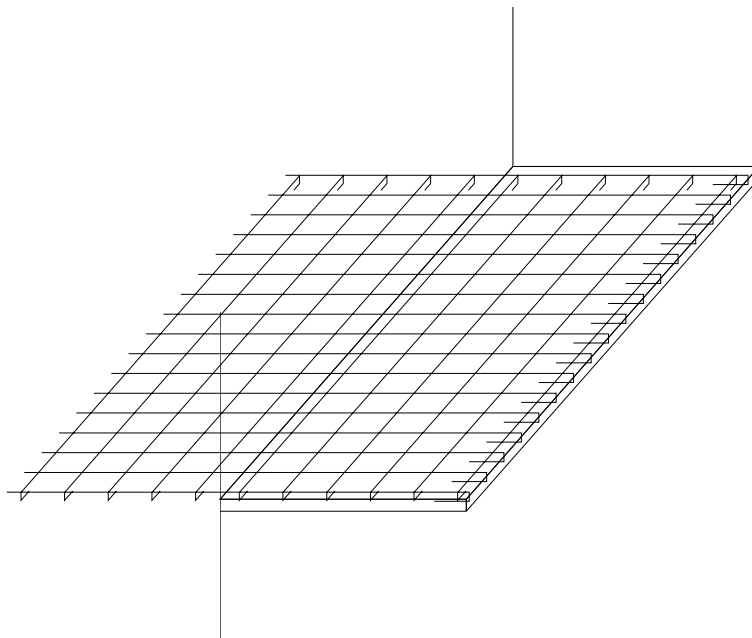


La deformación indica que las tracciones se dan sobre la cara superior y que el descenso mayor se da en el borde libre paralelo al apoyo.

El dimensionado se dará a partir del momento en el apoyo determinado de acuerdo con las leyes de la estática. La verificación de deformaciones se hace innecesaria de seguir lo recomendado por UNIT 1050 si el espesor de la losa es mayor al doceavo de la luz.

La malla que se asocia a este tipo de losa está formada en su totalidad, barras resistentes y secundarias, por barras rectas que al llegar a los bordes libres se prolongan por la cara inferior una longitud igual a dos veces el espesor.

Esta malla se debe prolongar dentro de la losa que es continua con la ménsula y que posibilita su equilibrio.



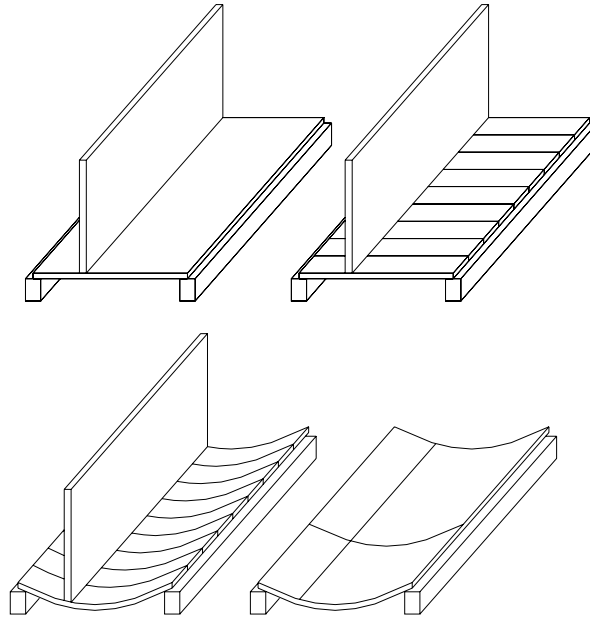
La separación entre barras en las dos direcciones no debe superar el doble del espesor de la losa ni ser mayor a 20 cm.

Para los espesores habituales de losas macizas que se utilizan en el medio se recomienda que el diámetro máximo de las barras sea 12 mm.

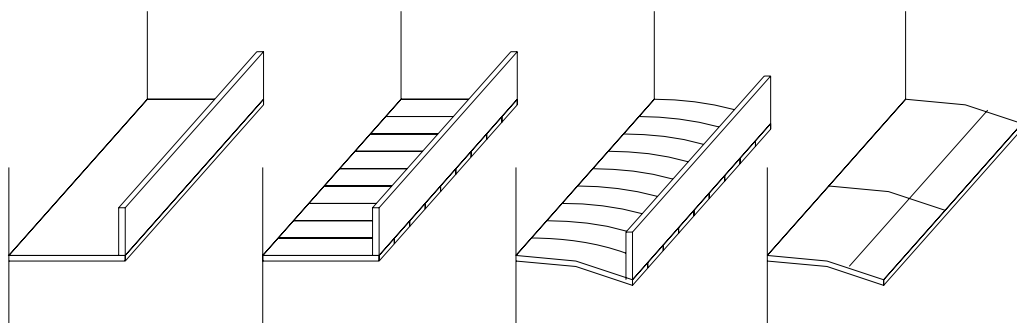
Casos especiales de cargas.

Interesa analizar el caso de la incidencia de la existencia de un muro, carga lineal sobre la losa. Se generan dos situaciones tipo: el muro paralelo a los apoyos y el muro perpendicular a los apoyos.

El primer caso no difiere sustancialmente del caso general ya que la deformación sigue siendo cilíndrica dado que la carga de muro afecta a todas las fajas por igual.



Las losas en ménsula se comportan análogamente.



En ambos casos al determinarse las solicitaciones debe hacerse intervenir en la faja representativa la carga puntual que representa la acción del muro.

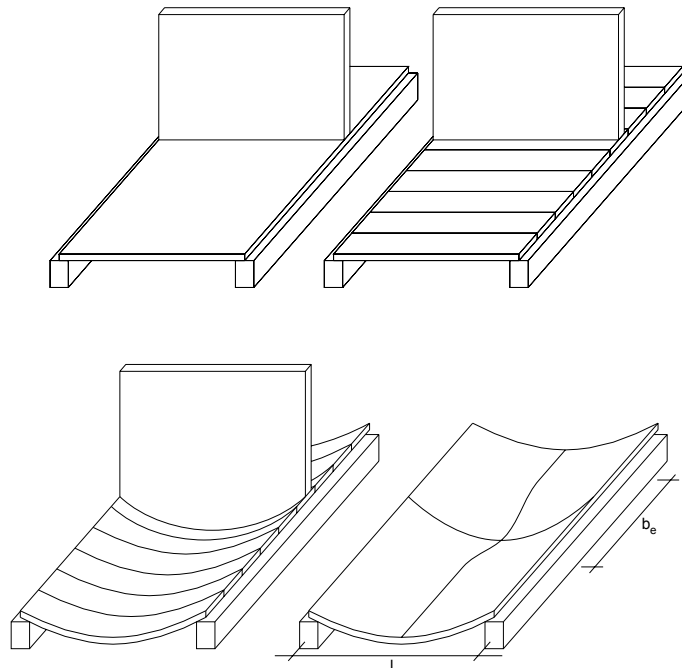
Cuando el muro es perpendicular a los apoyos se debe tener en cuenta que la deformación deja de ser cilíndrica ya que las fajas directamente afectadas por la acción del muro tendrán mayores descensos que el resto.

Se presenta por lo tanto en parte de la losa una deformación de doble curvatura permaneciendo la deformación cilíndrica en las zonas alejadas del muro.

Se debe evaluar el ancho de la zona afectada por el muro, b_e y el momento, M_2 , que afecta a las fajas paralelas a los apoyos que dejan de ser rectas en esa zona.

El ancho b_e es función de la luz, l , de la losa, según Leonhardt, Hormigón Armado, se puede estimar que:

$$b_e = 0,625 \cdot l$$



Para operar en este caso se transforma la carga lineal del peso del muro en una carga uniforme en el rectángulo $l \cdot b_e$ resultante de dividir el peso total del muro entre dicha superficie.

Con esta carga ficta se determina el momento que se debe adicionar en las dos direcciones a los momentos que produce la carga uniforme general de la losa.

En el caso de una losa aislada simplemente apoyada resultan los siguientes valores:

$$p_m = \frac{P}{l \cdot b_e}$$

$$M_1 = \frac{p \cdot l^2}{8} + \frac{p_m \cdot l^2}{8}$$

$$M_2 = \frac{p_m \cdot l^2}{8}$$

$$M_0 = \frac{p \cdot l^2}{8}$$

Siendo:

P = peso total del muro

p_m = carga uniforme equivalente al peso total del muro

l = luz de la losa

b_e = ancho de la zona afectada por la acción del muro

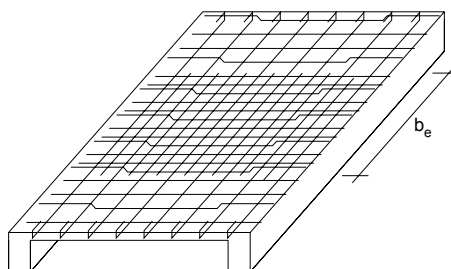
p = carga uniforme general de la losa

M_1 = momento flector correspondiente a las dirección perpendicular a los apoyos en la zona de acción del muro

M_2 = momento flector correspondiente a las dirección paralela a los apoyos en la zona de acción del muro

M_0 = momento flector correspondiente a las dirección perpendicular a los apoyos en la zona fuera de la acción del muro

La organización de armaduras reflejará la existencia de distintas zonas dentro de la losa. La armadura resistente será mayor en la zona afectada por el muro. La armadura secundaria se transforma en resistente en la misma zona y generalmente será también mayor que en el resto, esta diferencia se agregará como complemento debiéndose mantener la armadura secundaria básica formada por barras enteras de borde libre a borde libre.



En el apartado 51.2.4.2 de UNIT 1050 se encuentra el desarrollo para otros tipos de cargas especiales.

Losas nervadas.

Cuando las necesidades resistentes exigen grandes alturas para la losa, puede ser conveniente incorporar huecos a la misma, huecos que eliminen parte del hormigón de la zona traccionada por el flector, esto es posible ya que las losas suelen tener un dimensionado sobreabundante con respecto al esfuerzo cortante. El material restante, que forma los nervios y la carpeta, resulta suficiente para las exigencias de esta sollicitación.

Los huecos se pueden lograr con moldes que pueden quedar o no incorporados a la construcción.



Se conforma de este modo una pieza nervurada o nervada que puede ser asimilada a un conjunto de vigas en forma de T. La norma UNIT 1050, apartado 51.3, fija criterios de dimensionado:

- la separación máxima entre ejes de nervios es 70 cm.
- el espesor de la carpeta superior no debe ser menor a 5 cm. ni al décimo de la distancia libre entre nervios.
- el ancho del nervio no debe ser inferior a 5cm.
- la verificación al cortante debe realizarse de la misma forma que en las vigas.
- se deben disponer nervios transversales que garanticen la uniformidad de la deformación de los nervios longitudinales.

A los efectos instrumentales del dimensionado, en especial para el caso de losas continuas se recomienda ver la publicación: Estabilidad II – Losas – Arq. Chamlian, Olceda 2003, páginas 5 a 11.

En la aplicación de esta solución se deben tener en cuenta aspectos formales debido al aspecto de la cara inferior en el caso de que se usen moldes extraíbles y especial atención merece el respeto a los recubrimientos de las barras dentro de los nervios ya que si las mismas no quedan correctamente protegidas se pueden originar severos daños durante la vida útil de la estructura.

CAPITULO III

LOSA RECTANGULAR APOYADA EN TODO SU PERÍMETRO

La descripción de este caso y su modelo de comportamiento fueron vistos, en el Capítulo I – Generalidades, para explicar el comportamiento genérico de las losas.

Para la determinación de solicitaciones, conociendo la geometría de la losa y las cargas, se deben resolver las ecuaciones diferenciales que expresan el equilibrio de un trozo elemental de losa y la relación entre las cargas y las deformaciones¹, es decir siguiendo el mismo proceso que se realiza para las estructuras en forma de barra.

$$\frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 T}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} = p \text{ (ecuación de equilibrio)}$$

$$\frac{\delta^4 \omega}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 \omega}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 \omega}{\delta y^4} = \frac{p}{D} \text{ (relación carga-deformación)}$$

Esta resolución es, a diferencia con las barras, un problema matemático complejo que solamente puede ser atacado por aproximación.

El tema ha sido abordado a lo largo del tiempo y se fueron adoptando soluciones para el mismo acordes con las herramientas de cálculo de que se disponía.

Graschoff y Marcus, cuya resolución es la base de la mayor parte de las tabulaciones existentes en la bibliografía, se aproximaron al problema mediante el estudio de la compatibilidad de deformaciones en el punto de máxima. Esta aproximación tiene total vigencia frente a la resolución manual del caso de losas rectangulares apoyadas en todo el perímetro.

Existen tablas que permiten abordar las solicitaciones para los tipos de carga más habituales en las estructuras de edificios.²

En la actualidad al disponerse de ordenadores se posibilita la aplicación del método de los elementos finitos que da una aproximación mayor y fundamentalmente permite ampliar los casos a estudiar.

¹ p = valor de la carga uniforme

M_x = momento flector en el sentido x

M_y = momento flector en el sentido y

T = momento torsor

ω = función que expresa la deformada de la losa

h = altura de la losa

E = módulo de deformación longitudinal el hormigón

ν = módulo de Poisson del hormigón

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

² En la publicación Tablas para el proyecto de estructuras del IC se cubren cargas uniformes, hidráulicas y lineales y todas tienen el mismo tipo de presentación determinándose las solicitaciones según la geometría de la losa y el total de carga actuante.

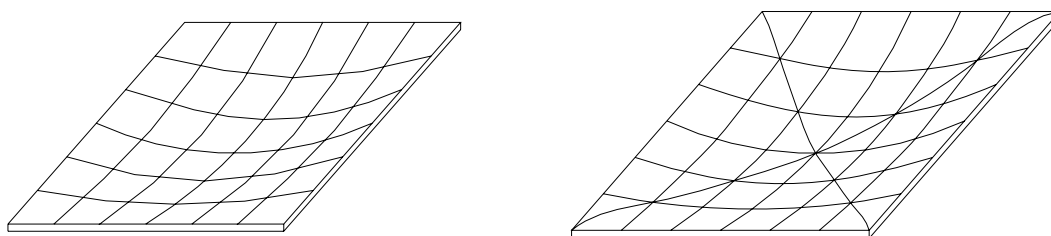
El espesor de la lámina no tiene mayor incidencia en la formalización del proyecto dado que la losa está totalmente rodeada por los elementos de apoyo, por esta razón el espesor será fijado por razones de estabilidad (resistencia y deformación) y de economía.

Aunque la norma admite un espesor mínimo de 8cm no es recomendable en nuestro medio especificar menos de 10cm dado que se considera que espesores menores son demasiado sensibles a imperfecciones en la ejecución de la obra.

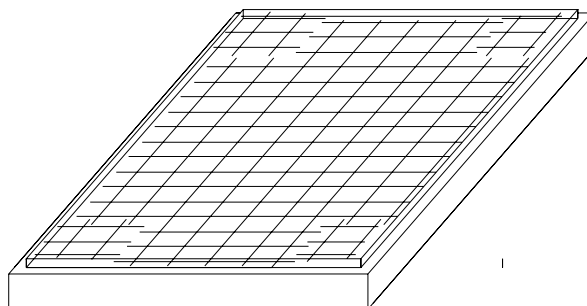
Los espesores que fija la norma UNIT 1050 para que no sea exigible la verificación por deformaciones³ resultan recomendables desde el punto de vista económico, pero como ya se ha señalado con un mínimo de 10cm.

La armadura, como en toda losa, será una malla formada por barras igualmente espaciadas en cada dirección y que estará ubicada en las cercanías de la cara traccionada.

El estudio de la deformación, que ya fue realizado en el primer capítulo, permite detectar la ubicación de las zonas traccionadas: en la zona central las tracciones se presentan en la cara inferior y en los ángulos se presentan en la cara superior. Esta característica de la deformación surge, de acuerdo con lo visto en el Capítulo I de la solidaridad existente entre la losa y sus apoyos que son considerados indeformables y que al permanecer rectos alabea a la lámina.



Surge así un primer esquema de ubicación de la malla de acero:



La compatibilidad de deformaciones entre las fajas permite establecer que:

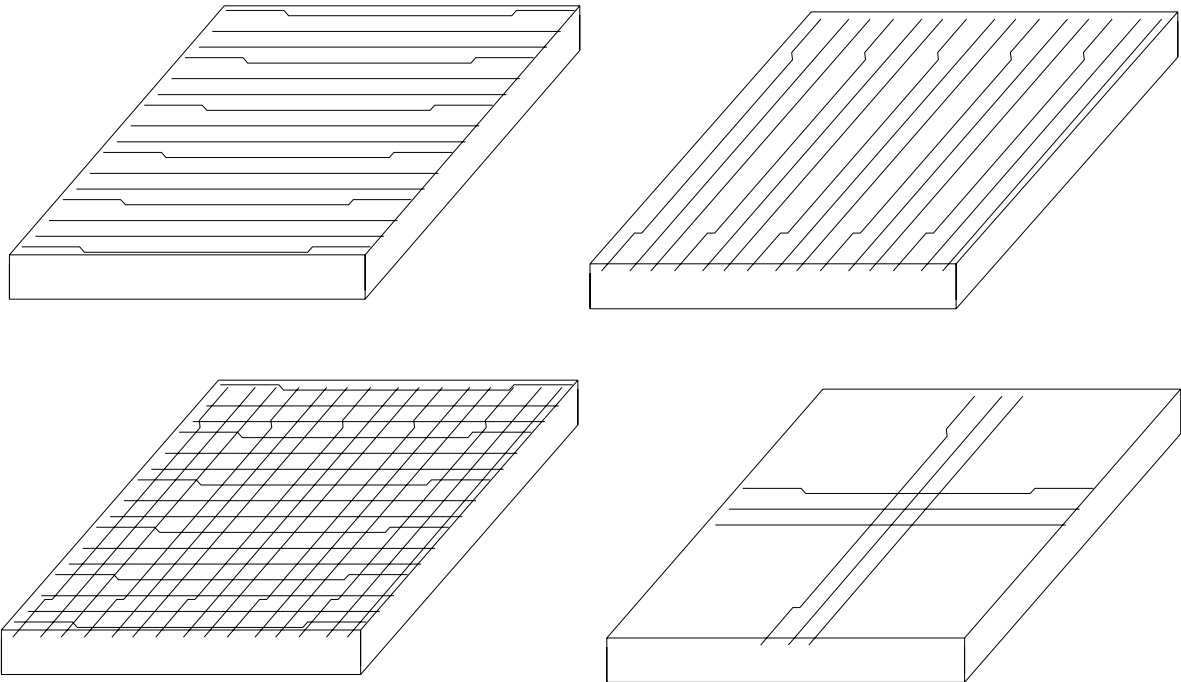
- Las fajas más cortas presentan mayor curvatura que las largas ya que ambas descienden lo mismo, por lo tanto los mayores momentos flectores y las mayores armaduras se presentan en la dirección de los lados cortos.
- El mayor alabeo, es decir la mayor diferencia de pendiente entre las secciones extremas de una faja se da en los bordes. A medida que se va hacia el centro de la losa las pendientes tienden a ser horizontales. Esto hace que los mayores momentos torsores se produzcan en las esquinas.

La última observación realizada sobre la deformación justifica la importancia de las tracciones en la cara superior de la lámina, en las proximidades de los vértices.

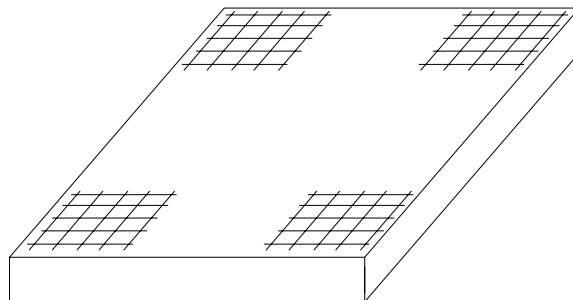
³ Para relaciones entre lados comprendidas entre 0,75 y 1,3 no es necesario comprobar la flecha cuando el espesor es mayor que 1/50 de la luz menor, para relaciones de lados fuera de ese entorno se debe considerar una relación espesor/luz menor comprendida entre 1/50 y 1/30.

Este primer esquema de armaduras debe corregirse en función de que, al igual de lo visto en el capítulo anterior sobre losas apoyadas en lados paralelos, en los bordes debe considerarse la existencia de tracciones en la cara superior producidas por el condicionamiento al libre giro de los mismos, ya sea por la continuidad material con el apoyo (losa apoyada en vigas de hormigón armado) o por la existencia de cargas sobre los mismos aunque no haya continuidad material con el apoyo.

Surge así la habitual organización de la armadura combinando barras rectas y barras dobladas que pasan de una cara a la otra. UNIT 1050 plantea que la armadura que se ubique en la cara superior sea un tercio de la armadura resistente, respetando esta recomendación surge como módulo básico de barras para conformar la armadura resistente la combinación de dos rectas y una doblada.

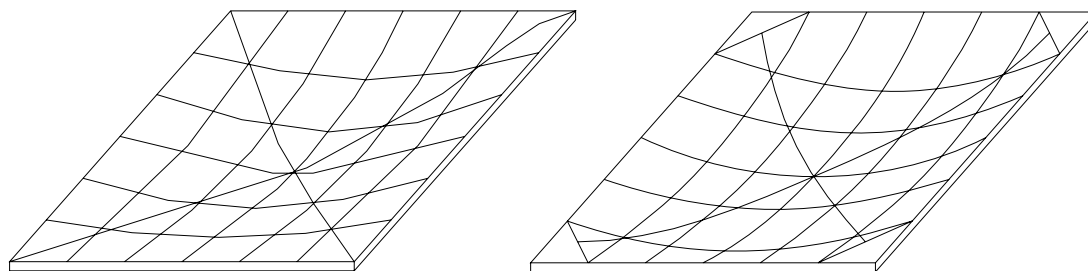


En cuanto a las armaduras en la cara superior de las esquinas, estas deben disponerse en un cuadrado de lado igual a $0,3$ de la luz menor de la losa y con un valor igual a la de la armadura máxima de tramo.



Se admite que la armadura de esquina no sea colocada, aceptándose la aparición de una fisura a 45° , perpendicular a la diagonal que llega a la esquina. Esta fisuración en la cara superior de las esquinas, no compromete las condiciones de estabilidad de la losa ni sus condiciones de servicio, pero si aumenta la flecha en el centro y por consiguiente la curvatura de la deformada y los momentos flectores. Por lo tanto, cuando no se coloca armadura en la cara superior de las esquinas se debe aumentar la armadura en el centro del tramo.

En las dos figuras que siguen se muestra la deformación de la losa con y sin armaduras en las esquinas.



En la bibliografía existen tablas auxiliares que permiten determinar los momentos flectores en el centro de la losa en las dos situaciones: con y sin armadura en las esquinas.

Resulta así que la armadura para una losa rectangular apoyada en todo su perímetro quedará formada por una malla constituida por barras rectas y dobladas igualmente espaciadas en cada dirección. Esta solución es válida para cualquier tipo de carga.

La norma UNIT 1050 recomienda que la separación entre barras no debe superar el doble del espesor de la losa ni ser mayor a 20 cm.

Para los espesores habituales de losas macizas que se utilizan en el medio se recomienda que el diámetro máximo de las barras sea 12 mm.

En este tipo de losa, al igual que en las que se estudiarán en el capítulo siguiente los casos de cargas especiales no producen alteraciones en el comportamiento de las mismas ni en los criterios de armado.

Como ya ha sido citado, en la bibliografía se encuentran tablas auxiliares que permiten determinar las solicitaciones para este tipo de losa con varios tipos de carga: variación hidráulica, lineales y puntuales.

Para el caso de carga uniforme la relación entre los momentos en el centro según las dos direcciones principales varía entre la igualdad, en el caso de una losa cuadrada, a una relación de 4:1 cuando el lado mayor es el doble del menor.

En función de esta consideración para relaciones entre lados mayor de 2:1 se considera a la losa como apoyada en los dos lados largos despreciando la colaboración que significa el apoyo en los lados cortos. Esto no implica despreciar la descarga de la losa en el lado corto a la hora de proyectar este apoyo, así como tampoco no tener en cuenta este apoyo al proyectar el despiece de las armaduras largas.

Losas nervadas.

La solución de aligerar el peso de la losa cuando se requieren fuertes espesores de lámina es válida también en este caso y valen las consideraciones hechas en el capítulo anterior.

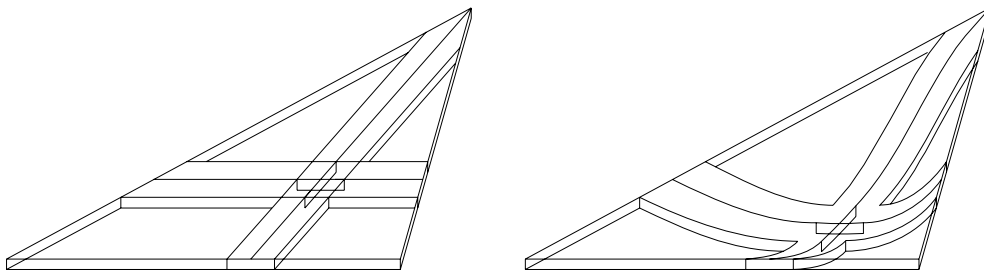
Se debe agregar que el efecto de la capacidad resistente generada por el alabeo de las fajas es menor que en las soluciones macizas, exigiéndose así más el trabajo por flexión. En la bibliografía aparecen tablas que permiten establecer los valores de las solicitaciones a partir de las que corresponden a una losa maciza aumentando los momentos flectores con un factor de corrección.

CAPITULO IV

OTROS CASOS DE FORMA DE PLANTA Y APOYO

Losa de planta triangular apoyada en todo su perímetro.

Tal como se ha planteado en el primer capítulo el comportamiento de las losas se visualiza por su descomposición en dos sistemas de fajas perpendiculares entre sí. En este tipo de losa el sistema de fajas se puede tomar en referencia a cualquiera de los lados.



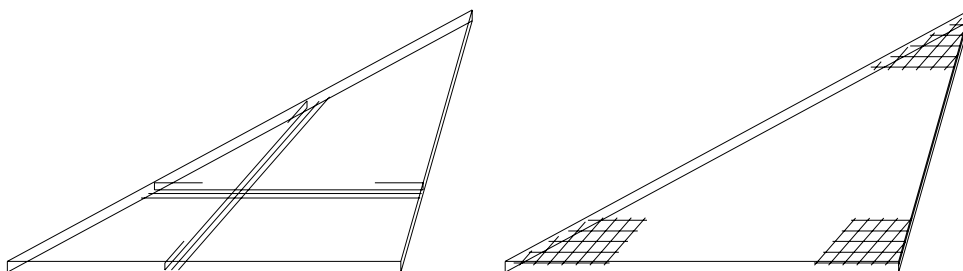
La deformada posee características totalmente análogas a las de las losas rectangulares apoyadas en todo el perímetro: concavidad hacia arriba en el centro, es decir cara inferior de la losa traccionada, y concavidad hacia abajo en la zona próxima a los vértices, inversión de tracciones generada por el alabeo.

En la bibliografía se encuentran tablas auxiliares para determinar las solicitaciones en los casos de plantas con forma de triángulos isósceles y triángulos rectángulos.

El armado se resuelve con una malla ortogonal. En los triángulos isósceles se toma a la base como referencia y en los triángulos rectángulos a los catetos.

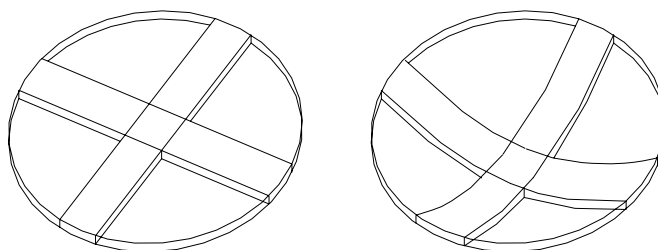
No se admite en este caso eliminar la armadura superior en los ángulos ya que dada la forma de la planta el alabeo de las fajas tiene especial relevancia en la capacidad resistente de la lámina.

En los bordes debe considerarse la existencia de tracciones en la cara superior de las losas que, al igual que en los casos anteriores, son producidas por el condicionamiento al libre giro de los mismos, ya sea por la continuidad material con el apoyo (losa apoyada en vigas de hormigón armado) o por la existencia de cargas sobre los mismos aunque no haya continuidad material con el apoyo.

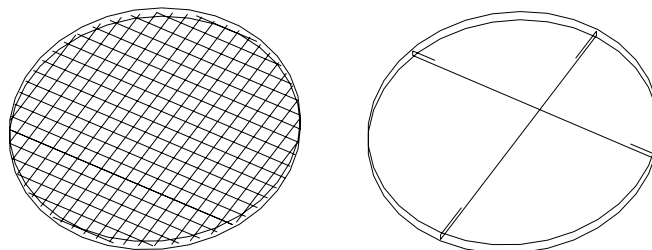


Losa de planta circular apoyada en todo su perímetro.**Losa de planta poligonal regular apoyada en todo su perímetro.**

La deformación de una losa circular apoyada en todo su perímetro y con carga uniforme presenta todos los cortes diametrales idénticos, tomando dos ortogonales cualesquiera como representativos se ponen de manifiesto la deformación y las zonas traccionadas.

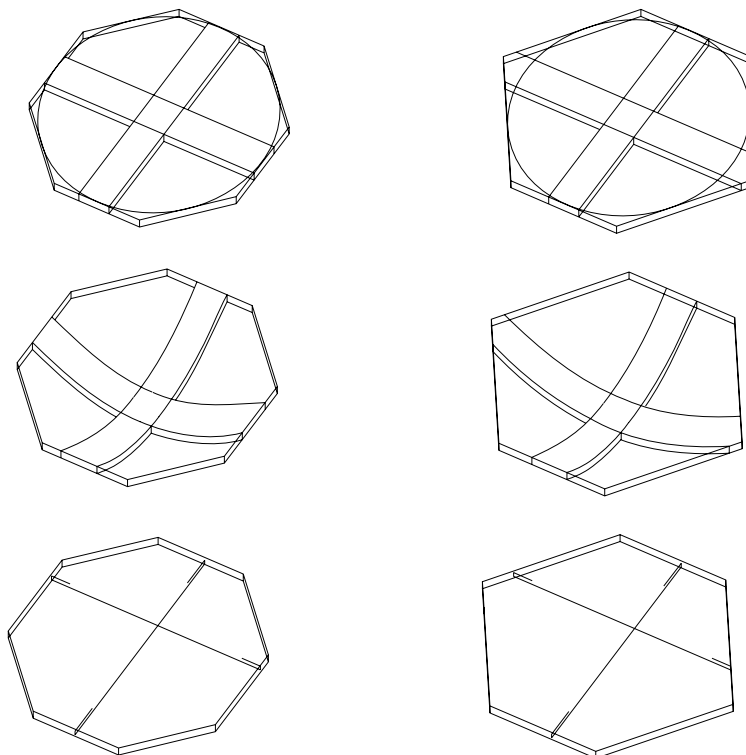


Las armaduras se organizan como una malla ortogonal, en dos direcciones cualesquiera y cercana a la cara inferior de la losa y como en los casos analizados antes es necesario colocar armadura en la cara superior próxima al borde.



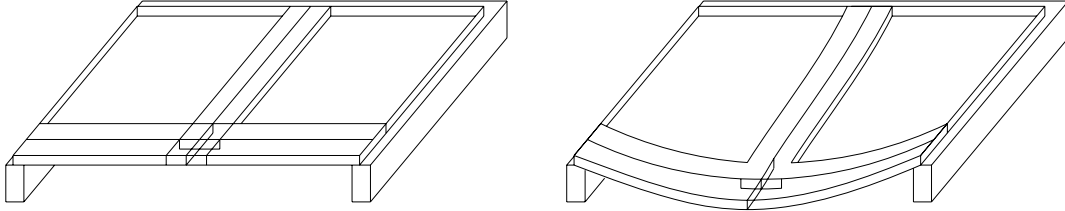
En la bibliografía se señala el valor $pD^2/20$ para el momento flector en el centro de la losa, donde p es el valor de la carga uniforme por metro cuadrado y D el diámetro de la losa.

Las losas cuya planta es un polígono regular de cinco o más lados se estudian asimilándolas a una losa cuya planta es el círculo inscrito en dicho polígono.



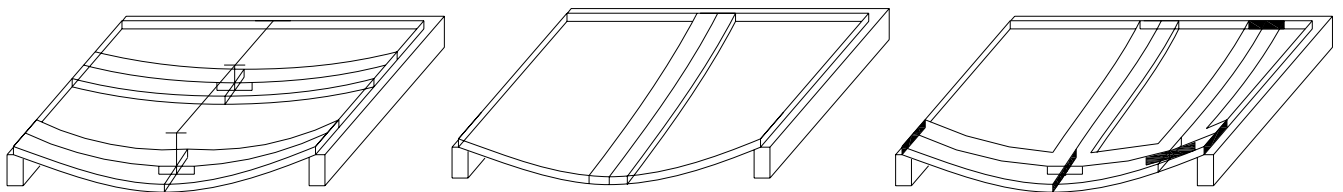
Losa rectangular apoyada en tres de sus lados y con un borde libre.

Se estudian las deformaciones a partir de una faja sobre el borde libre y otra perpendicular en el centro del mismo:

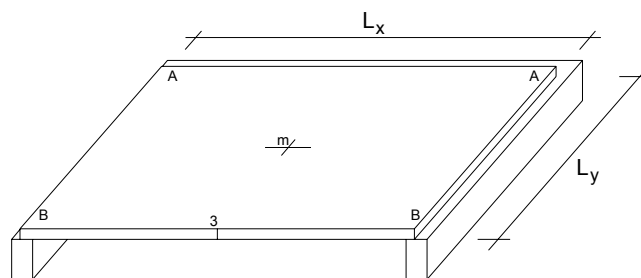


Surgen las siguientes observaciones:

- La faja que coincide con el borde libre es, por presentar la mayor flecha, la de mayor curvatura entre las que le son paralelas.
- La faja perpendicular al borde libre presenta curvatura hacia arriba.
- Todas las fajas en ambos sentidos salvo la perpendicular al borde libre en su punto medio resultan alabeadas, en consecuencia el alabeo afecta a los cuatro vértices.



Resulta de interés analizar la importancia que tienen las anteriores observaciones al ir variando las proporciones entre los lados de la losa: L_y ; L_x . Para ello se verá la variación de los momentos en seis puntos en un entorno de variación de la relación $\varepsilon = L_y/L_x$ entre 0,125 y 1,5.



Para comprender los resultados se supone que L_x es constante y que L_y varía. El mayor valor de momento se tiene en el punto 3 para la relación de luces 1,5, si ese momento vale 1000 el resto de los valores es el que se indica en el cuadro:

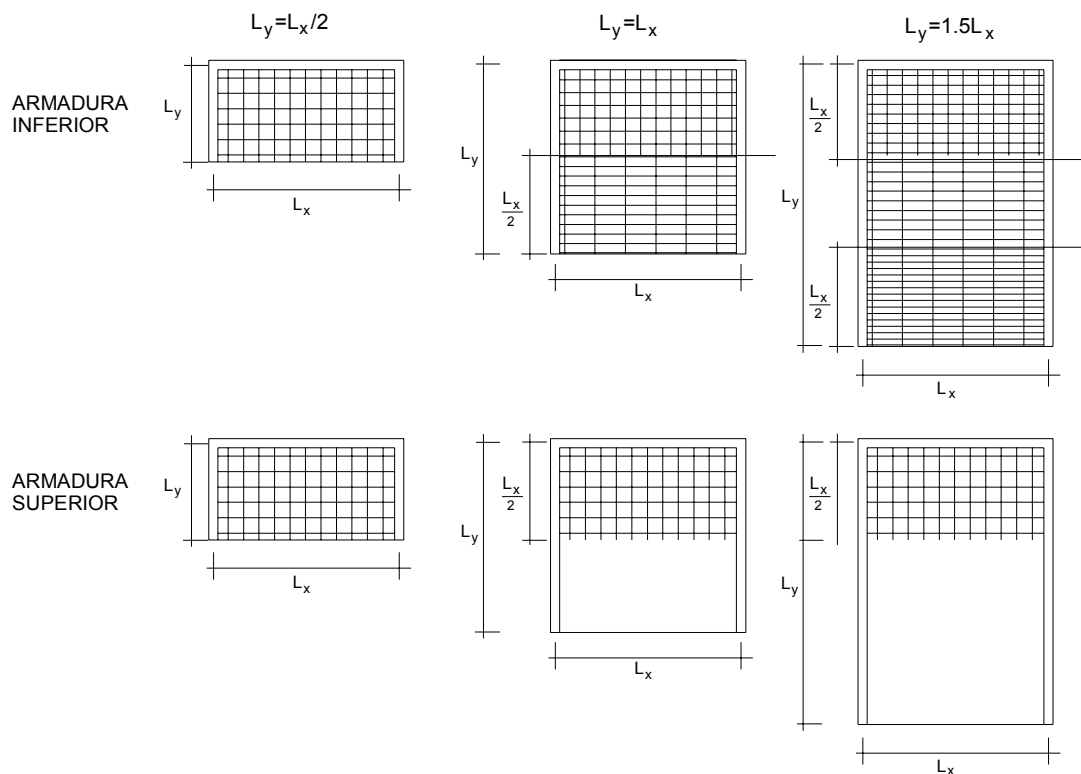
ε	1.5	1.2	1	0.8	0.5	0.25	0.125
M_3	1000	944	857	737	429	130	35
M_{xm}	824	712	613	488	247	67	21
M_{ym}	202	202	202	202	162	62	18
M_A	564	564	545	522	416	247	125

M_B	31	63	97	147	209	183	105
-------	----	----	----	-----	-----	-----	-----

Se observa:

- Si bien los valores de M_3 son siempre mayores que los de M_{xm} la diferencia entre los mismos se hace menor al aumentar L_y y se van acercando al valor del momento que corresponde a una losa de dos apoyos paralelos de luz L_x .⁴
- El valor de M_{ym} es prácticamente independiente del valor de L_y .
- El valor de M_B , que expresa la importancia del alabeo en ese punto, si bien es significativo para valores pequeños de L_y pierde rápidamente significación al aumentar L_y .
- A partir del valor 0.5, el valor de M_A , que expresa la importancia del alabeo en ese punto, se mantiene prácticamente constante al variar L_y aunque se va haciendo menor con respecto al de M_3 .
- La visualización conjunta de los resultados indica que a partir de que la losa llega a la proporción 1 entre sus lados, los valores de cada fila difieren poco entre sí al variar L_y lo que está indicando que dependen exclusivamente de L_x .
- Cuando el valor de L_y se hace pequeño aumenta la importancia relativa de los valores de M_A y M_B . Esto que muestra la importancia del alabeo en el equilibrio de este tipo de losa y que al adoptar esas proporciones hacen que el apoyo largo sea el que recibe, prácticamente en forma única, la descarga de la losa. Una consecuencia es la necesidad de armarlas con doble malla, en parte importante de su superficie y que puede llegar a ser en la totalidad de la misma.

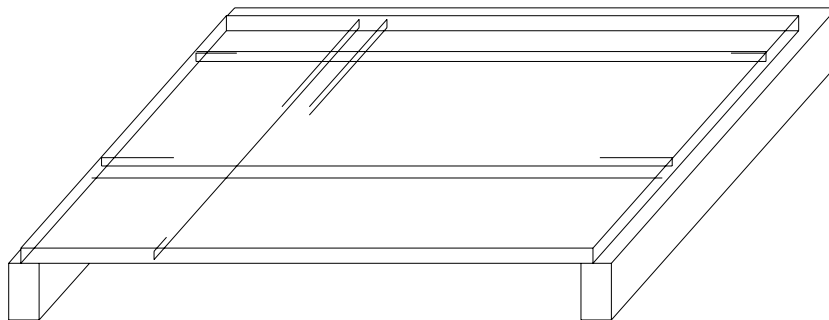
El esquema de organización de armaduras se divide en tres posibles casos en función de las observaciones realizadas.



El despiece de las barras debe tener en cuenta la necesidad de cubrir las condiciones en los bordes: en los bordes apoyados es necesario colocar armaduras en la cara superior debido al impedimento al libre giro de los mismos como se vio en los casos previamente estudiados y en el borde libre se debe tener en cuenta lo visto en las losas sobre apoyos paralelos.

⁴ Ese valor es 1050.

Surgen así las siguientes barras tipo que deberán ser combinados entre sí para lograr las cantidades de armadura requeridas en las distintas secciones.

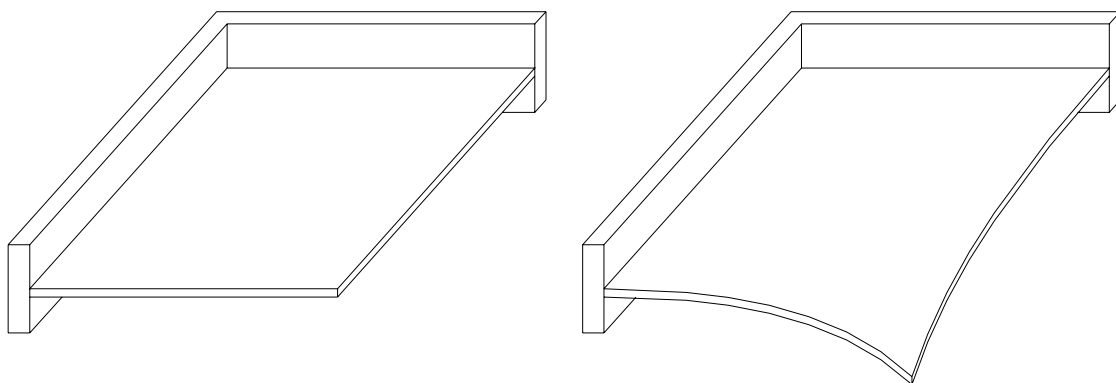


La existencia de un borde libre hace que el espesor de la lámina tenga incidencia formal y que se deba ser particularmente exigente con respecto a la flecha en su centro. Si la relación entre la longitud del borde libre y el espesor de la lámina resulta menor de 30 no se hace necesario verificar la flecha, para valores mayores se debe proceder a dicha verificación.⁵

Losa rectangular apoyada en dos lados concurrentes impedidos de girar.

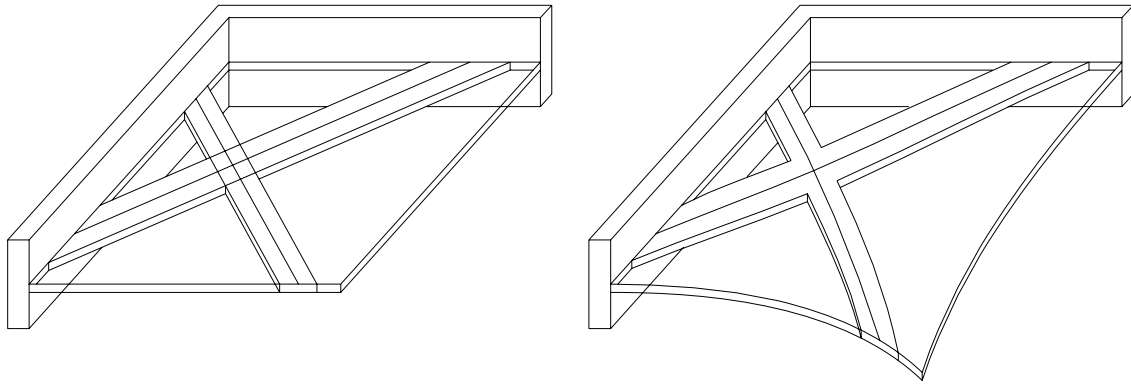
El comportamiento de este tipo de losa sigue las reglas generales que se han visto para las placas y difiere del comportamiento de las losas en ménsula desde una única línea de apoyo.

Para comprender la deformación de este caso se parte de que el vértice al que concurren los dos lados libres desciende y en consecuencia los dos bordes libres se curvan con concavidad hacia abajo.



Sin embargo no toda la placa queda traccionada solamente en su cara superior. Si se toman dos direcciones de análisis ortogonales, siendo una de ellas una diagonal se visualiza la deformación que se grafica.

⁵ En el libro "Vigas continuas, pórticos y placas" de Hahn se presentan coeficientes para la determinación de la flecha en el borde libre de losas rectangulares apoyadas en tres lados. Se aconseja verificar que el valor obtenido no supere 1/500 de la luz del borde libre.



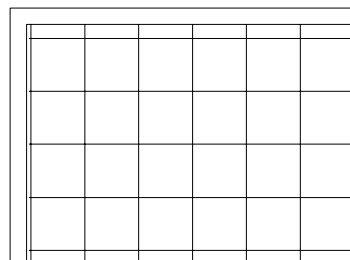
Se observa:

- La faja que llega al borde libre se comporta como una ménsula y además se alabea.
- En la faja que va de apoyo a apoyo se tiene que los puntos intermedios descienden, ya que acompañan la deformación de las ménsulas, por lo que en su centro presentan concavidad hacia arriba y en los apoyos hacia abajo dado que éste se encuentra impedido de girar. Presentan también alabeo.

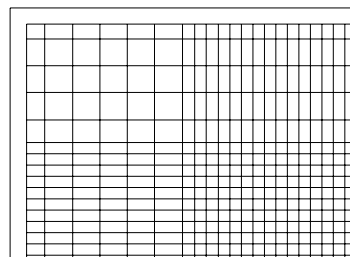
Si se estudian fajas paralelas a los bordes libres se aprecia que su curvatura y por lo tanto sus momentos disminuyen a medida que la faja se acerca al borde apoyado.

Este conjunto de observaciones permite establecer criterios para organizar las armaduras:

- Este tipo de losa exige la utilización de una doble malla, cada una en la proximidad de cada cara.
- La malla inferior será uniforme en toda la superficie.
- La malla superior, si las dimensiones de la losa lo justifica, se puede construir variando la separación de las barras o su diámetro de forma que tenga mayor capacidad a medida que esté más próxima al borde libre.



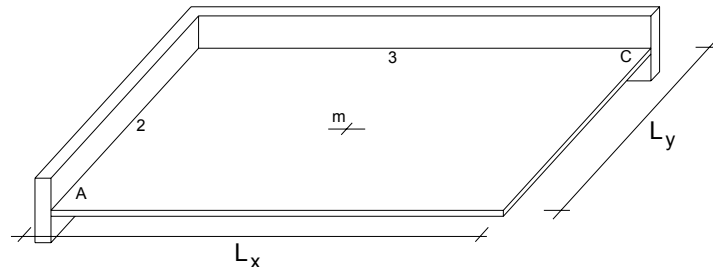
ARMADURA
INFERIOR



ARMADURA
SUPERIOR

En cuanto a la influencia de la relación entre los lados se tiene que a medida que uno de ellos es mayor al otro crece la importancia relativa de las armaduras paralelas al lado menor con respecto a las paralelas al lado mayor.

Se puede aclarar esta idea si se realiza un estudio determinando los valores de los momentos en una serie de puntos al variar la relación $\varepsilon=L_y/L_x$ entre los lados. Los valores del cuadro se obtuvieron manteniendo L_y constante y aumentando L_x .

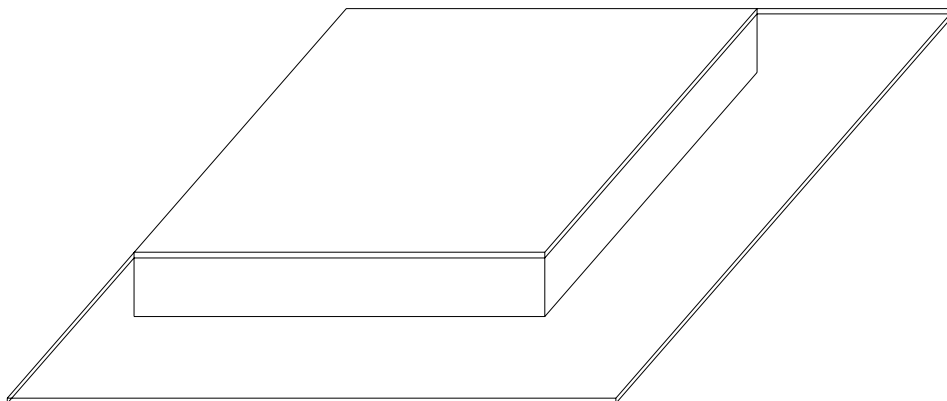


ε	1	0.7	0.4
M_C	518	759	1000
M_3	253	433	743
M_A	518	667	705
M_2	253	299	320
$M_{xm}=M_{ym}$	137	185	198

Se observa:

- Aunque L_y se mantenga constante todos los momentos crecen al aumentar L_x .
- M_C crece más que M_A y se va aproximando al valor del momento que se produciría en una losa en ménsula apoyada solamente en el lado mayor⁶.
- La relación M_C/M_A es 1 para $\varepsilon=1$ y 1,33 para $\varepsilon=0.4$.
- La relación M_3/M_2 es 1 para $\varepsilon=1$ y 2,32 para $\varepsilon=0.4$.

Losa en doble voladizo sobre una esquina.



⁶ Ese valor es 1100.

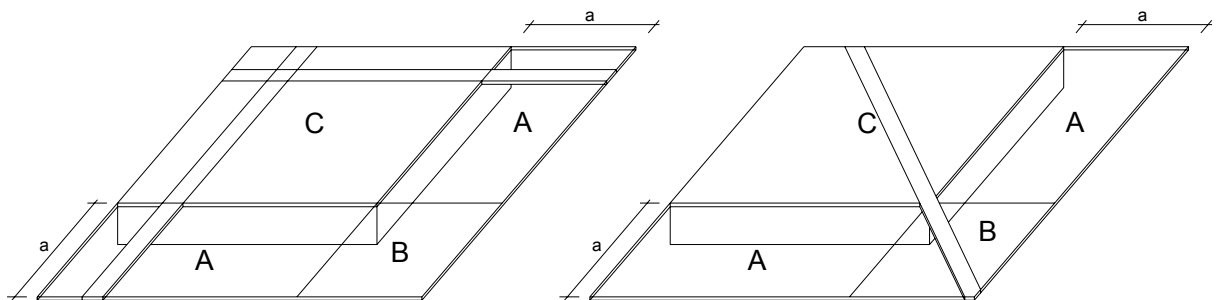
Este caso puede ser tratado por similitud con las losas en ménsula visto en el Capítulo II.

Se pueden distinguir tres zonas distintas que producen fajas en ménsula distintas.

En las zonas A las fajas se definen perpendiculares a las líneas de apoyo:

- Tienen clara continuidad con la losa vecina C, lo que asegura la posibilidad de equilibrio.
- Se comportan con independencia de la zona B, de esquina.
- Exigen armadura en la cara superior y las barras resistentes se colocarán perpendiculares al apoyo.
- El dimensionado se realiza con el momento que corresponde a las cargas y a la luz del voladizo: a .

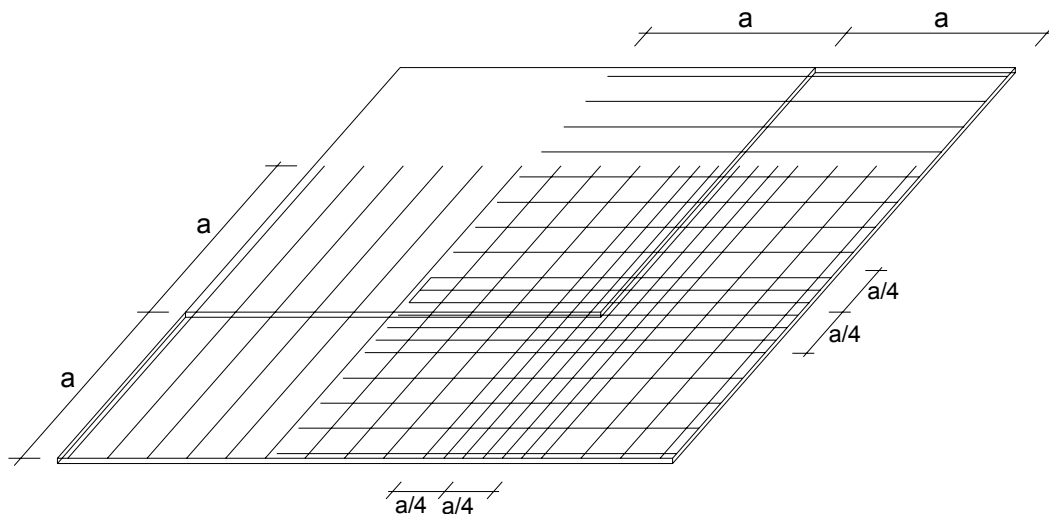
En la zona B la faja debe ser definida en forma oblicua con respecto a las líneas de apoyo a los efectos de que se resuelva su continuidad con la losa vecina C.



Tomar para la organización de las armaduras en la zona B la dirección de las fajas traería complejidades constructivas y fundamentalmente significaría perder altura útil por la superposición de tres direcciones de barras.

Según Leonhardt, Estructuras de Hormigón Armado, El Ateneo, Buenos aires, 1985, puede mantenerse la organización en toda la losa con barras ortogonales procediendo de la siguiente forma:

- Se dimensiona la zona A obteniéndose un valor A_s de área de armadura necesaria por metro.
- Se dispone a un lado y otro de las líneas de frontera de la zona B con las zonas A, en un ancho $a/4$ a cada lado, el doble de la armadura A_s por metro.
- La longitud de todas las barras es el doble de la luz del voladizo.

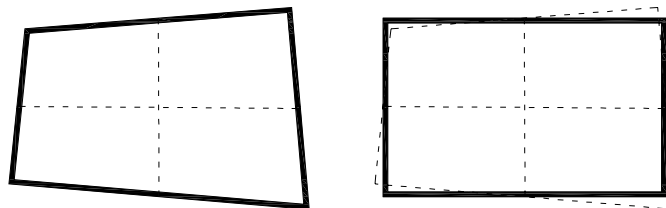


Losa de planta compleja apoyada en todo su perímetro.

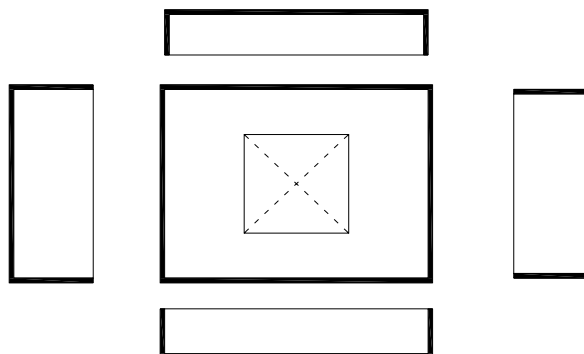
En el estado actual del conocimiento y del desarrollo del soporte tecnológico de medios auxiliares de cálculo los casos de planta compleja cuya conformación se aparta de los polígonos regulares tienen la posibilidad de ser analizadas por la aplicación de programas informáticos basados en los elementos finitos, obteniéndose así la mejor aproximación posible a su comportamiento.

No obstante siguen siendo válidas, para casos no demasiado exigentes en cuanto al espesor de la lámina, las aproximaciones manuales.

Una losa de planta trapezoidal puede ser estudiada como una losa rectangular con las luces promedio.



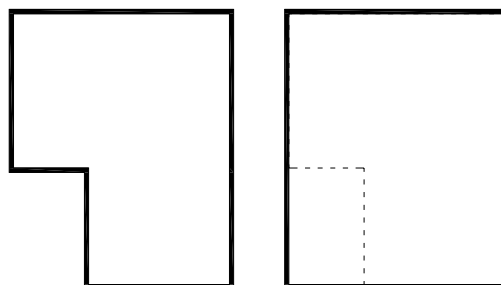
Una losa con un hueco central puede descomponerse en cuatro losas apoyadas en tres lados, eligiéndose luego para las zonas de superposición las mayores armaduras.

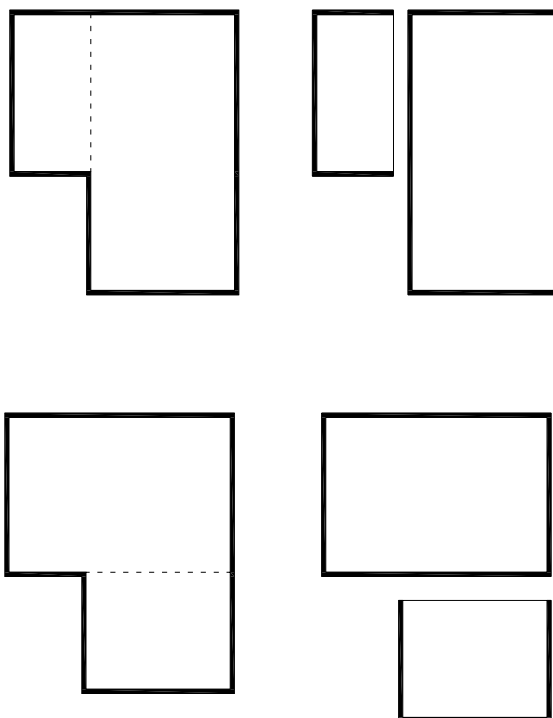


Una losa en forma de L puede requerir el estudio de más de una aproximación:

- Como una losa rectangular con las máximas dimensiones.
- Dos descomposiciones en una losa rectangular apoyada en todo el perímetro más una losa apoyada en tres lados que recibe en el borde libre la descarga que produciría la otra losa.

Se elegirían luego las mayores armaduras en cada dirección.





CAPITULO V

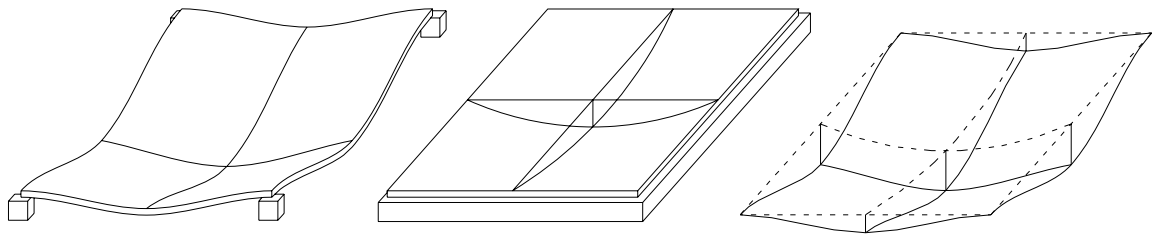
LOSA RECTANGULAR APOYADA EN PUNTOS

Este tipo de losa es estudiado en un capítulo aparte ya que si bien la interpretación de su equilibrio interno es la misma que se vio en el capítulo de generalidades, las deformaciones que se producen y la interacción con los apoyos obligan a realizar consideraciones especiales y se producen formas de armado distintas.

En una losa apoyada en sus cuatro vértices todos los puntos salvo esos cuatro descienden, los bordes también se curvan a diferencia con las losas apoyadas en todo el perímetro.

Los bordes dejan de ser apoyo de las fajas que llegan perpendiculares a ellos y esto modifica la interacción entre las fajas y cambia los valores relativos de las deformaciones.

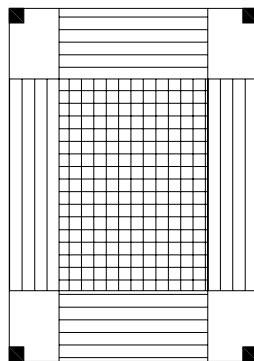
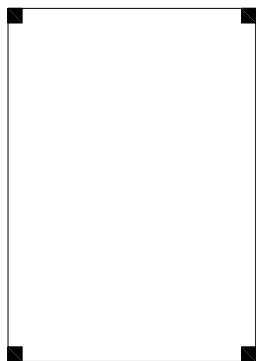
A iguales dimensiones de planta e idéntica carga los descensos que se producen en las losas sobre apoyos puntuales son mayores que los que se producen en una losa apoyada en todo su perímetro.



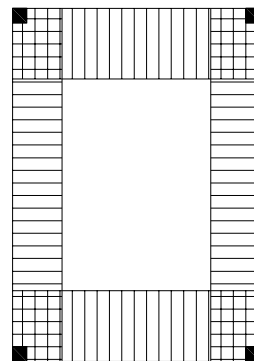
En este tipo de losa es de especial consideración la interrelación entre la lámina y sus apoyos. Las deformaciones indican que esa interacción no es la de simple apoyo ya que la continuidad material entre la lámina y el soporte hace que el libre giro de la lámina se vea impedido por la rigidez del soporte generándose momentos flectores que por comodidad en el análisis se suponen actuando en las dos direcciones principales (paralelas a los lados).

El análisis de la deformación permite decir que:

- La zona central resulta traccionada en la cara inferior en las dos direcciones.
- En las proximidades de los vértices, la continuidad con el soporte provoca tracciones en la cara superior en las dos direcciones.
- La deformación de los vértices afecta la deformación de los bordes, que aunque libres aparecen traccionados en su cara superior.



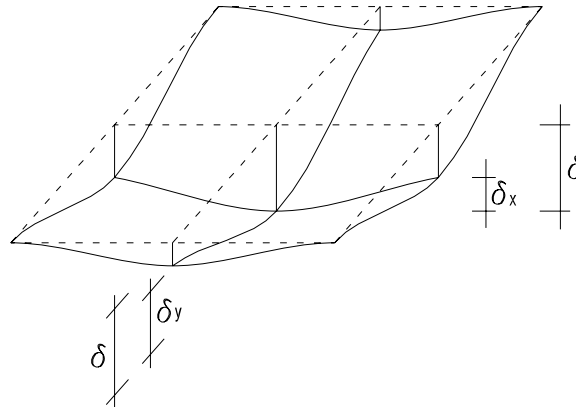
TRACCIONES EN LA CARA INFERIOR



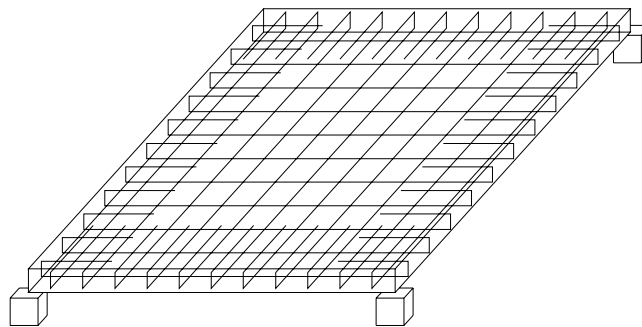
TRACCIONES EN LA CARA SUPERIOR

La comparación con la deformación de una losa apoyada en todo su perímetro permite establecer que:

- Al deformarse los bordes disminuye el alabeo de las fajas.
- Cada punto pertenece a los dos sistemas de fajas, por lo tanto su descenso absoluto, δ , es el mismo para las dos fajas, pero como en este caso los bordes descienden los descensos relativos de cada punto, δ_x δ_y , con respecto a los extremos de las fajas son distintos en cada sistema.
- Los mayores descensos relativos y las mayores curvaturas se dan en el sentido de la mayor luz de la losa. En consecuencia, a diferencia de lo que sucede en las losas apoyadas en todo el perímetro, los mayores momentos y las mayores armaduras se dan también en el sentido de la mayor luz.



Un esquema de organización de armaduras que respeta las necesidades de tracción definidas y que resulta de sencilla ejecución es el siguiente:

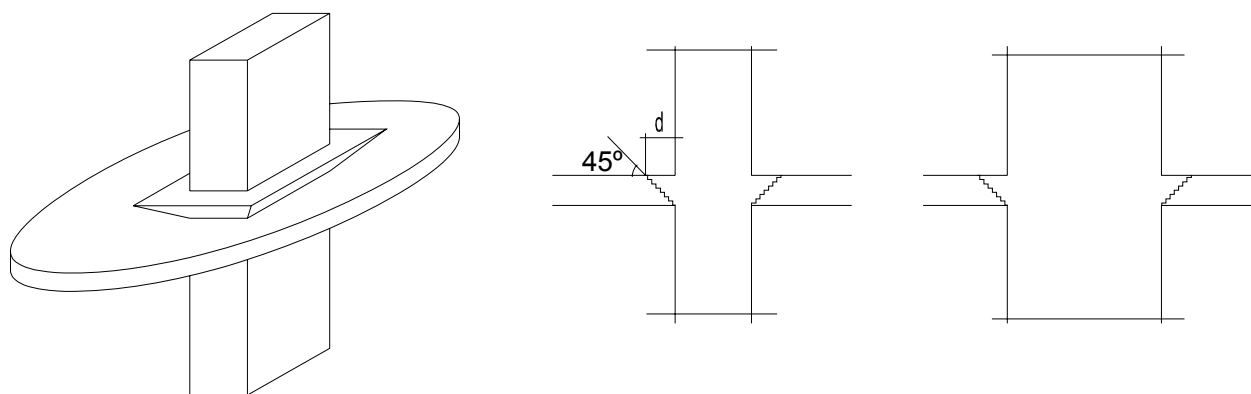


La definición del espesor de la lámina es el punto más importante en este tipo de losa tanto desde el punto de vista de la verificación en servicio como de la verificación resistente.

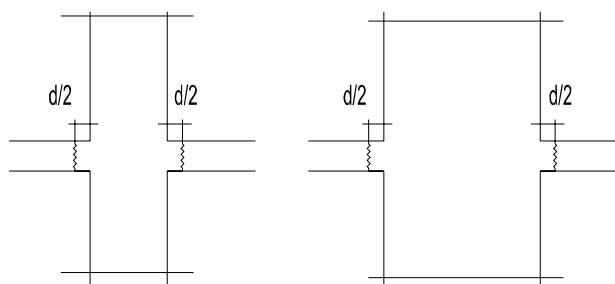
Con respecto a la verificación en servicio ya se ha señalado la mayor deformabilidad que presenta este tipo frente a otros. En cuanto a la resistencia el aspecto crítico para definir el espesor es la interacción lámina soporte. A igual cara e iguales dimensiones en planta que una losa apoyada en todo el perímetro se requiere mayor espesor.

La interacción lámina pilar se debe estudiar para que se verifique el estado límite último de punzonado.

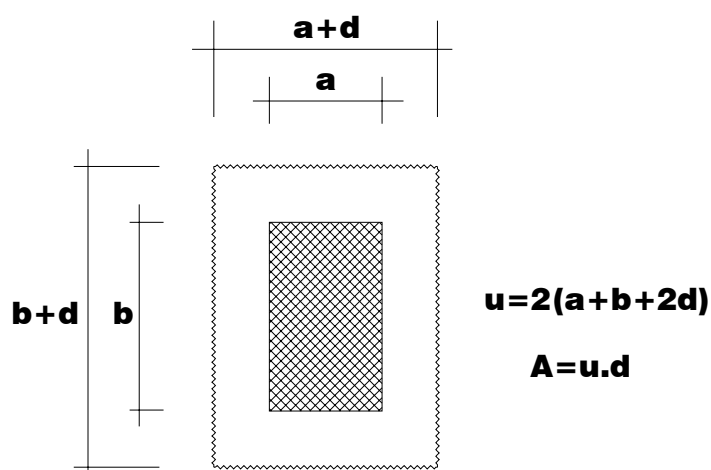
La definición del estado límite último de punzonado surge a partir del análisis de la rotura que se produce en el momento en que el soporte atraviesa la lámina. En esta circunstancia la separación entre el soporte y la lámina se da siguiendo una superficie tronco piramidal o tronco cónica con su base menor coincidente con la sección del soporte y con sus caras laterales formando 45°.



Se define así una superficie de transferencia de tensiones entre la lámina y el soporte. A los efectos de la cuantificación de esas tensiones se realiza una simplificación de esa superficie tomándola como si estuviese formada por planos verticales y ubicada a una distancia intermedia de las caras del soporte.

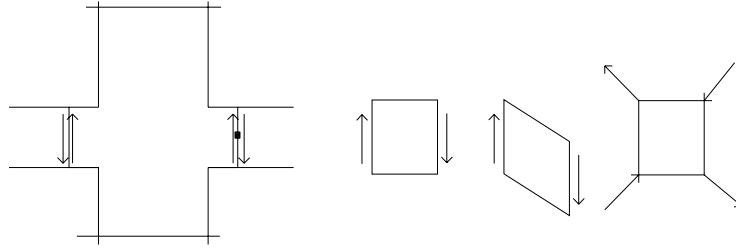


Las dimensiones de esa superficie quedan establecidas en el gráfico a partir de las del soporte, $a \times b$, y de la altura útil d de la lámina⁷:



Sobre esa superficie se producen tensiones rasantes, las que pueden interpretarse como tensiones normales conjuntas de tracción y compresión en planos que forman 45° y que justifican la forma en que se produce la rotura.

⁷ En la norma UNIT 1050 se grafican otros casos de formas de soporte o de ubicación de los mismos.



En el estado actual del conocimiento sobre el tema distintos autores y normas no dan una solución única a la evaluación de estas tensiones ya que la modelización del fenómeno, en el que intervienen una fuerza y dos momentos flectores, no es clara.

La norma UNIT 1050 opta por determinar el valor máximo de estas tensiones, τ_{pd} , solamente a partir del valor de la fuerza que se descarga en el soporte y aumentar convenientemente ese valor según la importancia que tienen los momentos flectores de acuerdo a la ubicación del soporte.

$$\tau_{pd} = \beta \frac{N_{pd}}{u \cdot d}$$

$$\begin{aligned} \beta &= 1,15 \text{ en soportes interiores}^8 \\ \beta &= 1,40 \text{ en soportes de borde} \\ \beta &= 1,50 \text{ en soportes de esquina} \end{aligned}$$

N_{pd} es la carga que produce el punzonado, mayorada.

No se requiere armadura especial para resistir el punzonado cuando:

$$\tau_{pd} \leq \sqrt{f_{cd}}$$

Esta es la situación que recomienda la norma y que generalmente es la determinante del espesor de la lámina.

Si no es posible por otras razones cumplir con esta condición se deberá disponer de armadura especial para resistir el punzonado en forma de barras verticales.

Esta armadura se calcula para un valor de cortante de valor:

$$V_s = (\tau_{pd} - 0,5\sqrt{f_{cd}})u \cdot d$$

Se deberá cumplir que:

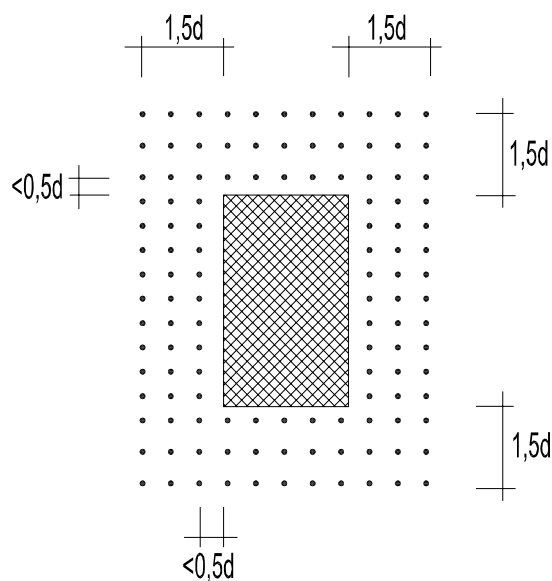
$$n \cdot A_s \cdot f_{yd} \geq V_s$$

$$A_s \geq \frac{V_s}{n \cdot f_{yd}}$$

n = cantidad de barras que se colocarán
 f_{yd} = tensión de dimensionado del acero

⁸ En los soportes internos, por existir paños de losa en los cuatro cuadrantes, el eje del mismo se curva menos que en un soporte de borde que recibe paños de losa de un solo lado. El soporte que resulta más curvado es el de esquina ya que recibe un solo paño de losa y su eje se curva en las dos direcciones.

Las barras se dispondrán en no menos de tres filas alrededor del soporte a una distancia máxima de $1,5d$ de la cara del mismo y la primera a no más de $0,5d$.



La colocación de estas armaduras es dificultosa, una posibilidad para ejecutarlas es doblar una barra en la forma que se indica:



Esta solución facilita la colocación de la armadura pero exige una gran prolijidad, difícil de lograr, en su confección.

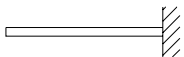
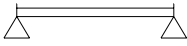
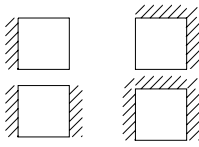
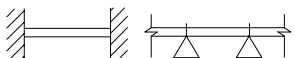
CAPITULO VI

DISPOSICIONES SOBRE EL PROYECTO

Este capítulo recoge disposiciones que se deben tener en cuenta en el momento de definir el proyecto a los efectos de lograr una solución que asegure la mejor materialización del mismo.

Espesor.

Se transcribe la recomendación contenida en la Norma UNIT 1050 (apartado 45.1.1) sobre relaciones entre luz y espesor que aseguran, sin verificación, valores admisibles para la flecha, m es la relación luz/espesor:

(A) Losas armadas en una dirección		(B) Losas armadas en dos direcciones con $\frac{\text{luz mayor}}{\text{luz menor}} \leq 1,3$	
esquema estructural	m	esquema estructural	m
	12		50
	30		55
	35		
	40		60

Para losas armadas en dos direcciones la luz a considerar es la luz menor.

Para losas armadas en dos direcciones con relación luz mayor/luz menor mayor a 1,3 el proyectista deberá disminuir los valores de la tabla B comparándolos con los correspondientes de la tabla A

Cuando los espesores son muy pequeños se dificulta el correcto posicionado de las armaduras ya que cualquier error puede llevar a alejar demasiado la malla proyectada de su correcta posición en la proximidad de la cara traccionada de la losa, por lo tanto no se recomiendan para obras con control normal de su ejecución espesores menores a 10 cm.

Para el caso de losas apoyadas en puntos en el apartado 52.3 de UNIT 1050 se recomienda que la relación luz mayor/espesor no supere el valor 32 para losas macizas y 28 en el caso de losas nervadas.

Organización de la malla – Cuantías.

Las losas en tanto elementos flexados deben cumplir con las cuantías establecidas para este tipo de elemento estructural.

El apartado 38.3 de UNIT 1050 establece que las áreas de las armaduras de los elementos flexados no deben ser menores a:

0,0015.b.d - para aceros conformados de alta adherencia

0,0025.b.d – para el resto de los aceros

Dado que en las losas la sección resistente tiene un ancho $b=100\text{cm}$ esta exigencia se expresa estableciendo que el área mínima de acero por metro será:

$A_{smin} = 0,15.d$ - para aceros conformados de alta adherencia

$A_{smin} = 0,25.d$ – para el resto de los aceros

Organización de la malla - Diámetros.

El diámetro de las barras que conforman la malla de una losa influye en un porcentaje importante en la relación entre la altura útil y el espesor de la lámina.

A los efectos de que no se pierda capacidad por una exagerada disminución en la altura útil se recomienda que para espesores menores a los 15 cm no se usen diámetros mayores a los 12 mm, a medida que aumenta el espesor se habilitan diámetros mayores.

Vista esta recomendación y que en losas macizas con apoyos lineales no es común usar espesores mayores a los 15 cm resulta que para estos casos no se suelen emplear barras de más de 12 mm.

Las losas nervadas sí superan los 15cm de espesor, por lo que en general no existen límites para el diámetro de las barras, estos diámetros importarán en el momento de definir el ancho del nervio.

Las losas macizas sobre apoyos puntuales en general superan los 15cm de espesor por lo que se habilita el uso de barras de más de 12 mm. Una regla recomendable es que el diámetro de las barras no supere el décimo del espesor de la losa.

Organización de la malla - Separaciones.

La separación entre las barras debe asegurar una razonable distribución de la presencia de acero que se aproxime a la teórica uniformidad en la sección.

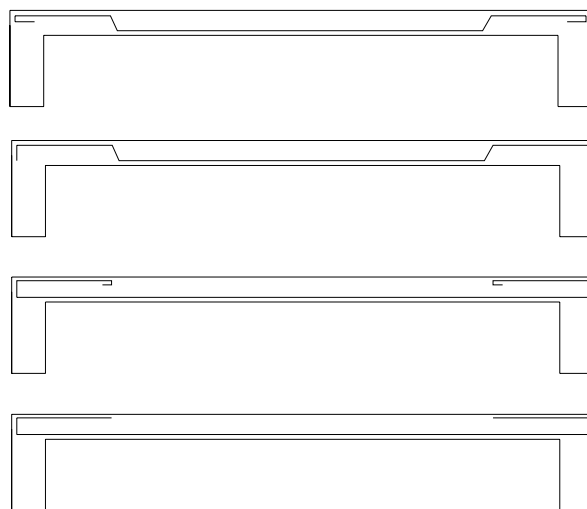
UNIT 1050 fija, para las losas macizas, como separación máxima el doble del espesor de la lámina siempre que no se supere los 20 cm. Dado que el espesor mínimo recomendado para una losa maciza es de 10 cm resulta que la separación máxima entre barras no debe superar nunca los 20 cm.

No corresponde establecer una separación mínima, usualmente no se proyectan separaciones menores a 10 cm.

Organización de la malla – Resolución de los bordes.

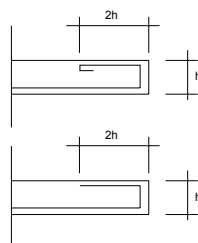
En los capítulos anteriores se ha hecho referencia a que en los bordes apoyados aunque se haya trabajado con la hipótesis de simple apoyo se debe proyectar armadura en la cara superior de la losa atendiendo al hecho de que la continuidad material con la viga de apoyo impide el libre giro de la lámina.

Se grafican dos posibles soluciones para la organización de la malla en esos bordes utilizando el tercio de la malla necesaria en el centro del tramo, una barra cada tres se dobla según se indica para llegar a la cara superior de la losa.

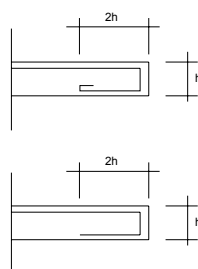


Los bordes libres de las losas apoyadas en lados paralelos o de las losas en ménsula se deben proteger de acciones eventuales que los puedan dañar por lo que se recomienda que la armadura que llegue a ellos se doble hasta llegar a la cara opuesta tal como se indica:

BORDE LIBRE DE LOSA APOYADA EN LADOS PARALELOS



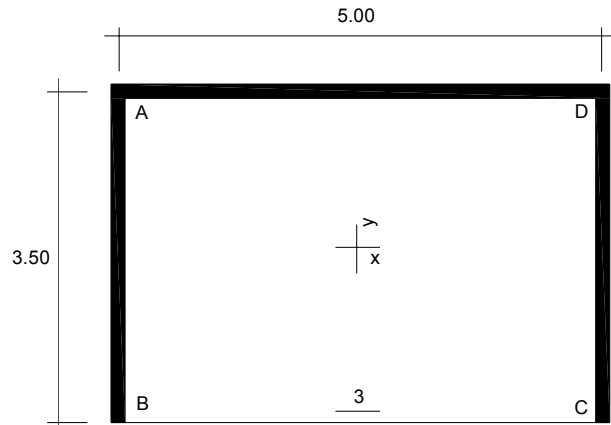
BORDE LIBRE DE LOSA EN MÉNSULA



CAPITULO VII

RESOLUCION DE UN EJEMPLO

Losa rectangular apoyada en tres de sus bordes y siendo el cuarto un borde libre.
 Carga uniforme con un valor de 600 daN/m².
 Hormigón C20 ($f_{ck}=200\text{daN/cm}^2$)
 Acero ADN 500 ($f_{yk}=5.000\text{ daN/cm}^2$)



$$L_y/L_x = 3,50/5,00 = 0,7$$

Como espesor para la losa se toman 14 cm, este valor es inferior a 1/30 de la luz del borde libre por lo que cabría verificar la flecha.

En el libro Vigas Continuas, Pórticos y Placas de Hahn, Gustavo Gili, Barcelona 1972, Tabla 17a se encuentran coeficientes para la determinación de la flecha en el centro del borde libre:

$$f_3 = \frac{P \cdot L_x^2}{\varpi \cdot E \cdot d^3}$$

$P = p \cdot L_y \cdot L_x$ (daN)

L_x = luz del borde libre (cm)

E = módulo de deformación longitudinal del hormigón (daN/cm²)⁹

d = altura útil de la losa (cm)

ϖ = coeficiente según tabla

L_y/L_x	0,125	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
ϖ	21,70	11,60	9,90	8,25	7,65	7,40	7,35	7,35	7,45	7,60	7,80	8,05	8,35	8,70	9,10

$$P = 600 \cdot 3,50 \cdot 5,00 = 10.500 \text{ daN}$$

$$E = 19.000 \cdot \sqrt{200} = 268.700 \text{ daN/cm}^2$$

$$f_3 = \frac{10.500 \cdot 500^2}{7,35 \cdot 268.700 \cdot 12^3} = 0,76 \text{ cm}$$

El resultado obtenido es menor que 1/500 de la luz del borde libre por lo cual la altura es viable.

⁹ Según UNIT 1050 $E = 19.000 \cdot \sqrt{f_{ck}}$

Para determinar las solicitaciones se usa la tabla 4.3.1 de la publicación Tablas y Ábacos para el Proyecto de Estructuras. IC – Facultad de Arquitectura –Montevideo, Uruguay 1995.

En esta publicación así como en otras de la bibliografía los momentos y las descargas sobre los apoyos se determinan a partir del total de carga incidente en la losa. Dividiendo este valor por el respectivo coeficiente que integra la tabla se determina el momento flector en cualquiera de los puntos indicados.¹⁰

La entrada a la tabla se realiza en función de la relación de luces, $3,50/5,00 = 0,70$

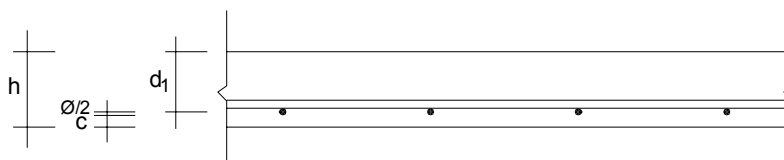
UBICACIÓN	x	y	3	A=D	B=C
COEFICIENTE m	14,2	29,9	9,1	11,8	35
MOMENTO (daN)	739	351	1.154	890	300

Una vez determinadas las solicitaciones se debe proceder al dimensionado. Se trata de una sección rectangular en hormigón armado a dimensionarse según las exigencias de un momento flector.

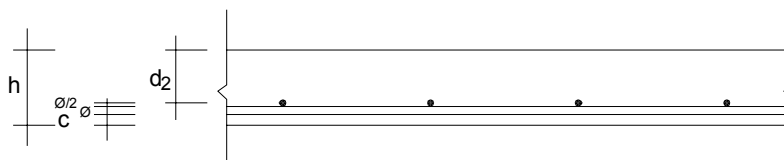
En la determinación de solicitaciones el resultado se refiere a momentos actuantes por metro de ancho de losa por lo que las secciones a verificarse siempre tendrán $b=100\text{cm}$.

Para definir la altura útil d en función del espesor h se debe tener en cuenta el recubrimiento del acero, el diámetro previsto para la barra y que se trata de dimensionar una malla por lo cual las barras en una dirección van por arriba de la las barras que van en la otra. Esto significa que en una losa existen dos valores de la altura útil, uno para cada dirección de las barras.

ALTURA ÚTIL EN EL SENTIDO DE LOS MOMENTOS MAYORES



ALTURA ÚTIL EN EL SENTIDO DE LOS MOMENTOS MENORES



Para determinar los valores de d_1 y d_2 se toma en forma ficta que la malla está formada por barras de 10mm por lo tanto y expresando las cantidades en cm:

$$d_1 = h - c - 0,5$$

$$d_2 = h - c - 1,5$$

$$d_2 = d_1 - 1$$

¹⁰ Para las descargas se multiplica el total de carga por el coeficiente de la tabla, obteniéndose la descarga total sobre el apoyo considerado.

Para el caso¹¹, tratándose de un hormigón protegido, se toma $c=1,5\text{cm}$.

Se tiene por lo tanto:

$$d_1 = 14 - 1,5 - 0,5 = 12 \text{ cm}$$

$$d_2 = 12 - 1 = 11 \text{ cm}$$

Definidas las secciones resistentes el dimensionado se realiza a través de las expresiones:

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}$$

$$A_s = \omega \frac{A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}}$$

Pudiéndose determinar ω en las mismas tablas que habitualmente se utilizan en el dimensionado de tramos lineales (vigas).

El hecho de que, como ya se ha dicho, en las losas el valor de b es siempre 100 cm permite realizar una simplificación en el tratamiento del dimensionado presentando la relación $\mu-\omega$ en forma de ábaco.

El ábaco adjunto presenta varias curvas, cada una de ellas para un valor de f_{ck} y en lugar de entrar con el valor μ se representa en abscisas el valor M_d/d^2 que es lo que resta como variable, para cada curva, en la expresión de μ .

Para hallar A_s se lee en ordenadas un valor que se ha llamado w por su semejanza con ω . Mediante un artificio de escala se generaliza el ábaco para más de un valor de f_{yk} .

$$A_s = w \cdot d \quad \text{para } f_{yk}=4.200 \text{ daN/cm}^2$$

$$A_s = 0,84 \cdot w \cdot d \quad \text{para } f_{yk}=5.000 \text{ daN/cm}^2$$

Se continúa así con el proceso de cálculo a partir de las solicitaciones:

UBICACIÓN	x	y	3	A=D	B=C
COEFICIENTE m	14,2	29,9	9,1	11,8	35
MOMENTO (daN.m)	739	351	1.154	890	300
Md (daN.cm)	118.240	56.160	184.640	142.400	48.000
ALTURA ÚTIL d (cm)	12	11	12	11	12
M_d/d^2	821	464	1.282	1.177	333
w	0,24	0,15	0,39	0,35	-
$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	2,41	1,38	3,93	3,23	-
$A_{smin} \text{ (cm}^2\text{)}^{12}$	1,80	1,65	1,80	1,65	1,80

¹¹ Ver UNIT 1050 Tabla 8

¹² Siendo un acero de adherencia mejorada $A_{smin} = 0,15 \cdot d$;
 $0,15 \cdot 12 = 1,8 \text{ cm}^2$;
 $0,15 \cdot 11 = 1,65 \text{ cm}^2$

DETERMINACION DE ARMADURAS EN LOSAS

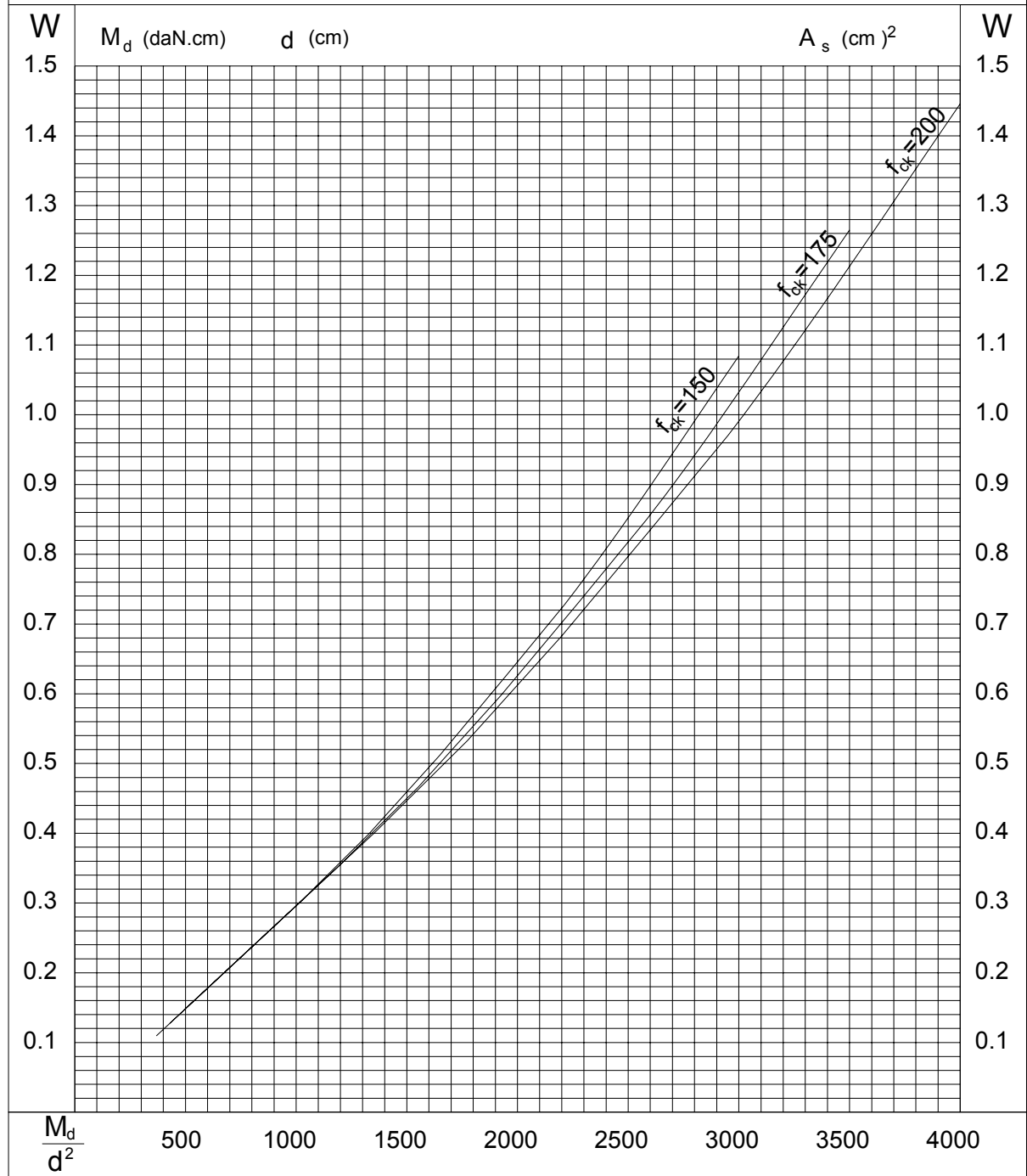
ACERO ADM 420 (fyk 4200 daN/cm²)

$$A_s = w \cdot d$$

ACERO ADN 500 (fyk 5000 daN/cm²)

$$A_s = w \cdot d \cdot 0,84$$

HORMIGON fck 150, 175, 200

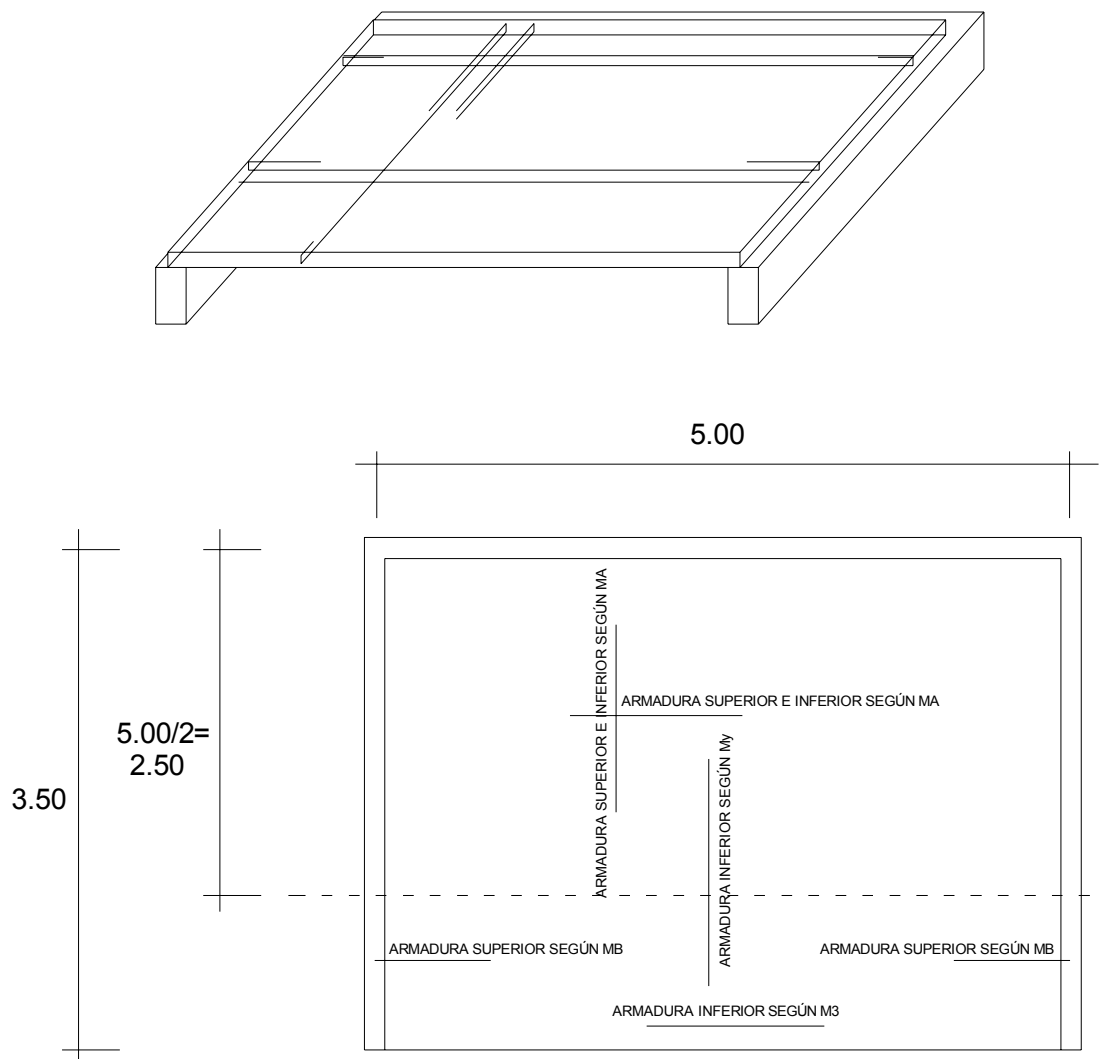


Corresponde aclarar dos aspectos expresados en el cuadro:

1. La elección de la altura útil:
 - En el centro de la losa el momento en x es mayor que el momento en y por lo tanto corresponde la mayor altura a x.
 - En el punto 3 la dirección es la de x por lo tanto corresponde la mayor altura.
 - En los puntos A y D se deben proyectar las dos direcciones de la malla superior y de la inferior con el mismo momento, en estos casos se adjudica la altura menor.
 - En los puntos B y C la dirección de las barras en la cara superior es una sola por lo que se adjudica la altura mayor.
2. La verificación de cuantías:
 - En los puntos B y C no se tuvo lectura en el ábaco lo que significa que se debe adjudicar la cuantía mínima.

El paso siguiente en la definición del proyecto es la organización de la armadura, es decir definir diámetros, separaciones y el despiece de las barras.

Siempre es conveniente, que previamente a definir la armadura con detalle se tenga una prefiguración de la misma.



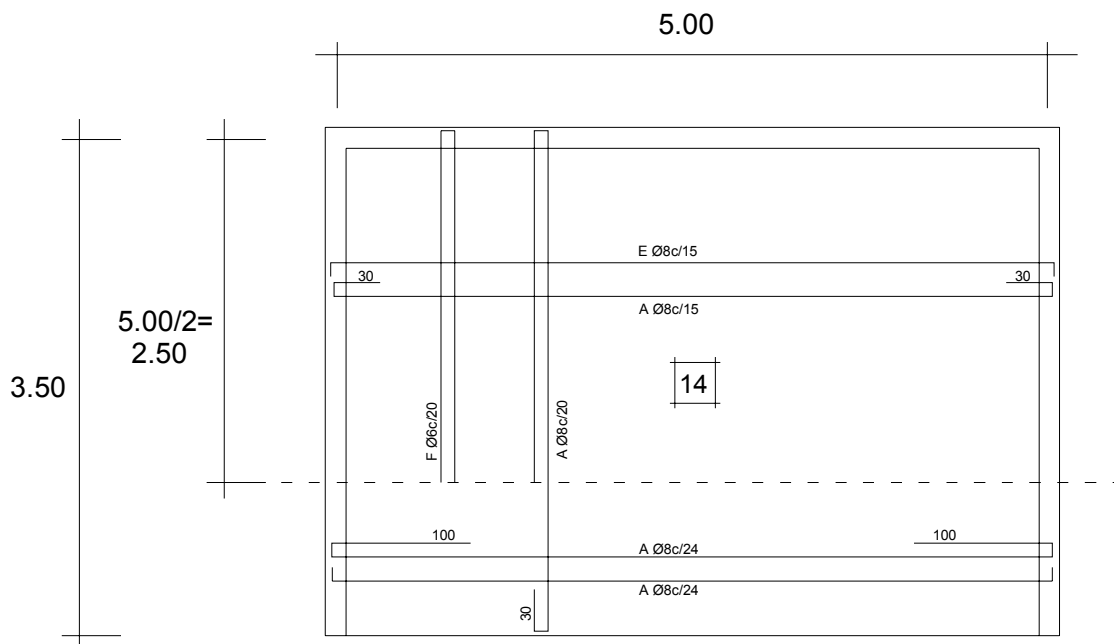
Para decidir la organización de la armadura a partir de las áreas definidas en cada punto se cuenta con un cuadro en el que se tiene el dato de la cantidad de acero por metro de ancho de losa que se obtiene en función del diámetro y la separación entre barras:

As (EN 1m)	SEPARACION	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	Ø6	2.83	2.57	2.35	2.17	2.02	1.88	1.76	1.66	1.57	1.48	1.41
	Ø8	5.03	4.57	4.19	3.86	3.59	3.35	3.14	2.95	2.79	2.64	2.51
	Ø10	7.85	7.13	6.54	6.03	5.60	5.23	4.90	4.61	4.36	4.13	3.92
	Ø12	11.31	10.28	9.42	8.70	8.07	7.54	7.06	6.65	6.28	5.95	5.65

UBICACIÓN	x	y	3	A=D	B=C
A_s (cm ²)	2,41	1,38	3,93	3,23	-
A_{smin} (cm ²) ¹³	1,80	1,65	1,80	1,65	1,80
ORGANIZACIÓN	-	Φ8c/20	Φ8c/12	Φ8c/15	Φ8c/24

Como la armadura necesaria en x es menor que las que se requieren en 3 y en A este valor no se tiene en cuenta en el momento de organizar la armadura.

La armadura en B=C se organiza por el doblado parcial de la armadura en 3, en este caso doblando la mitad, es decir una barra si y otra no se obtienen $4,19/2 = 2,095$ cm² que cubren los 1,80 cm² requeridos.



Se señalan algunas aclaraciones sobre el despiece de las barras:

- Las prolongaciones de 30cm de las barras A Ø8c/15 son para lograr el empalme con las barras E Ø8c/15.

¹³ Siendo un acero de adherencia mejorada $A_{smin} = 0,15.d$;
 $0,15.12=1,8\text{cm}^2$;
 $0,15.11=1,65\text{cm}^2$

- Las prolongaciones de las barras A $\Phi 8c/24$ son para cubrir las tracciones debidas a M_B tal como se señaló, su longitud surge del criterio de que sea $1/5$ de la luz del borde libre.
- La prolongación de 30cm de las barras A $\Phi 8c/20$ resuelven el detalle general que corresponde a un borde libre.
- Las barras F $\Phi 6c/20$ surgen para complementar a las barras A $\Phi 8c/20$ y obtener los $3,23\text{cm}^2$ requeridos: $\Phi 8c/20 = 2,51\text{cm}^2$; $\Phi 6c/20 = 1,41\text{cm}^2$, se elige la separación de 20 cm para las barras de 6 para compatibilizarla con las de 8.

ANEXO**MODELO MATEMÁTICO DEL COMPORTAMIENTO DE LAS LOSAS**

El contenido de este anexo no pertenece al temario del curso por lo cual no se desarrolla en clase ni se exige en la evaluación, no obstante se ha considerado de interés su inclusión en esta publicación ya que resulta un apoyo ineludible en el momento de profundizar en el conocimiento del tema placas.

BASES DEL ANÁLISIS

En el desarrollo de la siguiente exposición se sigue la teoría clásica de las placas isótropas o teoría de las placas delgadas de Poisson-Kirchhoff la que de acuerdo a R.Bares (Tablas para el cálculo de placas y vigas pared. Pág. 17) se integra con las siguientes hipótesis modélicas:

1. El material de la placa es perfectamente elástico.
2. El material de la placa sigue la ley de Hooke y tiene las mismas constantes elásticas (módulo de elasticidad, módulo de Poisson) para cualquier estado de carga.
3. El material de la placa es homogéneo e isótropo.
4. El espesor de la placa es constante.
5. El espesor de la placa es pequeño, comparado con las restantes dimensiones de la placa.
6. Las fibras perpendiculares al plano medio de la placa antes de la deformación permanecen perpendiculares a la superficie media de la placa deformada.
7. La tensión normal perpendicular al plano medio de la placa es despreciable.
8. Los desplazamientos verticales, flechas, son tan pequeños, que la curvatura en una dirección cualquiera viene dada por la derivada segunda del desplazamiento vertical en la dirección considerada (por lo tanto las pendientes son también pequeñas).
9. En el plano medio de la placa no actúan tensiones normales, es decir, que este plano medio no sufre deformación alguna.
10. El peso propio está incluido en la carga exterior.
11. Los ángulos de las placas están asegurados contra el levantamiento y, en las placas de hormigón armado, se sitúa una armadura en las esquinas para absorber los momentos de torsión.

RELACIONES ENTRE CARGAS Y SOLICITACIONES

Aclaraciones

Se estudiará la relación diferencial existente entre cargas y solicitaciones en una placa, si bien es análoga no resultará idéntica a la que existe en una barra ($p=V'=M''$).

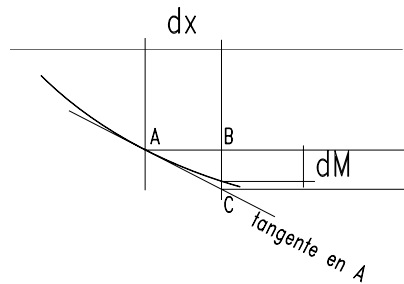
Las figuras se referirán a un sistema de ejes coordenados x,y,z , los ejes x,y definen el plano horizontal que coincide con el plano medio de la placa y el eje z se toma perpendicular al plano medio de la placa.

La carga que es una función continua, p , se toma perpendicular al plano medio de la placa.

V simboliza el valor del cortante, M indica momentos flectores y T momentos torsores.

Se trabaja con valores unitarios de las mismas, y el subíndice indica la dirección.

La variación de las solicitaciones entre las dos caras de un elemento diferencial se expresa a través de la derivada de la función, por ejemplo para la función M_x la variación dM_x es igual a la derivada¹⁴ de M_x por el dx .



$$\widehat{tgBAC} = M' = \frac{\delta M}{\delta x}$$

$$BC = \widehat{tgBAC} \cdot AB = \frac{\delta M}{\delta x} dx \cong dM$$

Equilibrio de un elemento diferencial de placa

A través del estudio del equilibrio de un elemento diferencial de placa se llegará a las relaciones diferenciales entre carga y solicitaciones.

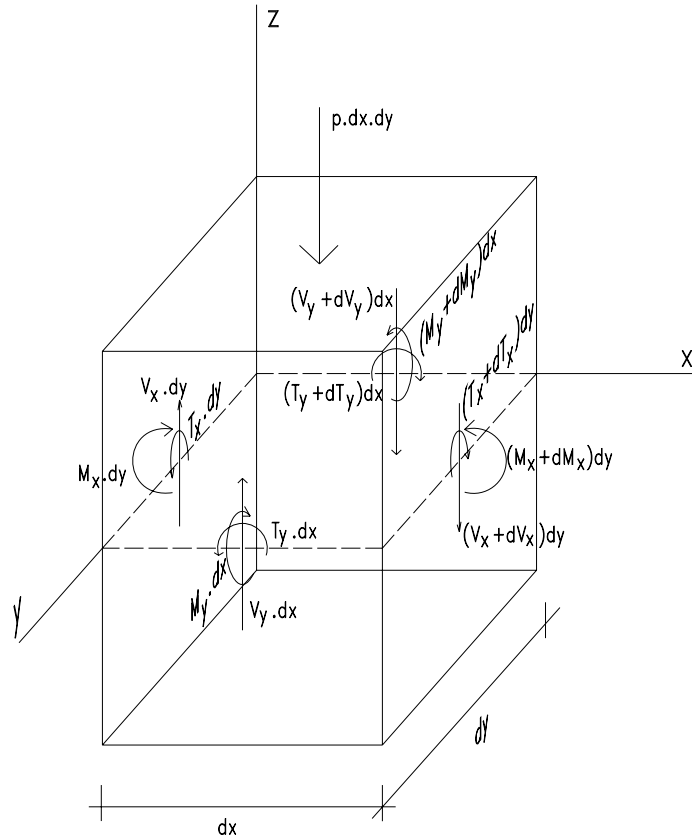
En una placa cargada uniformemente por una acción p perpendicular al plano medio un elemento de lados infinitesimos dx y dy resulta soportando una carga $p \cdot dx \cdot dy$ y los valores de las solicitaciones en sus caras izquierda y anterior son, a partir de los valores unitarios:

$$\begin{aligned} &M_x \cdot dy, V_x \cdot dy, T_x \cdot dy \text{ (izquierda)} \\ &M_y \cdot dx, V_y \cdot dx, T_y \cdot dx \text{ (anterior)} \end{aligned}$$

en las caras derecha y posterior se producen incrementos diferenciales de las solicitaciones y se obtienen los valores:

$$\begin{aligned} &(M_x + dM_x) \cdot dy, (V_x + dV_x) \cdot dy, (T_x + dT_x) \cdot dy \text{ (derecha)} \\ &(M_y + dM_y) \cdot dx, (V_y + dV_y) \cdot dx, (T_y + dT_y) \cdot dx \text{ (posterior)} \end{aligned}$$

¹⁴ Para indicar las derivadas de una función cualquiera F se utiliza la notación $\delta F / \delta x$, $\delta^2 F / \delta x^2$ ó $\delta^4 F / \delta x^4$ y se leen derivada primera, segunda o cuarta de F con respecto a x también se usará la notación $\delta^4 F / \delta x^2 \delta y^2$ que se leerá derivada cuarta de F con respecto a x , y con respecto a y .



La notación diferencial de los incrementos de las solicitaciones es la siguiente:

$$dV_x = \frac{\delta V_x}{\delta x} dx \quad dV_y = \frac{\delta V_y}{\delta y} dy \quad dM_x = \frac{\delta M_x}{\delta x} dx \quad dM_y = \frac{\delta M_y}{\delta y} dy \quad dT_x = \frac{\delta T_x}{\delta x} dx \quad dT_y = \frac{\delta T_y}{\delta y} dy$$

Recurriendo a la notación diferencial las ecuaciones de equilibrio resultan:

- sumatoria de fuerzas igual a cero:

$$\frac{\delta V_x}{\delta x} dx dy + \frac{\delta V_y}{\delta y} dy dx + p dx dy = 0$$

- sumatoria de momentos con respecto al eje x, despreciando el momento de la carga p.dxdy por ser un infinitésimo de mayor orden que el resto:

$$\frac{\delta T_x}{\delta x} dx dy - \frac{\delta M_y}{\delta y} dy dx - V_y dx dy = 0$$

- sumatoria de momentos con respecto al eje y, despreciando el momento de la carga p.dxdy por ser un infinitésimo de mayor orden que el resto:

$$\frac{\delta T_y}{\delta y} dy dx + \frac{\delta M_x}{\delta x} dx dy + V_x dy dx = 0$$

Simplificando:

$$\frac{\delta V_x}{\delta x} + \frac{\delta V_y}{\delta y} + p = 0$$

$$\frac{\delta T_x}{\delta x} - \frac{\delta M_y}{\delta y} - V_y = 0$$

$$\frac{\delta T_y}{\delta y} + \frac{\delta M_x}{\delta x} + V_x = 0$$

Derivando la segunda ecuación con respecto a y, y la tercera con respecto a x

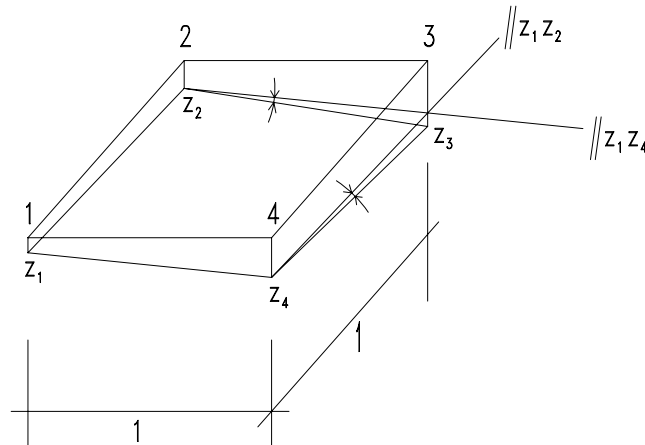
$$\frac{\delta^2 T_x}{\delta x \delta y} - \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} - \frac{\delta V_y}{\delta y} = 0$$

$$\frac{\delta^2 T_y}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + \frac{\delta V_x}{\delta x} = 0$$

En este punto del desarrollo resulta conveniente y sencillo demostrar que los momentos torsores en x y en y resultan iguales en valor absoluto y de signo contrario.

Para ello se vuelve a tomar un trozo de placa (1,2,3,4) de dimensiones 1 y se pone en evidencia su alabeo, deformación que se vincula a los momentos torsores.

Los cuatro vértices sufren descensos distintos z_1, z_2, z_3, z_4 .



Trazando las paralelas a z_1z_2 y a z_1z_4 queda conformado un plano por esas rectas y sus paralelas y se pone así en evidencia la igualdad de los ángulos de alabeo señalados.

Es decir que el giro producido en el sentido x es igual al giro producido en el sentido y, lo que significa la igualdad de los momentos torsores en las dos direcciones.

$$T_x = -T_y$$

Sustituyendo T_x en la primera ecuación de equilibrio de momentos resulta:

$$-\frac{\delta^2 T_y}{\delta x \delta y} - \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} - \frac{\delta V_y}{\delta y} = 0$$

$$\frac{\delta^2 T_y}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + \frac{\delta V_x}{\delta x} = 0$$

Restando la primera ecuación de la segunda y eliminando el subíndice para los torsos, dada la igualdad señalada:

$$2 \frac{\delta^2 T}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} + \frac{\delta V_x}{\delta x} + \frac{\delta V_y}{\delta y} = 0$$

siendo

$$\frac{\delta V_x}{\delta x} + \frac{\delta V_y}{\delta y} + p = 0$$

$$2 \frac{\delta^2 T}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} - p = 0$$

y finalmente:

$$\frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 T}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} = p$$

Ecuación diferencial que relaciona la carga y los momentos en una placa y que es una de las ecuaciones fundamentales para su resolución.

RELACIONES ENTRE SOLICITACIONES Y DEFORMACIONES

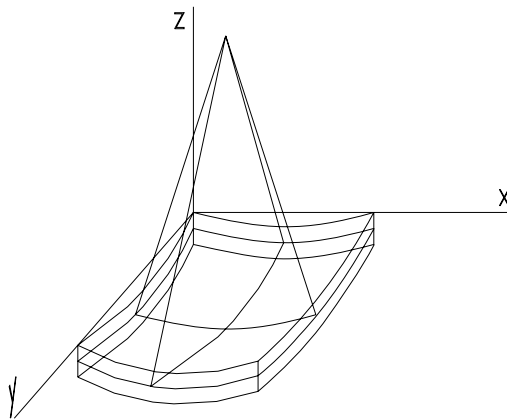
Las ecuaciones diferenciales que expresan las relaciones entre cargas y solicitaciones no resultan suficientes para la determinación de las solicitaciones en las placas, aún cuando se conozcan las reacciones de apoyo (condiciones de borde) que es lo que sucede en las barras.

Inclusive para los casos de losas aisladas es necesario hacer intervenir el estudio de las deformaciones ya que las incógnitas a determinar son cinco.

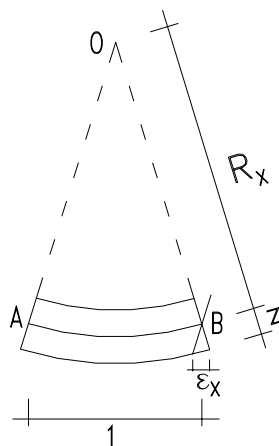
Se designará como ω a la función que expresa la superficie de la losa deformada.

Para establecer la relación entre momentos flectores y deformaciones se razona análogamente al caso de las barras, pero considerando la influencia que las deformaciones en una dirección tienen en la otra debido al efecto Poisson.

Sea un elemento de losa de lados uno.



Realizando el estudio en la dirección x, se tiene que el estiramiento producido por la curvatura valdrá ε y que por semejanza de triángulos se establece que



$$\frac{\varepsilon_x}{1} = \frac{z}{R_x} \quad \varepsilon_x = \frac{z}{R_x}$$

En los elementos estructurales lineales en general se desprecia las deformaciones que se producen en el sentido perpendicular a la deformación principal. Cuando se establece que un pilar se acorta no se tienen en cuenta los ensanchamientos que se producen en su sección, solamente se toman medidas normativas para cubrir esas tracciones.

En los elementos estructurales bidimensionales, como las placas, en cambio se suele tener en cuenta esta influencia ya que los dos sentidos son principales.

Una tensión σ_x se asocia a la deformación ε'_x a través de la ley de Hooke $\varepsilon'_x = \sigma_x / E$ (E , módulo de elasticidad). La tensión σ_x produce también deformaciones en el sentido y , de valor ε''_y estando relacionadas por la expresión $\varepsilon''_y = \nu \cdot \sigma_x / E$ (ν , módulo de Poisson). Por analogía $\varepsilon'_y = \sigma_y / E$ y $\varepsilon''_x = \nu \cdot \sigma_y / E$.

Superponiendo Resulta la siguiente expresión para la deformación ε_x :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\frac{z}{R_x} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

Por analogía se puede establecer que en el sentido y :

$$\frac{\varepsilon_y}{1} = \frac{z}{R_y} \quad \varepsilon_y = \frac{z}{R_y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\frac{z}{R_y} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

Resolviendo el sistema σ_y , σ_x se obtienen los valores de las tensiones.

$$\frac{Ez}{R_y} + \nu \sigma_x = \sigma_y$$

$$\frac{z}{R_x} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\frac{Ez}{R_x} = \sigma_x - \nu \frac{Ez}{R_y} - \nu^2 \sigma_x$$

$$\frac{Ez}{R_x} + \nu \frac{Ez}{R_y} = \sigma_x - \nu^2 \sigma_x$$

$$Ez \left(\frac{1}{R_x} + \nu \frac{1}{R_y} \right) = \sigma_x (1 - \nu^2)$$

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{1}{R_x} + \nu \frac{1}{R_y} \right)$$

y por analogía:

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{1}{R_y} + \nu \frac{1}{R_x} \right)$$

Integrando en el espesor h de la placa los productos de las tensiones σ actuando en los diferenciales de superficie $1 \cdot dz$ por las distancias z al eje neutro resulta para los momentos flectores:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \cdot z = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{1}{R_x} + \nu \frac{1}{R_y} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot dz = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{1}{R_x} + \nu \frac{1}{R_y} \right) \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$\frac{\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}}{3} = \frac{h^3}{12}$$

$$M_x = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{1}{R_x} + \nu \frac{1}{R_y} \right)$$

haciendo:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

expresando las curvaturas como derivadas segundas de la función que da la superficie deformada, ω , se tiene:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{\delta^2 \omega}{\delta x^2} \quad \frac{1}{R_y} = \frac{\delta^2 \omega}{\delta y^2}$$

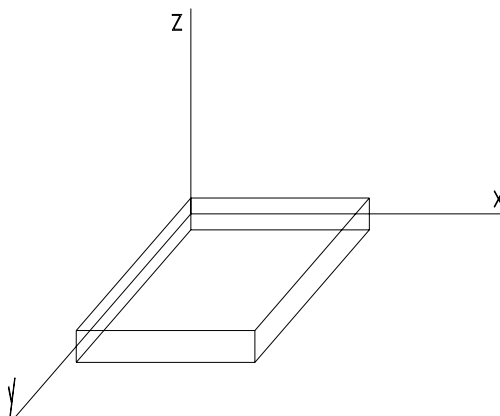
por lo cual:

$$M_x = D \left(\frac{\delta^2 \omega}{\delta x^2} + \nu \frac{\delta^2 \omega}{\delta y^2} \right)$$

y por analogía:

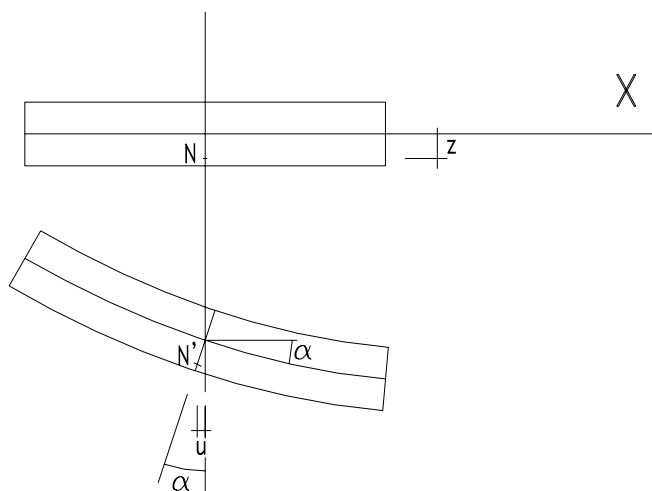
$$M_y = D \left(\frac{\delta^2 \omega}{\delta y^2} + \nu \frac{\delta^2 \omega}{\delta x^2} \right)$$

Para establecer la relación entre momentos torsores y deformaciones se recurre nuevamente a un trozo de placa de lados 1.¹⁵



Los momentos torsores que actúan en las cuatro caras del elemento producen deformaciones angulares en planos horizontales de dicho elemento que se pueden cuantificar analizando cortes de la placa deformada, paralelos a los planos coordenados.

Si se realiza un corte paralelo al plano zx y se representa el mismo elemento deformado se tiene que todos los puntos pertenecientes al plano medio descienden manteniendo la misma abscisa y que puntos tales como el N que no pertenecen a ese plano medio no solamente descienden sino que además se desplazan en horizontal magnitudes que genéricamente designamos como u y que son distintas para cada punto.

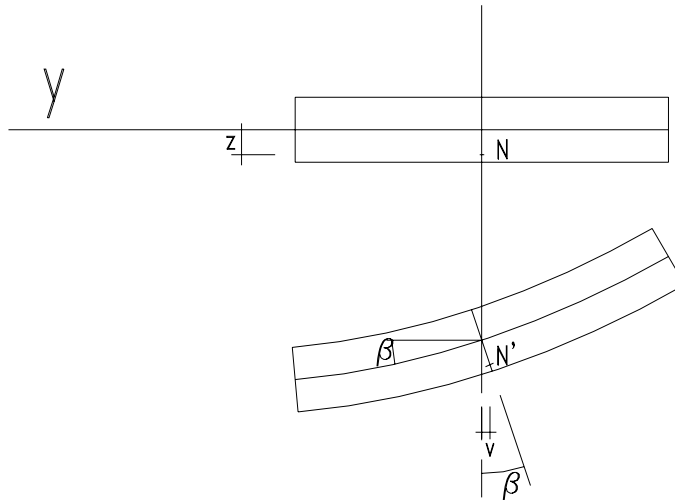


Llamando ω a la función descensos la tangente de α es la derivada primera de ω y el valor de u es:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta \omega}{\delta x} \quad u = z \frac{\delta \omega}{\delta x}$$

¹⁵ Para una mejor comprensión de esta parte de la exposición es conveniente consultar previamente la Sección I, Capítulos I y II de la publicación VERIFICACIÓN A LA TORSIÓN - Estabilidad de las Construcciones III – Olceda..

Lo mismo sucede en un corte paralelo al plano zy:



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\delta \omega}{\delta y} \quad v = z \frac{\delta \omega}{\delta y}$$

Si se representa en proyección horizontal la deformación de uno cualquiera de esos planos paralelos al plano medio, como los cuatro vértices se desplazaran magnitudes u y v distintas el cuadrado inicial se transforma en un romboide.

Si los desplazamientos del punto 1, que pasa a la posición 1', son u y v, el desplazamiento según el eje x del punto 4 valdrá u más la derivada de la función u por la distancia entre los puntos 1 y 4 que es de valor unitario¹⁶:

$$u + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot 1$$

Análogamente el desplazamiento según y del punto 2 valdrá:

$$v + \frac{\delta v}{\delta x} \cdot 1$$

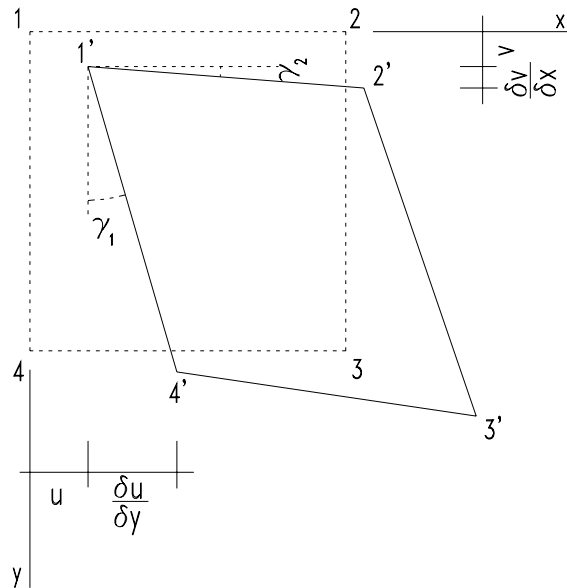
Por ser las deformaciones muy pequeñas:

$$\gamma_1 = \operatorname{sen} \gamma_1 = \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\delta u}{\delta y} \quad \gamma_2 = \operatorname{sen} \gamma_2 = \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\delta v}{\delta x}$$

El ángulo en 1', antes recto, pasa a un valor $90 - \gamma$ donde $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

$$\gamma = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x}$$

¹⁶ Es la misma definición que se aceptó para expresar la variación de las solicitaciones en el inicio del trabajo.



siendo u y v :

$$u = z \frac{\delta \omega}{\delta x} \quad v = z \frac{\delta \omega}{\delta y}$$

resulta para la distorsión angular γ :

$$\gamma = z \frac{\delta^2 \omega}{\delta x \delta y} + z \frac{\delta^2 \omega}{\delta y \delta x}$$

$$\gamma = 2 z \frac{\delta^2 \omega}{\delta x \delta y}$$

Siendo el material elástico:

$$\tau = \gamma \cdot G$$

Tomando para G el valor:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Resulta para τ :

$$\tau = \frac{E}{1 + \nu} \frac{\delta^2 \omega}{\delta x \delta y} z$$

Al igual que para el caso de los momentos flectores, integrando en el espesor h de la placa los productos de las tensiones τ actuando en los diferenciales de superficie $1 \cdot dz$ por las distancias z al eje neutro resulta para el momento torsor:

$$T = \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz \cdot z = \frac{E}{1+\nu} \frac{\delta^2 \omega}{\delta x \delta y} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{E}{1+\nu} \frac{\delta^2 \omega}{\delta x \delta y} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$\frac{\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}}{3} = \frac{h^3}{12}$$

$$T = \frac{E h^3}{12(1+\nu)} \frac{\delta^2 \omega}{\delta x \delta y} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \frac{\delta^2 \omega}{\delta x \delta y}$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$T = D (1-\nu) \frac{\delta^2 \omega}{\delta x \delta y}$$

RELACION ENTRE LA DEFORMACIÓN (FLECHA) Y LA CARGA

Sustituyendo en la expresión:

$$\frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 T}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} = p$$

los valores de M_x , M_y y T que fueron hallados en función de ω :

$$\frac{\delta^2 \left(\frac{\delta^2 \omega}{\delta x^2} + \nu \frac{\delta^2 \omega}{\delta y^2} \right)}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 (1-\nu) \frac{\delta^2 \omega}{\delta x \delta y}}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 \left(\frac{\delta^2 \omega}{\delta y^2} + \nu \frac{\delta^2 \omega}{\delta x^2} \right)}{\delta y^2} = \frac{p}{D}$$

$$\frac{\delta^4 \omega}{\delta x^4} + \nu \frac{\delta^4 \omega}{\delta x^2 \delta y^2} + 2(1-\nu) \frac{\delta^4 \omega}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 \omega}{\delta y^4} + \nu \frac{\delta^4 \omega}{\delta x^2 \delta y^2} = \frac{p}{D}$$

$$\frac{\delta^4 \omega}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 \omega}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 \omega}{\delta y^4} = \frac{p}{D}$$

Esta expresión que relaciona la deformada ω con la carga actuante es conocida como ECUACIÓN DE LAGRANGE.

APROXIMACIÓN AL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Para hallar las solicitaciones de una placa se requiere resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales a las que se les imponen las condiciones de apoyo del caso.

$$\frac{\delta^4 \omega}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 \omega}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 \omega}{\delta y^4} = \frac{p}{D}$$

$$M_x = D \left(\frac{\delta^2 \omega}{\delta x^2} + \nu \frac{\delta^2 \omega}{\delta y^2} \right)$$

$$M_y = D \left(\frac{\delta^2 \omega}{\delta y^2} + \nu \frac{\delta^2 \omega}{\delta x^2} \right)$$

$$T = D (1 - \nu) \frac{\delta^2 \omega}{\delta x \delta y}$$

$$\frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 T}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} = p$$

$$\frac{\delta V_x}{\delta x} + \frac{\delta V_y}{\delta y} + p = 0$$

Esto mismo sucede para las barras. En ese caso las ecuaciones que regulan las solicitaciones son:

$$\frac{\delta V}{\delta x} + p = 0 \quad \frac{\delta^2 M}{\delta x^2} = p \quad \frac{\delta^4 \omega}{\delta x^4} = \frac{p}{EI} \quad \frac{\delta^2 \omega}{\delta x^2} = \frac{M}{EI}$$

Resolviendo estas ecuaciones para el caso de carga uniforme se obtiene el conocido resultado de una ecuación de primer grado para el cortante y una de segundo para el flector, ecuaciones que son válidas para cualquier caso, independientemente de las condiciones de apoyo:

$$V = -p \cdot x + k_1 \quad M = -\frac{p \cdot x^2}{2} + k_1 \cdot x + k_2$$

En una segunda etapa se imponen las condiciones de apoyo (condiciones de borde) que particularizan las ecuaciones al caso, al fijar las dos constantes de integración, si se considera el caso de una viga simplemente apoyada resulta para el apoyo A ($x=0$) donde se conocen los valores del cortante y el flector:

$$x = 0 \quad V = \frac{p \cdot l}{2} = V_A \quad M = 0$$

por lo tanto:

$$k_1 = V_A \quad k_2 = 0$$

$$V = -p \cdot x + V_A \quad M = -\frac{p \cdot x^2}{2} + V_A \cdot x$$

Si fuese una ménsula con el apoyo libre a la izquierda ($x=0$) sería

$$x = 0 \quad V = 0 \quad M = 0$$

por lo tanto:

$$k_1 = 0 \quad k_2 = 0$$

$$V = -p \cdot x \quad M = -\frac{p \cdot x^2}{2}$$

Si se integra dos veces la función momento se puede obtener la ecuación de la deformada proceso que no aporta a la resolución de las solicitaciones en estos casos por tratarse de tramos isostáticos.

La aplicación del mismo proceso para las placas resulta un problema de mucha mayor complejidad.

Se debe comenzar por resolver la ecuación diferencial de Lagrange.

Resolver la ecuación diferencial de Lagrange significa poder hallar la función ω que la verifique. Una vez determinada ω derivándola se podrán hallar las ecuaciones que dan los momentos y los cortantes.

Sin embargo, esta ecuación diferencial no tiene solución exacta más que en algunos casos, por ejemplo en placas circulares con simetría axial.

Esto lleva a que la determinación de solicitaciones dentro de la teoría de las placas se resuelva por métodos aproximados. Estos métodos han ido evolucionando desde la aplicación de series y diferencias finitas, al más usado hoy en día que es el de los elementos finitos, método de gran potencia operativa y que posibilita una excelente aproximación.

El método de los elementos finitos se crea y difunde al disponerse de medios informáticos que posibilitan la utilización de las técnicas numéricas.

Las técnicas numéricas, a diferencia de las soluciones analíticas que expresan el comportamiento exacto en cualquier punto de un sistema, dan soluciones exactas en algunos puntos que se denominan nodos.

Estas técnicas parten de plantear una discretización del medio en que actúan, es decir una división del medio continuo original en una serie de partes vinculadas entre sí en los nodos.

Estas partes o regiones reciben el nombre de elementos finitos, en contraposición de lo que hace el cálculo analítico que divide el continuo en infinitésimos.

Las propiedades materiales y relaciones gobernantes en estos elementos se expresan en función de los valores desconocidos en las "esquinas" de los elementos o nodos (ver Figura 1).

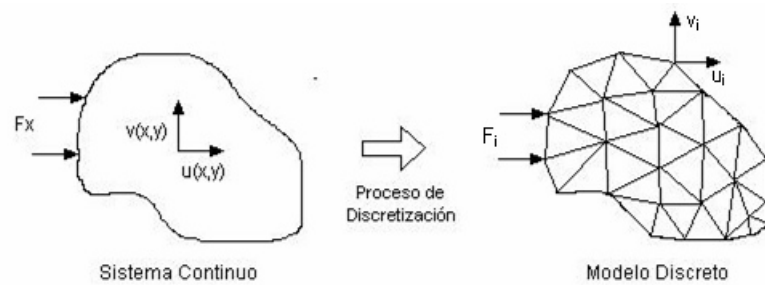
Una de las ventajas de este método es su facilidad de implementación en un programa computacional, que a su vez es una condición básica para su

utilización ya que para el tratamiento de un problema en particular debe efectuarse un número muy elevado de operaciones para resolver sistemas algebraicos del orden de cientos o miles de ecuaciones.

No obstante, esta cantidad no es una limitación con las computadoras estándar de hoy.

Las ideas básicas de este método se originaron en avances en el análisis estructural de la industria aeronáutica en la década del '50. En la década del '60 el método fue generalizado para la solución aproximada de problemas de análisis de tensión, flujo de fluidos y transferencia de calor.

El primer libro sobre elementos finitos fue publicado en 1967 por Zienkiewicz y Cheung. En la década del '70 el método fue extendido al análisis de problemas no lineales de la mecánica del continuo. Hoy el método permite resolver prácticamente cualquier situación física que pueda formularse mediante un sistema de ecuaciones diferenciales.



Este método aproximado de resolución de placas se integra perfectamente a los métodos matriciales de resolución de entramados.

Los programas computacionales de cálculo discretizan las estructuras en elementos tipo barra para pilares y vigas y en elementos finitos triangulares para las placas resolviendo luego de conjunto el sistema de ecuaciones resultante.

BIBLIOGRAFÍA

HAHN

Vigas continuas, pórticos y placas.
Gustavo Gili, Barcelona 1972

R. BARES

Tablas para el cálculo de placas y vigas pared.
Gustavo Gili, Barcelona 1981

FRITZ LEONHARDT

Estructuras de hormigón armado.
El Ateneo, Buenos Aires 1985

JIMENEZ MONTOYA, GARCÍA MESEGUER, MORÁN CABRÉ

Hormigón armado.
Gustavo Gili, Barcelona

JOSÉ CALAVERA

Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón.
Intemac, Madrid

NORMAS UNIT

Proyecto y ejecución de estructuras en masa o armado. Norma 1050.
Unit, Montevideo 2005

IC

Tablas para proyecto de estructuras.
Facultad de Arquitectura—Universidad de la República, Montevideo, 1995

H. CHAMLIAN

Estabilidad 2 - Losas
Olceda, Montevideo 1990

ÍNDICE

PRÓLOGO	3
CAPÍTULO I Generalidades	5
CAPÍTULO II Losa rectangular sobre apoyos paralelos Losa en ménsula	9
CAPÍTULO III Losa rectangular apoyada en todo su perímetro	17
CAPÍTULO IV Otros casos de forma de planta y apoyo	21
CAPÍTULO V Losa rectangular apoyada en puntos	31
CAPÍTULO VI Disposiciones sobre el proyecto	37
CAPÍTULO VII Resolución de un ejemplo	41
ANEXO Modelo matemático del comportamiento de las placas	49
BIBLIOGRAFÍA	65