

Panorama conceptual de la “Ficha Nº 2- Método de Cross”

Comentarios para un mejor abordaje de sus contenidos.

➤ Se recomienda haber leído previamente la introducción general a los métodos de resolución de estructuras hiperestáticas. (Ficha Nº 1; páginas 8 y 9).

➤ Para abordar el estudio de la Ficha Nº 2 comenzar con la introducción al método (páginas 2 a 4).

Todo método que apunte a resolver estructuras hiperestáticas se basa en el estudio de las deformaciones (giros, alargamientos o acortamientos). El método de Cross se basa en el estudio de los giros, y para simplificar la operativa manual, desprecia las deformaciones provocadas por el axil, por ser de un orden muy inferior.

El objetivo inmediato del método es conocer los **momentos en los extremos de los tramos, a través del estudio de los giros en esos puntos.**

ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES II

CAPÍTULO 1

Se comienza estudiando una sola barra aislada para determinar expresiones matemáticas auxiliares que nos permitan **conocer los ángulos de giro en los apoyos** de tramos flexionados.

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 3

[PASO 1]

Se determinan expresiones para conocer **los ángulos de giro, θ (theta), en los extremos de una barra aislada**

[PASO 2]

Se determina el ***coeficiente de transmisión β***

[PASO 3]

Se determinan las expresiones de los denominados ***momentos de fijación, momentos frenos o de empotramiento perfecto***

[PASO 4]

Se determinan las expresiones de los **Coeficientes de Repartición**

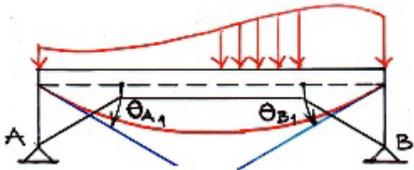
[PASO 5]

Artificio del Método de Cross.
Aplicación de los conceptos anteriores a una estructura concreta.

ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES II

[PASO 1]

Se determinan expresiones para conocer los **ángulos de giro, θ (theta)**, en los **extremos de una barra aislada** con:



- a) **Carga transversal**
(ítems 1.2 y 1.3; págs. 5 a 7).

- b) **Un momento aplicado en su extremo izquierdo**
(ítem 1.4, sub ítem 1.4.1; pág. 8)

- c) **Un momento aplicado en su extremo derecho**
(sub ítem 1.4.1; pág. 9)

CAPÍTULO 1

Con las expresiones halladas y mediante el **Principio de Superposición** se pueden obtener el valor de los giros en los apoyos de todos los casos que se puedan presentar.

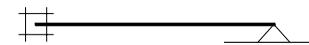
RIGIDEZ:

$$\kappa = \frac{E \cdot I_{\min}}{L}$$

Se define un concepto básico como **rigidez, K** (kappa)

Se agrega el concepto de **rigidez flexional, γK** (gamma kappa) ó **αK** (alfa kappa, como usaremos en la práctica para facilitar la operativa), incorporando la influencia de los vínculos.

$$I = \text{Cte.}$$



$$\gamma = 3$$

$$\alpha = 0,75$$

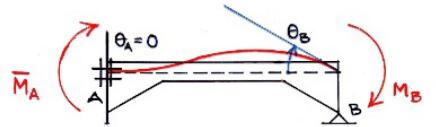
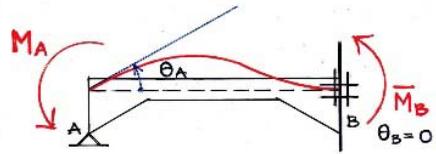
[PASO 2]

Se determina el **coeficiente de transmisión β**

CAPÍTULO 1

Se estudia el caso de una barra con un extremo impedido de girar y un momento aplicado en el otro extremo.

Se dan dos situaciones:



a) momento aplicado en A y extremo B frenado

b) momento aplicado en B y extremo A frenado

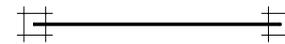
(Sub ítem 1.4.2; págs. 9 a 12)

Se determina cuanto vale el momento que hay que aplicar en el extremo frenado para que tenga giro nulo, actuando un momento en el otro extremo; así se determina la expresión del **coeficiente de transmisión β (beta)**. También se hallan valores del coeficiente γ ó α para otra condición de vínculos.

$$I = \text{Cte.}$$

$$\beta = 0,5$$

$$I = \text{Cte.}$$

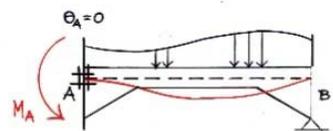
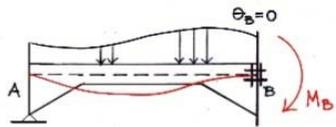
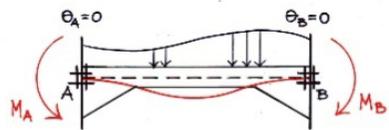


$$\gamma = 4$$

$$\alpha = 1$$

[PASO 3]

Se determinan las expresiones que nos dan los valores de los denominados **momentos de fijación, momentos frenos o de empotramiento perfecto (M.E.P.)**, para los casos de carga transversal en el tramo.



CAPÍTULO 1

Se averigua qué momentos tienen que ejercer los aparatos fijadores para que los extremos frenados tengan giro nulo, actuando carga perpendicular al tramo, para tres casos (Subítems 1.5.1; 1.5.2 y 1.5.3; págs. 12 a 19):

a) El tramo frenado en ambos extremos

Para casos de tramos con inercia constante y carga uniformemente distribuida se llegan a expresiones simples, que constituyen expresiones de aplicación práctica en los casos más comunes :

i. tramo con ambos extremos frenados

$$I = \text{Cte.}$$

$$\text{M.E.P.} = \frac{p \cdot L^2}{12}$$

b) El tramo frenado sólo en el extremo derecho

ii. tramo con un extremo frenado y el otro articulado

$$I = \text{Cte.}$$

$$\text{M.E.P.} = \frac{p \cdot L^2}{8}$$

c) El tramo frenado sólo en el extremo izquierdo

Para otros tipos de carga se utilizará la Tabla II-2 en la que se dan las expresiones para la determinación de los M.E.P., y que, además, contiene las expresiones para hallar las reacciones de apoyo.

(VER: Tabla II-2 titulada: Momentos de empotramiento para piezas de $I=\text{cte}$, complementada con las tablas II-3 y II-4).

Posteriormente se determinan las expresiones de los **momentos de fijación en tramos con corrimientos de los extremos**, en los sub ítems 1.5.4 al 1.5.7 (páginas 15 a 19), para barras con los dos extremos frenados y con un extremo frenado y otro articulado, ya sean de inercia variable o constante. Lo importante en este paso es que se fijan las reglas a tener en cuenta para el trazado de la deformación de la estructura bajo la acción de una fuerza de desviación.

ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES II

Tabla 5.1.1 - pág 53

[PASO 3]

Tabla II-2 titulada: Momentos de empotramiento para piezas de $I=cte$, complementada con las tablas II-3 y II-4

Expresiones para hallar las reacciones de apoyo

Expresiones para la determinación de los M.E.P.

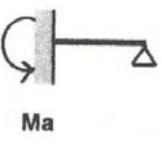
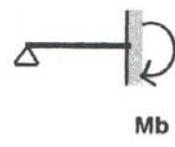
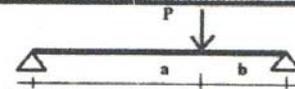
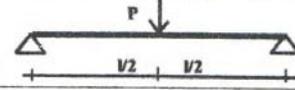
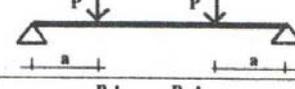
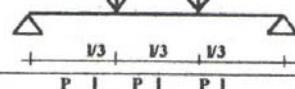
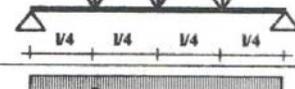
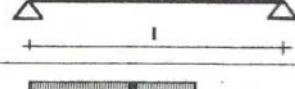
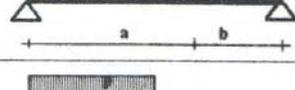
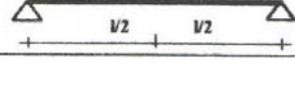
| REACCIONES Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PARA TRAMOS DE INERCIA CONSTANTE | | | | | | | |
|---|---------------------------------|-------------------|---|---|--|--|--|
| | | | | | | | |
| CARGAS | Ra | Rb | Ma | Mb | Ma | Mb | |
| | $\frac{Pb}{l}$ | $\frac{Pa}{l}$ | $\frac{Pab}{2l^2}(l+b)$ | $\frac{Pab}{2l^2}(l+a)$ | $\frac{Pab}{l^2}b$ | $\frac{Pab}{l^2}a$ | |
| | $\frac{P}{2}$ | $\frac{P}{2}$ | $\frac{3}{16}Pl$ | $\frac{3}{16}Pl$ | $\frac{1}{8}Pl$ | $\frac{1}{8}Pl$ | |
| | P | P | $\frac{3}{2}Pa(1-\frac{a}{l})$ | $\frac{3}{2}Pa(1-\frac{a}{l})$ | $Pa(1-\frac{a}{l})$ | $Pa(1-\frac{a}{l})$ | |
| | P | P | $\frac{1}{3}Pl$ | $\frac{1}{3}Pl$ | $\frac{2}{9}Pl$ | $\frac{2}{9}Pl$ | |
| | $1.5P$ | $1.5P$ | $\frac{15}{32}Pl$ | $\frac{15}{32}Pl$ | $\frac{5}{16}Pl$ | $\frac{5}{16}Pl$ | |
| | $\frac{pl}{2}$ | $\frac{pl}{2}$ | $\frac{1}{8}pl^2$ | $\frac{1}{8}pl^2$ | $\frac{1}{12}pl^2$ | $\frac{1}{12}pl^2$ | |
| | $\frac{pa}{l}(b+\frac{a}{2})$ | $\frac{pa^2}{2l}$ | $\frac{pa^2}{8}(2-\frac{a}{l})^2$ | $\frac{pa^2}{8}(2-\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{pa^2}{12}(6-8\frac{a}{l}+3\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{pa^2}{12}(4-\frac{a}{l}\frac{a^2}{l^2})$ | |
| | $\frac{3}{8}pl$ | $\frac{1}{8}pl$ | $\frac{9}{128}pl^2$ | $\frac{7}{128}pl^2$ | $\frac{11}{192}pl^2$ | $\frac{5}{192}pl^2$ | |
| | pa | pa | $\frac{pa^2}{4}(3-2\frac{a}{l})$ | $\frac{pa^2}{4}(3-2\frac{a}{l})$ | $\frac{pa^2}{6}(3-2\frac{a}{l})$ | $\frac{pa^2}{6}(3-2\frac{a}{l})$ | |
| | $\frac{pcb}{l}$ | $\frac{pca}{l}$ | $\frac{pabc}{2l^2}(l+b-\frac{c^2}{4a})$ | $\frac{pabc}{2l^2}(l+a-\frac{c^2}{4b})$ | $\frac{pc}{l^2}[ab^2+\frac{c^2}{12}(l-3b)]$ | $\frac{pc}{l^2}[a^2b+\frac{c^2}{12}(l-3a)]$ | |
| | $\frac{pa}{2}$ | $\frac{pa}{2}$ | $\frac{pla}{16}(3-\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{pla}{16}(3-\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{pla}{24}(3-\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{pla}{24}(3-\frac{a^2}{l^2})$ | |
| | $\frac{pa}{2}(1-\frac{2a}{3l})$ | $\frac{pa^2}{3l}$ | $\frac{pa^2}{20}(40-48\frac{a}{l}+12\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{pa^2}{60}(10-6\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{pa^2}{30}(10-16\frac{a}{l}+6\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{pa^2}{20}(5\frac{a}{l}-4\frac{a^2}{l^2})$ | |
| | $\frac{pl}{6}$ | $\frac{pl}{3}$ | $\frac{7}{120}pl^2$ | $\frac{1}{15}pl^2$ | $\frac{1}{30}pl^2$ | $\frac{1}{20}pl^2$ | |
| | $\frac{pl}{4}$ | $\frac{pl}{4}$ | $\frac{5}{64}pl^2$ | $\frac{5}{64}pl^2$ | $\frac{5}{96}pl^2$ | $\frac{5}{96}pl^2$ | |
| | $\frac{pa}{2}(1-\frac{a}{6l})$ | $\frac{pa^2}{6l}$ | $\frac{pa^2}{120}(20-16\frac{a}{l}+3\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{pa^2}{120}(10-3\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{pa^2}{60}(10-10\frac{a}{l}+3\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{pa^2}{60}(5\frac{a}{l}-3\frac{a^2}{l^2})$ | |
| | $\frac{pl}{3}$ | $\frac{pl}{3}$ | $\frac{1}{10}pl^2$ | $\frac{1}{10}pl^2$ | $\frac{1}{15}pl^2$ | $\frac{1}{15}pl^2$ | |
| | $\frac{l-a}{2}$ | $\frac{l-a}{2}$ | $\frac{pl}{64}(l+b)(5-\frac{b^2}{l^2})$ | $\frac{pl}{64}(l+b)(5-\frac{b^2}{l^2})$ | $\frac{pl}{64}(l+b)(5-\frac{b^2}{l^2})$ | $\frac{pl}{64}(l+b)(5-\frac{b^2}{l^2})$ | |
| | $\frac{m}{l}$ | $\frac{m}{l}$ | $\frac{m}{2}(1-3\frac{b^2}{l^2})$ | $\frac{m}{2}(1-3\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{mb}{l}(2-3\frac{b}{l})$ | $\frac{ma}{l}(2-3\frac{a}{l})$ | |

[PASO 3]

Tabla II-2 titulada: Momentos de empotramiento para piezas de $I=cte$, complementada con las tablas II-3 y II-4

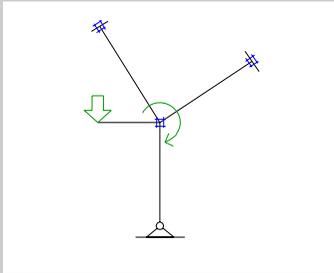
Expresiones para hallar las reacciones de apoyo

Expresiones para la determinación de los M.E.P.

| REACCIONES Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PARA TRAMOS DE INERCIA CONSTANTE | | | | | | |
|--|-------------------------------|-------------------|-----------------------------------|---|---|---|
| | | | |  |  |  |
| CARGAS | Ra | Rb | Ma | Mb | Ma | Mb |
|  | $\frac{Pb}{l}$ | $\frac{Pa}{l}$ | $\frac{Pab}{2l^2} (l+b)$ | $\frac{Pab}{2l^2} (l+a)$ | $\frac{Pab}{l^2} b$ | $\frac{Pab}{l^2} a$ |
|  | $\frac{P}{2}$ | $\frac{P}{2}$ | $\frac{3}{16} Pl$ | $\frac{3}{16} Pl$ | $\frac{1}{8} Pl$ | $\frac{1}{8} Pl$ |
|  | P | P | $\frac{3}{2} Pa(1-\frac{a}{l})$ | $\frac{3}{2} Pa(1-\frac{a}{l})$ | $Pa(1-\frac{a}{l})$ | $Pa(1-\frac{a}{l})$ |
|  | P | P | $\frac{1}{3} Pl$ | $\frac{1}{3} Pl$ | $\frac{2}{9} Pl$ | $\frac{2}{9} Pl$ |
|  | 1.5 P | 1.5 P | $\frac{15}{32} Pl$ | $\frac{15}{32} Pl$ | $\frac{5}{16} Pl$ | $\frac{5}{16} Pl$ |
|  | $\frac{pl}{2}$ | $\frac{pl}{2}$ | $\frac{1}{8} pl^2$ | $\frac{1}{8} pl^2$ | $\frac{1}{12} pl^2$ | $\frac{1}{12} pl^2$ |
|  | $\frac{pa}{l}(b+\frac{a}{2})$ | $\frac{pa^2}{2l}$ | $\frac{pa^2}{8}(2-\frac{a}{l})^2$ | $\frac{pa^2}{8}(2-\frac{a}{l})^2$ | $\frac{pa^2}{12}(6-8\frac{a}{l}+3\frac{a^2}{l^2})$ | $\frac{pa^2}{12}(4\frac{a}{l}-3\frac{a^2}{l^2})$ |
|  | $\frac{3}{8} pl$ | $\frac{1}{8} pl$ | $\frac{9}{128} pl^2$ | $\frac{7}{128} pl^2$ | $\frac{11}{192} pl^2$ | $\frac{5}{192} pl^2$ |

[PASO 4]

Se determinan las expresiones de los **Coefficientes de Repartición**



CAPÍTULO 2

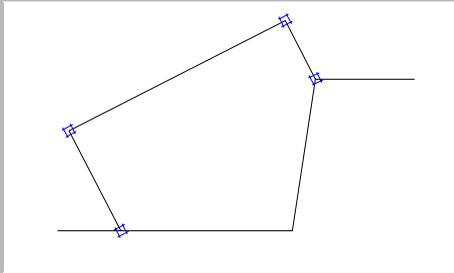
Conocidas ya las expresiones de los giros en una barra aislada, nos planteamos ahora un conjunto de barras que se unen en un nudo, para plantear el concepto de **repartición** en los nudos frenados cuando se los libera (sub ítem 2.1 y 2.2; págs 20 a 23).

Luego una síntesis de las **etapas básicas del artificio**, a través de un ejemplo de estructura ficticia de un solo nudo (sub ítem 2.3; págs 24 a 28).

[PASO 5]

Artificio del Método de Cross.

Aplicación de los conceptos anteriores a una estructura concreta.

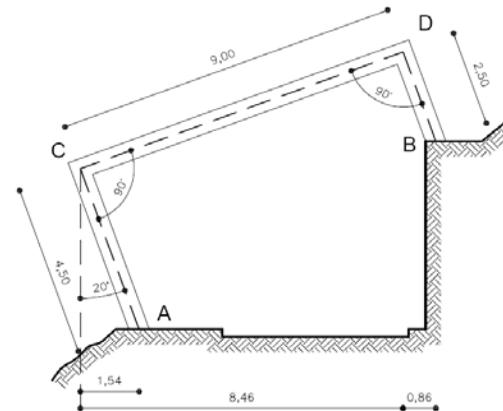
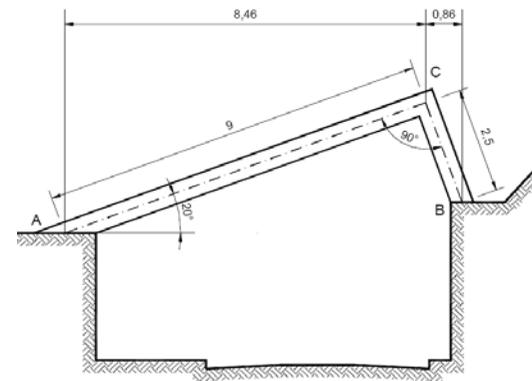
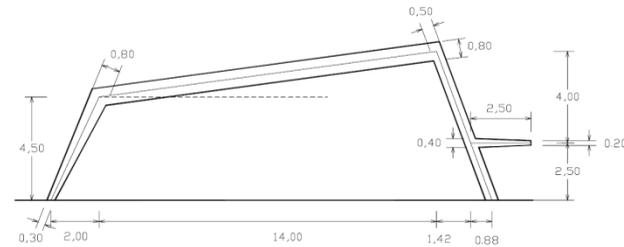


Llegados a este punto ya se está en condiciones de encarar algún ejemplo práctico.

En la Ficha 2 se plantea un ejemplo muy completo y por lo tanto bastante complejo:

...por lo que recomendamos **comenzar analizando** el Ejemplo de Cross 1;

... y posteriormente el Ejemplo de Cross 3



CAPÍTULO 3 (págs. 29 a 45).

Se desarrolla un **ejercicio completo**, que incluye la etapa del método denominada “segundo Cross”, donde se plantea la deformación de la estructura ante los corrimientos (desplazamientos) de los nudos, y que incluye una barra de inercia variable.

Disponibles en la web:

Estabilidad II →

Curso semipresencial →

Unidad Temática 2:

➤ Ejemplo de Cross 1

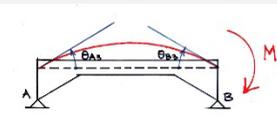
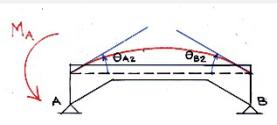
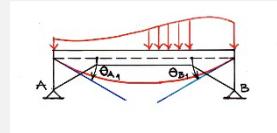
➤ Ejemplo de Cross 3

COMO RESUMEN:

ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES II

[PASO 1]

Se determinan expresiones para conocer los **ángulos de giro, θ (theta)**, en los extremos de una barra aislada



RIGIDEZ:

$$\chi = \frac{E \cdot I_{\text{mín}}}{L}$$

$I = \text{Cte.}$



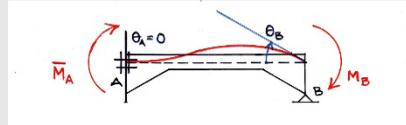
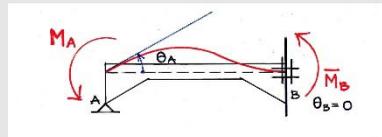
$$\gamma = 3$$

$$\alpha = 0,75$$

(Subítems 1.2 , 1.3, 1.4.1; págs. 5 a 9)

[PASO 2]

Se determina el **coeficiente de transmisión β**



$$I = \text{Cte.}$$

$$\beta = 0,5$$

$I = \text{Cte.}$



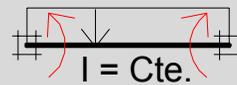
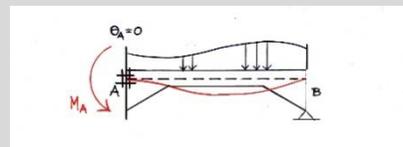
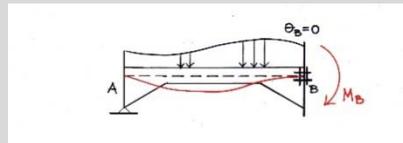
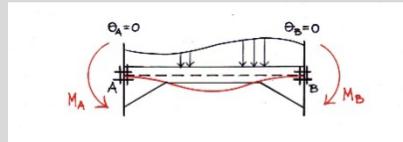
$$\gamma = 4$$

$$\alpha = 1$$

(Sub ítem 1.4.2; págs. 9 a 12)

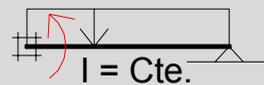
[PASO 3]

Se determinan las expresiones de los denominados **momentos de fijación, momentos frenos o de empotramiento perfecto**



$$I = \text{Cte.}$$

$$\text{M.E.P.} = \frac{p \cdot L^2}{12}$$



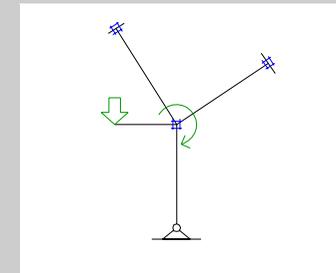
$$I = \text{Cte.}$$

$$\text{M.E.P.} = \frac{p \cdot L^2}{8}$$

(Subítems 1.5.1 al 1.5.7; págs. 12 a 19)

[PASO 4]

Se determinan las expresiones de los **Coeficientes de Repartición**

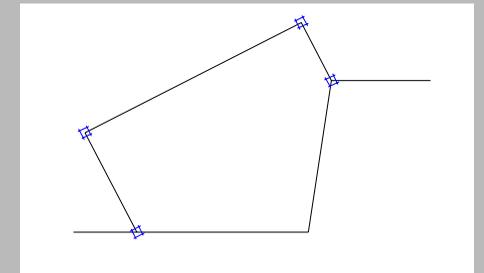


(Subítem 2.1 , 2.2, 2.3; págs 20 a 28).

[PASO 5]

Artificio del Método de Cross.

Aplicación de los conceptos anteriores a una estructura concreta.



Ejercicio completo:
CAPÍTULO 3 (págs. 29 a 45).
Ejercicios más simples;
Ejemplo de Cross 1 y 3 (en Página Web)

ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES II

CAPITULO 4 - (páginas 44 a 50)

Se plantea la simplificación del artificio ante los **casos de simetría** (geométrica y de carga). Simetría por nudo y simetría por barra. Se plantea la aplicación a un ejemplo concreto (páginas 45 a 50).

CAPITULO “COMPLEMENTOS”- (páginas 51 al final)

Se analizan casos especiales, otras temáticas relacionadas con el método, complementos aportados por distintas citas bibliográficas, etc., según el siguiente detalle:

- 1) **Problemas referentes a momentos iniciales del 1er Cross** (páginas 51 a 55)
- 2) **Estructuras con nudos desplazables** (páginas 56 a 61)
Se plantean aquí diferentes ejemplos de estructuras con nudos desplazables y se traza la deformada de cada una a partir de la fuerza que no encuentra camino material para llegar a un apoyo (fuerza de desviación). Este complemento es importante desde el punto de vista de su aplicación práctica.
En esta parte además, en las páginas 60 y 61, se analiza cómo se resuelven las situaciones donde aparece, luego del 1er Cross, **más de una fuerza de desviación**. Si bien estos casos no se abordarán en la parte práctica, se deberá saber conceptualmente cómo se resolverían.
- 3) **Relación forma-solicitaciones** (páginas 62 a 66). Se plantean ejemplos que muestran cómo varían las solicitaciones en las barras de una estructura al variar la forma de las mismas.
- 4) **Problema de los apoyos** (páginas 67 a 71). Se analizan distintas situaciones de los vínculos externos (apoyos) que en la parte operativa se toman como vínculos teóricos simplificados. Se completa así la visión global de la estructura.
- 5) **Determinación de esfuerzos axiales** (página 72). Trata sobre la determinación de esfuerzos axiales para el trazado de los diagramas de sollicitación (procedimiento tramo por tramo).
- 6) **Temas prácticos** (páginas 73 a 82). Se plantean ejemplos de estructuras reales, construidas, como **ejercicios para resolver**. En los gráficos que se presentan se han realizado las simplificaciones necesarias para abordar el estudio en esta etapa del análisis estructural (simplificación e idealización de vínculos, cargas y geometría).