

# **FICHA 7 | TRAMOS ESBELTOS DE HORMIGÓN ARMADO SOMETIDOS A COMPRESIÓN**

## INTRODUCCIÓN

En los elementos estructurales de hormigón armado solicitados a la flexión es corriente, y en general admisible, calcular los esfuerzos característicos sin considerar la influencia que las deformaciones puedan ejercer sobre sus valores.

En tramos esbeltos sometidos a compresión o compresión compuesta, con sollicitación axial predominante, los efectos producidos por la deformación alcanzan valores significativos y no deben despreciarse. Su influencia será tanto mayor cuanto más esbelta sea la pieza.

En estos casos deja de ser válida la aplicación del principio de superposición, ya que los valores de las tensiones producidas por el axial y el flector determinadas por separado difieren sustancialmente de las tensiones que se producen cuando ambas sollicitaciones actúan simultáneamente.

Por eso, el estudio de estos elementos estructurales es más complejo, y merece dedicar un capítulo aparte del que se refiere a otras sollicitaciones, para analizar y comprender todos los fenómenos que intervienen en él.

Este grupo está integrado mayoritariamente por los soportes o pilares, que constituyen piezas, generalmente verticales, de sección frecuentemente cuadrada o rectangular, ocasionalmente circular (en este caso se les suele denominar columnas), pero dadas las posibilidades del material, podrán adoptar las más variadas formas, en los que predomina el axial, y cuya misión principal es canalizar las acciones que actúan sobre la estructura, hacia los dispositivos de fundación, que a su vez, los transmitirán al suelo, elemento sustentante de toda edificación.

Esta situación, de constituir el último eslabón en la cadena de transmisión de las acciones sobre la estructura a la cimentación, les otorga una especial responsabilidad en la estabilidad de la misma.

Si se produce un colapso en una losa, es posible que la falla sólo afecte a ese elemento estructural; cuando la falla es en una viga, se hace difícil que el daño no involucre también a las losas que se apoyan en ella. Si el colapso se produce en un soporte o pilar, afectará seguramente a las vigas apoyadas en él y las losas que ellas sostienen, y, si se trata de una estructura de varios niveles, y la falla se localiza en un soporte del nivel inferior, que son los que tienen mayor sollicitación, habrá una repercusión en todos los pilares de los niveles superiores, ubicados encima del

colapsado y un porcentaje mucho mayor de la estructura estará involucrado, inclusive podrá verse seriamente comprometida la estabilidad de la misma.

Conjuntamente con la responsabilidad que le cabe a los soportes en el modelo funcional de una estructura, existe otro fenómeno que agrega relevancia a su función, y es el tipo de rotura que presentan los elementos en compresión. En las piezas estructurales que trabajan predominantemente a flexión, se produce un tipo de falla denominado "rotura plástica", que es aquella que es precedida de signos claramente visibles, como fisuración y deformaciones considerables. Existe un "aviso" previo de la falla, por lo que es posible advertir que va a producirse, y permite adoptar medidas precautorias que disminuyan o eviten los daños.

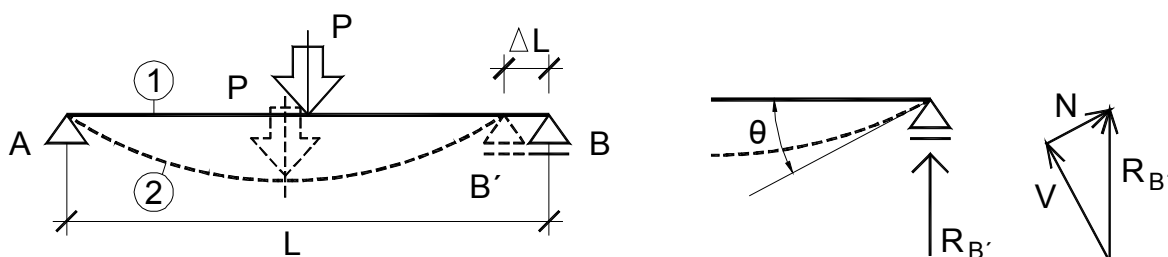
Por el contrario, en los elementos en compresión, la falla sobreviene sorpresivamente, sin fenómenos apreciables previos, por lo que se la denomina "rotura frágil", y por este motivo, las consecuencias y daños que le siguen suelen ser de mayor cuantía.

Tomando en cuenta que el volumen de los pilares, en relación al de las losas y otros elementos estructurales, es considerablemente menor, resulta claro que los argumentos fundamentales para reducir su número o las dimensiones de sus secciones no proceden de motivos económicos, sino fundamentalmente por razones espaciales y de diseño.

Es por esto que este tema no concierne solamente a quien vaya a realizar el dimensionado de la estructura, sino que quien tenga la responsabilidad en la dirección técnica de la construcción y, fundamentalmente el arquitecto que concibe y proyecta una obra, debe hacerlo con una conciencia clara de la relevancia y de todos los múltiples aspectos que intervienen y repercuten en el correcto desempeño de los tramos verticales.

## **INFLUENCIA DE LAS DEFORMACIONES EN LA DETERMINACIÓN DE LAS SOLICITACIONES. TEORÍA DE SEGUNDO ORDEN**

En los elementos estructurales de hormigón armado solicitados únicamente a la flexión, la incidencia de las solicitaciones carece de significación, en virtud de la limitación que es necesario imponerles a aquellas para que no sean apreciables a simple vista, y evitar la aparición de fisuras en los elementos constructivos asociados.

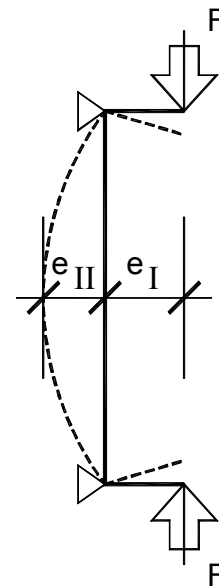


En el ejemplo representado vemos que el apoyo B del tramo sin deformar (1), experimenta un corrimiento  $\overline{BB'} = \Delta L$  cuando el tramo es deformado (2), y la reacción en el apoyo pasa a tener una componente cortante igual a  $R_{B'} \cdot \cos \theta$  y una componente axil  $R_{B'} \cdot \sin \theta$ .

Al limitar el valor de la flecha, el ángulo  $\theta$  resulta muy pequeño, y los valores de  $\Delta L$  y  $\sin \theta$  serán prácticamente nulos y el  $\cos \theta \cong 1$ .

Para el grado de apreciación que es razonable manejar en estos estudios, los valores no sufren modificaciones por lo que es admisible operar en el *sistema no deformado*, de acuerdo con la *teoría de 1<sup>er.</sup> orden*.

Si consideramos una columna cargada excéntricamente, la excentricidad  $e_I$  en la sección central se verá aumentada en un valor  $e_{II}$  al tomar en cuenta la deformación de la pieza, de modo que el momento flector en dicha sección, que según la teoría de 1<sup>er.</sup> orden vale  $M_I = P \cdot e_I$  aumentará hasta el valor  $M_{II} = P \cdot (e_I + e_{II})$ .



En columnas esbeltas, el valor de  $e_{II}$  no puede despreciarse en relación al de  $e_I$ .

Para asegurar el equilibrio es necesario tener en cuenta las deformaciones al determinar los esfuerzos característicos. En consecuencia, las condiciones de equilibrio deben satisfacerse para el *sistema deformado*, es decir, en teoría de II orden.

Las bases para el cálculo de las deformaciones las constituyen los diagramas tensión-deformación ( $\sigma - \varepsilon$ ) del material utilizado, donde deberán tenerse en cuenta la dispersión de todas las propiedades.

Si la barra está constituida por un material elástico o elastoplástico ideal, el problema resulta abordable desde el punto de vista analítico.

Cuando la barra es de hormigón armado, el comportamiento bajo deformación no puede ser descrito fácilmente. El diagrama  $\sigma - \varepsilon$  para el hormigón no es lineal y varía con la calidad del mismo. La distribución en la zona comprimida difiere de la de la zona traccionada y, sujeto a cargas de larga duración, se originan deformaciones plásticas en función del tiempo, que aumentan la deformación lateral de la pieza. Para el acero, actuando conjuntamente con el hormigón, resulta desproporcionadamente más complejo el tratamiento analítico de la relación entre cargas y deformaciones que lo que resulta para el acero solamente.

## MÉTODO GENERAL

“La comprobación del pandeo propiamente dicho consiste en demostrar que para una estructura dada, bajo la combinación más desfavorable de las acciones de cálculo, es posible encontrar un estado de equilibrio estable entre las fuerzas exteriores e interiores, teniendo en cuenta los efectos de segundo orden. Las deformaciones deben ser calculadas a partir de los diagramas tensión – deformación del acero y del hormigón, habida cuenta de la fluencia y pudiendo despreciar la contribución del hormigón traccionado entre fisuras” (UNIT 1050:2001)

## CAPACIDAD PORTANTE EN TRAMOS ESBELTOS DE HORMIGÓN ARMADO EN COMPRESIÓN

Nos plantearemos en primera instancia una pieza articulada en sus extremos sometida a una carga axial  $F$ , perfectamente centrada (situación teórica ideal).

Al imprimirle una deformación  $\epsilon$ , aparecerán en las secciones momentos, producto de la carga  $F$  por la flecha  $e_{(x)}$ .

$$M_{e_{(x)}} = F \cdot e_{(x)}$$

Estos momentos tenderán a aumentar la flecha inicial.

Simultáneamente, en cada sección de la pieza deformada, aparecerán momentos internos,  $M_i$ , producto de la resistencia del material a ser deformado, cuyo valor estará en función de la curvatura de cada sección, y que, oponiéndose a los momentos externos, tratarán de devolver el tramo a su posición rectilínea original.

Mientras que los  $M_i > M_e$  la barra regresará a la posición recta (equilibrio elástico estable).

Al crecer el valor de la carga  $F$ , se alcanzará un valor para el cual  $M_i = M_e$ . En ese caso, la pieza estará en equilibrio aún con el eje deformado (equilibrio elástico indiferente).

A este valor de la carga se le denomina *Carga Crítica*, *Carga de Euler* o *Carga de Pandeo*.

Para valores mayores de la carga, los momentos externos,  $M_e$ , que aumentan la deformación, resultarán superiores a los momentos internos,  $M_i$ , que son los que tratan de devolver la pieza a la posición original, lo que estará significando una situación de colapso, salvo para la deformación nula (equilibrio elástico inestable).

Si consideramos ahora un caso real, con carga actuando con una excentricidad inicial,  $e_0$ , es fácil comprender que la configuración rectilínea del equilibrio no es posible.

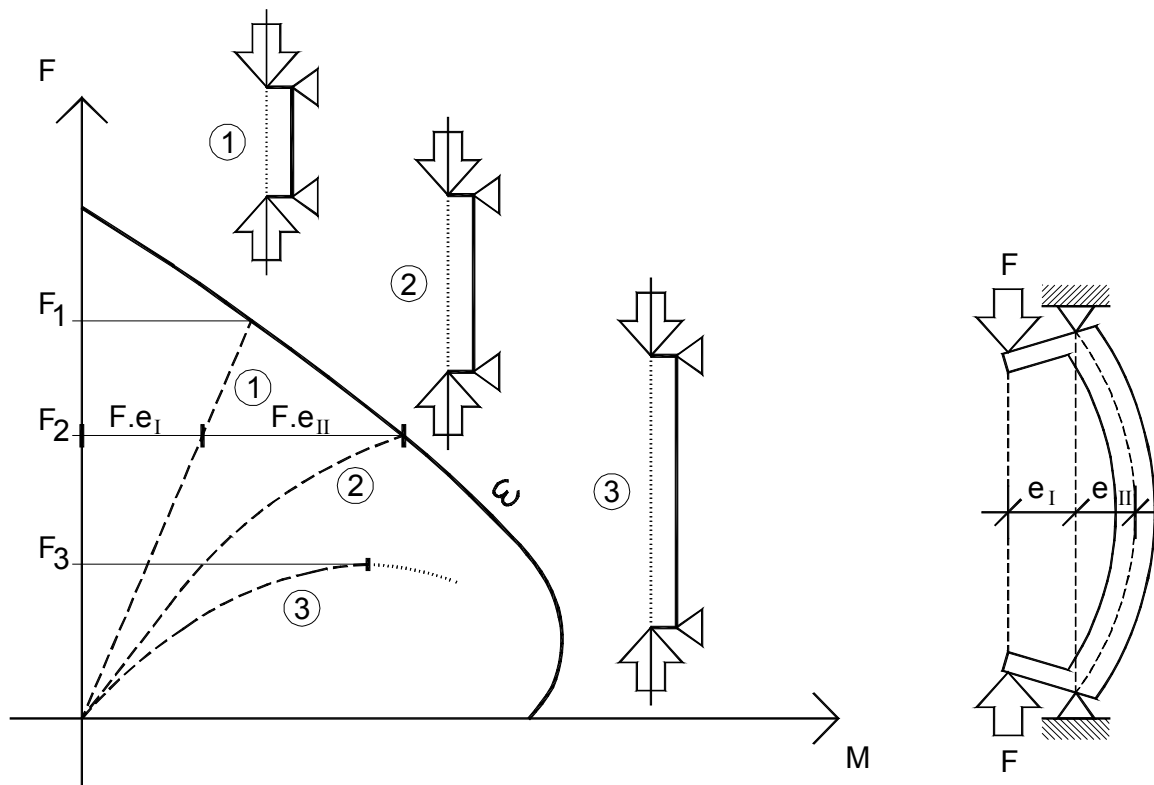
Por esta razón no es correcto tratar los problemas de inestabilidad elástica aumentando la carga  $F$ , como se hacía antiguamente, sino que es más adecuado hacerlo mediante la introducción de una excentricidad complementaria.

## INFLUENCIA DE LA ESBELTEZ

Veremos la influencia de la esbeltez a través del comportamiento de un tramo de inercia constante, con armadura definida en cuanto a área y distribución en la sección, que será sometido a una carga de compresión descentrada de valor creciente.

Se estudiará la sección del centro del tramo, donde se ubica la mayor sollicitación, a la que le corresponderá en el diagrama de interacción una curva de  $\omega$ , dadas las condiciones establecidas.

Analizaremos lo que ocurre al adoptar diferentes longitudes, lo que implica esbelteces diferentes.



1. Si el tramo tiene poca longitud (*tramos cortos*) estaremos en el caso de pequeñas esbelteces. La pieza resultará poco deformable, por lo que, al aumentar la fuerza, el momento irá aumentando en igual proporción. Se definirá en la gráfica una trayectoria rectilínea que al alcanzar la curva  $\omega$  determinará el valor de carga  $F_1$ , para la cual la sección se agota.
2. Tomaremos ahora mayores longitudes, por lo que el tramo quedará en el campo de las esbelteces intermedias. El tramo se hará así más flexible y deberán considerarse las sollicitaciones en teoría de 2º orden. Al crecer la carga se producirán deformaciones crecientes, por lo que el momento crecerá más que la carga. En la gráfica se definirá entonces una curva que cuando alcance a la de  $\omega$  estará determinando la capacidad portante del tramo,  $F_2$ , valor inferior al determinado para el caso anterior,  $F_1$ . Observamos que por el aumento de la esbeltez el tramo experimentó una pérdida en su capacidad portante.

3. Tomemos ahora grandes longitudes, lo que colocará al tramo en las grandes esbelteces. Al crecer la flexibilidad del tramo aumentarán los momentos de 2º orden lo que definirá en el gráfico una curva más pronunciada, determinando un máximo de capacidad portante para el valor  $F_3$ , en donde la curva tiene un punto de tangencia horizontal. Se observa que el tramo siguió perdiendo capacidad portante, pero como este valor máximo se alcanza antes de llegar a la curva  $\omega$ , está significando que la sección no se agota. En estos casos la falla se produce por inestabilidad del tramo y no por el agotamiento resistente de la sección, como en los anteriores.

## ESBELTEZ

Desde el principio hemos visto que el estudio de un tramo comprimido está íntimamente ligado al tema de las deformaciones. Por lo estudiado en otros temas anteriores, sabemos que la rigidez de un tramo es proporcional al módulo de elasticidad del material y a la inercia de la sección e inversamente proporcional a la longitud del mismo.

Como ahora nos interesa establecer la mayor o menor flexibilidad del tramo, trabajaremos con la inversa de la rigidez, en donde el módulo de elasticidad no va a intervenir, porque estamos trabajando con un solo material, y la longitud será sustituida por un valor ficticio, que estará en función de la forma que tome la elástica del tramo, a la que llamaremos *luz de pandeo*,  $\ell_e$ .

Definimos **ESBELTEZ MECÁNICA** de un soporte de sección constante a la relación entre su longitud de pandeo y el radio de giro de la sección total de hormigón, en la dirección considerada:

$$\lambda_m = \frac{\ell_e}{i}$$

siendo  $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

Para tramos con sección de forma geométrica conocida, resulta operativamente más cómodo trabajar con una dimensión característica de la misma, en lugar de tomar el radio de giro, siempre que se pueda establecer una relación definida entre ambos.

Llamaremos entonces **ESBELTEZ GEOMÉTRICA** a la relación entre la luz de pandeo y el lado de la sección, para secciones rectangulares y cuadradas, y entre la luz de pandeo y el diámetro en el caso de secciones circulares.

SECCIONES  
RECTANGULARES  
O CUADRADAS

$$\lambda_g = \frac{\ell_e}{h}$$

SECCIONES  
CIRCULARES

$$\lambda_g = \frac{\ell_e}{D}$$

Para secciones rectangulares la longitud de pandeo será la correspondiente a la deformación del tramo en el plano que se esté estudiando, y el lado de la sección que se tomará en ese caso, será el paralelo a dicho plano.

## LUZ DE PANDEO

Para el estudio de un tramo comprimido es necesario definir la deformación del mismo, y ésta estará condicionada a las posibilidades de deformación de sus extremos, en cuanto al giro y al desplazamiento.

La mayor o menor restricción al giro y la posibilidad de desplazarse o no que tenga el vínculo en el plano que se está estudiando, repercuten directamente en la forma que adoptará la elástica del tramo, en ese plano.

Se adopta como patrón un tramo biarticulado ideal, y los demás casos se referirán al comportamiento de éste.

Desde el punto de vista mecánico, se define como LUZ DE PANDEO a la longitud ficticia que debe tomar un tramo ideal biarticulado, al que le corresponda igual valor de carga crítica, que la que le corresponde al tramo considerado.

Geométricamente puede definirse como la distancia entre puntos de inflexión de la deformada. Es decir, es aquella porción de la deformada, en la se reproducen las condiciones de deformación de un tramo biarticulado.

Se define como  $\alpha$  a la relación entre la luz de pandeo y la luz real del tramo,

$$\alpha = \frac{l_e}{l}$$

Por lo tanto la luz de pandeo de un tramo podrá hallarse multiplicando la luz del esquema por el coeficiente  $\alpha$  que corresponda a las condiciones de vínculo de sus extremos.

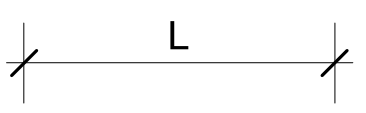
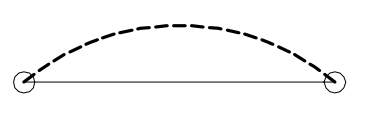
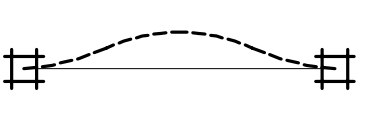
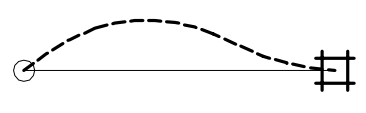
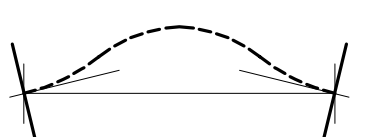
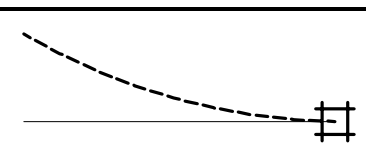
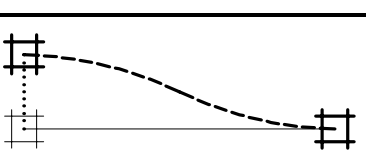
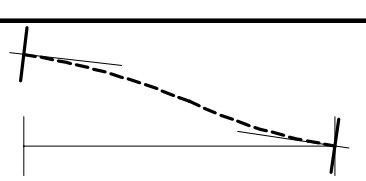
$$l_e = \alpha \cdot l$$

En el cuadro de la página siguiente se han tabulados los valores que toma el coeficiente  $\alpha$  para diferentes condiciones de vínculo.

Los casos 1; 2; 3; 5 y 6 son situaciones teóricas, de soportes aislados, con condiciones de vínculo ideales.



# LUCES DE PANDEO $L_e$

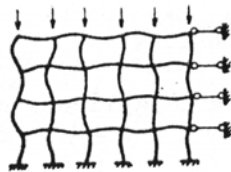
ESQUEMA	CONDICIONES DE DEFORMACION DE LOS EXTREMOS DEL TRAMO		$\alpha = \frac{\text{LONGITUD DE PANDEO}}{\text{LONGITUD EN EL ESQUEMA}}$
	RESPECTO AL GIRO	RESPECTO AL DESPLAZAMIENTO	
	RESPECTO AL GIRO	RESPECTO AL DESPLAZAMIENTO	$\alpha$
	BIARTICULADO	INDESPLAZABLE	1.0
	BIEMPOTRADO	INDESPLAZABLE	0.5
	ARTICULADO - EMPOTRADO	INDESPLAZABLE	$\sim 0.7$
	AMBOS APOYOS PARCIALMENTE FRENADOS	INDESPLAZABLE	(nomograma A) $\nless 0.7$
	LIBRE-EMPOTRADO	DESPLAZABLE	2.0
	BIEMPOTRADO	DESPLAZABLE	1.0
	AMBOS APOYOS PARCILMENTE FRENADOS	DESPLAZABLE	(nomograma B) $\nless 1.3$

Se consideran soportes aislados, los soportes isostáticos, o los de pórticos en los que puede suponerse que la posición de los puntos donde se anula el momento de segundo orden no varía con el valor de la carga.

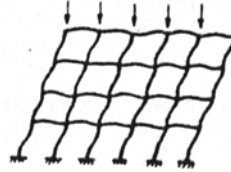
Cuando los soportes en sus extremos tengan continuidad con otros tramos se deberá determinar el valor de  $\alpha$  en función de las rigideces relativas de pilares y vigas en ambos extremos ( $\psi_A$  y  $\psi_B$ ), utilizando los nomogramas confeccionados a tales efectos.

La norma UNIT 1050:2001 toma los nomogramas confeccionados por Jackson y Moreland, originalmente para estructuras de acero y posteriormente adoptados por el ACI. Actualmente se incluyen en la normativa del CEB y en la de diversos países. Han sido preparados considerando las figuras de pandeo de soportes pertenecientes a pórticos regulares (iguales luces, alturas e inercias) y de gran número de pisos y vanos, en comportamiento elástico y lineal.

Hay un nomograma correspondiente a estructuras intraslacionales (Nomograma a) y otro para estructuras traslacionales (Nomograma b), que corresponden a los siguientes esquemas teóricos:



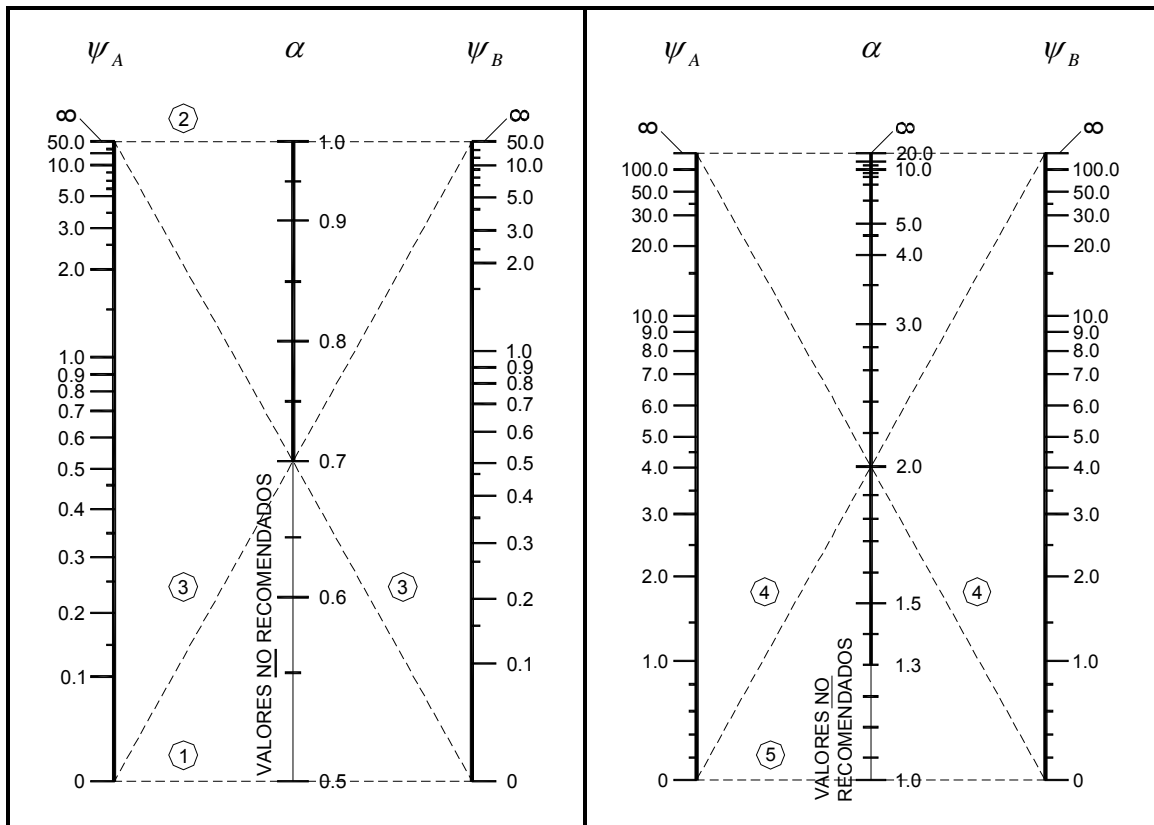
**ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES**



**ESTRUCTURAS TRASLACIONALES**

**NOMOGRAMA a**

**NOMOGRAMA b**



$$\psi_A = \frac{\sum \frac{E I}{\ell} \text{ de todos los pilares en A (incluido el del tramo en estudio)}}{\sum \frac{E I}{\ell} \text{ de todas las vigas en A}}$$

$$\psi_B = \frac{\sum \frac{E I}{\ell} \text{ de todos los pilares en B (incluido el del tramo en estudio)}}{\sum \frac{E I}{\ell} \text{ de todas las vigas en B}}$$

donde A y B son los extremos del soporte considerado.

Los nomogramas anteriores equivalen a la aplicación de las siguientes expresiones.

Caso 4 (nomograma a):  $\alpha = \frac{0,64 + 1,4(\psi_A + \psi_B) + 3\psi_A\psi_B}{1,28 + 2,0(\psi_A + \psi_B) + 3\psi_A\psi_B}$  no menor de 0,7

Caso 7 (nomograma b):  $\alpha = \sqrt{\frac{7,5 + 4(\psi_A + \psi_B) + 1,6\psi_A\psi_B}{7,5 + (\psi_A + \psi_B)}}$  no menor de 1,3

Estos nomogramas engloban también los cinco casos de tramos aislados, para vínculos de comportamiento ideal en los extremos:

1 es el caso teórico del soporte biempotrado ( $l_e = 0,5 l$ )

2 es el caso teórico del soporte biarticulado ( $l_e = l$ )

3 es el caso teórico del soporte articulado-empotrado ( $l_e = 0,7 l$ )

4 es el caso teórico del soporte en ménsula ( $l_e = 2 l$ )

5 es el caso teórico del soporte biempotrado con extremos desplazables ( $l_e = l$ )

Para estructuras de soportes en condiciones ideales de deformación, resulta de las expresiones de  $\psi$ :

$$\begin{array}{ll} \text{para articulación} & \psi = \infty \\ \text{para empotramiento} & \psi = 0 \end{array}$$

Nótese que en estructuras intraslacionales el valor de  $\alpha$  resulta inferior a la unidad, mientras que en estructuras traslacionales es siempre superior a 1.

Para estructuras intraslacionales se recomienda  $\alpha \geq 0,7$  y para estructuras traslacionales se recomienda  $\alpha \geq 1,3$ .

Para el cálculo de  $\psi$  se considera como valor de base de la inercia, el de la sección de hormigón total sin fisurar.

En el caso de los pilares se debe adoptar dicho valor de inercia.

En el caso de las vigas se debe adoptar:

- a) el 70% de ese valor si el otro extremo posee continuidad
- b) el 35% de ese valor si el otro extremo es articulado.

A los efectos de la aplicación de los nomogramas deberá definirse a qué tipo pertenece la estructura en estudio.

La norma UNIT 1050:2001 define como Estructuras Intraslacionales, aquellas cuyos nudos, bajo solicitaciones de cálculo, presentan desplazamientos cuyos efectos pueden ser despreciados, desde el punto de vista de la estabilidad del conjunto, y, por el contrario, Estructuras Traslacionales, a aquellas en las que no puedan ser despreciados.

En los comentarios del apartado 43.3 se agrega: “pueden considerarse como claramente intraslacionales las estructuras aporticadas provistas de muros o núcleos de contraviento, dispuestos de modo que aseguren la rigidez torsional de la estructura, que cumplan la condición:

$$h \sqrt{\frac{R}{E I}} \leq 0,6 \quad \text{si } n \geq 4$$
$$h \sqrt{\frac{R}{E I}} \leq 0,2 + 0,1n \quad \text{si } n \leq 4$$

donde:

- $n$  es el número de plantas de la estructura;
- $h$  es la altura total de la estructura, desde la cara superior de la cimentación;
- $R$  es la suma de reacciones en la cimentación con la estructura totalmente cargada en estado de servicio;
- $EI$  es la suma de rigideces a flexión de los elementos de contraviento en la dirección considerada, tomando para el cálculo de  $I$  la sección total no fisurada.

Las expresiones fueron deducidas en función de las siguientes hipótesis ideales:

- 1) Los elementos arriostrantes están distribuidos en la planta de tal modo que el centro de gravedad  $G$  y el centro de esfuerzo cortante  $C$  coincidan en un mismo punto de la sección de la planta (secciones simétricas respecto a los dos ejes).
- 2) La sección del elemento individual de arriostamiento es constante en todo el edificio y de pared delgada en el sentido del alabeo por torsión.
- 3) Las cargas verticales son iguales en todos los pisos y están aplicadas en forma simétrica.
- 4) La resultante de las cargas verticales incide en el centro de gravedad de la sección arriostrante completa.
- 5) La altura de todos los pisos es constante.
- 6) Las losas son rígidas en su plano.

En el curso de Estabilidad de las Construcciones II y a los efectos de una estimación primaria de la viabilidad de las formas proyectadas, considerando que no estamos aún en la etapa de proyecto, con definiciones más precisas, y que no disponemos de toda la información necesaria para el manejo de las expresiones anteriores, y por consiguiente para el uso de los nomogramas, en especial lo referente a la cimentación de la estructura que es objetivo de cursos posteriores, estableceremos un criterio aproximado para la determinación de la longitud de pandeo.

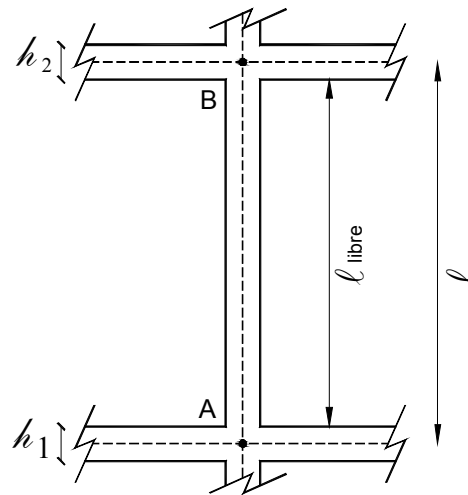
Se trata de adoptar un método sencillo, que respete los criterios establecidos en la norma y cuya imprecisión nos deje, en todo caso, convenientemente del lado de la seguridad.

En cuanto a la clasificación de la estructura, en general, consideraremos que son intraslacionales, ya que está recomendado, en el diseño de las mismas, disponer, siempre que sea posible, de núcleos de contraviento que eviten o reduzcan los efectos negativos del desplazamiento de los nudos, lo que mejorará el desempeño todos los tramos.

Para los casos a los que nos enfrentaremos habitualmente, esto, seguramente, podrá cumplirse.

En cuanto a la longitud de pandeo, consideraremos la *luz libre del soporte*, entre cara superior de las vigas que concurren al extremo inferior del tramo, y el fondo de las vigas concurrentes al extremo superior.

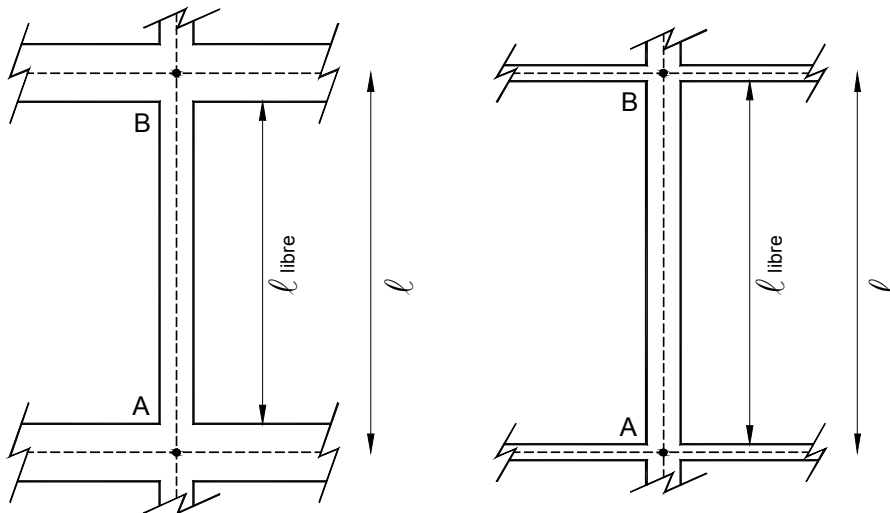
Esto implica una disminución de la longitud del esquema igual al promedio de las alturas de las vigas que llegan a sus extremos.



$$l_{\text{libre}} = l - \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}$$

Cuando la altura de las vigas sea importante, habrá una disminución mayor, y esto es concordante con el hecho de que esas vigas tendrán una rigidez mayor, por lo que determinarán coeficientes  $\psi$  en el nudo de valor más alto, lo que implicará valores menores de  $\alpha$  en el nomograma.

Si las vigas son de poca altura, la luz libre tendrá un valor más próximo a la longitud del esquema. También en este caso coincidirá con los valores mayores de  $\alpha$  que se determinan a partir de valores menores de los coeficientes  $\psi$ , cuando las vigas tienen menor rigidez.



## EXCENTRICIDAD DE 1<sup>er</sup> ORDEN

De acuerdo al proyecto de la estructura, las descargas de los tramos que se apoyan en el soporte que vamos a estudiar podrán ubicarse en el eje del mismo, (carga teóricamente centrada, equivalente a momento nulo en el extremo), o ubicarse a cierta distancia del eje, sea porque el proyectista así lo dispuso, o por ser un tramo aislado de un pórtico, al que otros tramos le transmiten momentos en los extremos.

Esta excentricidad,  $e_0$ , relación entre el momento flector y el esfuerzo axial, es una excentricidad de primer orden, ya que no interviene en la determinación de su valor, la deformación que pueda experimentar el tramo.

Frecuentemente se la denomina **excentricidad de proyecto**.

Aún en los casos en que la carga, desde el punto de vista teórico, sea centrada, la norma establece que se debe introducir una excentricidad mínima, denominada **excentricidad accidental**,  $e_{acc}$ , en la dirección más desfavorable, proveniente de la incertidumbre de la ubicación precisa de la carga.

Esta incertidumbre deriva de imprecisiones en la etapa constructiva: inexactitudes de replanteo, la imposibilidad de que vigas, al deformarse, no transmitan algún momento al soporte, salvo dispositivos constructivos que resultarían costosos, y la incertidumbre en cuanto a la ubicación del baricentro de las secciones del soporte, por imprecisiones en las medidas del encofrado, caras no exactamente planas por las maderas deformadas, o no perfectamente aplomadas, falta de homogeneidad del hormigón por las dificultades en el control del llenado, o pequeños desplazamientos de las armaduras durante el colado y compactado del hormigón.

Si bien todas las normas coinciden en que no deben considerarse cargas perfectamente centradas en los soportes, hay discrepancias en cuanto al valor que se le adjudica a la excentricidad, si se trata de un valor mínimo o de una incertidumbre de la ubicación y finalmente en cómo operar con ella.

La norma UNIT 1050:2001 fija como valor:  $e_{acc} = \frac{l_e}{300}$  no menor de 1cm.

Donde  $l_e$  es la luz de pandeo del tramo.

Se establece como valor mínimo y se ubica solamente en la dirección más desfavorable.

Para el caso que las excentricidades de primer orden en las secciones extremas del soporte sean de diferente magnitud y del mismo signo, o con signos contrarios con igual o diferente magnitud, se define la **excentricidad de 1<sup>er</sup> orden equivalente**.

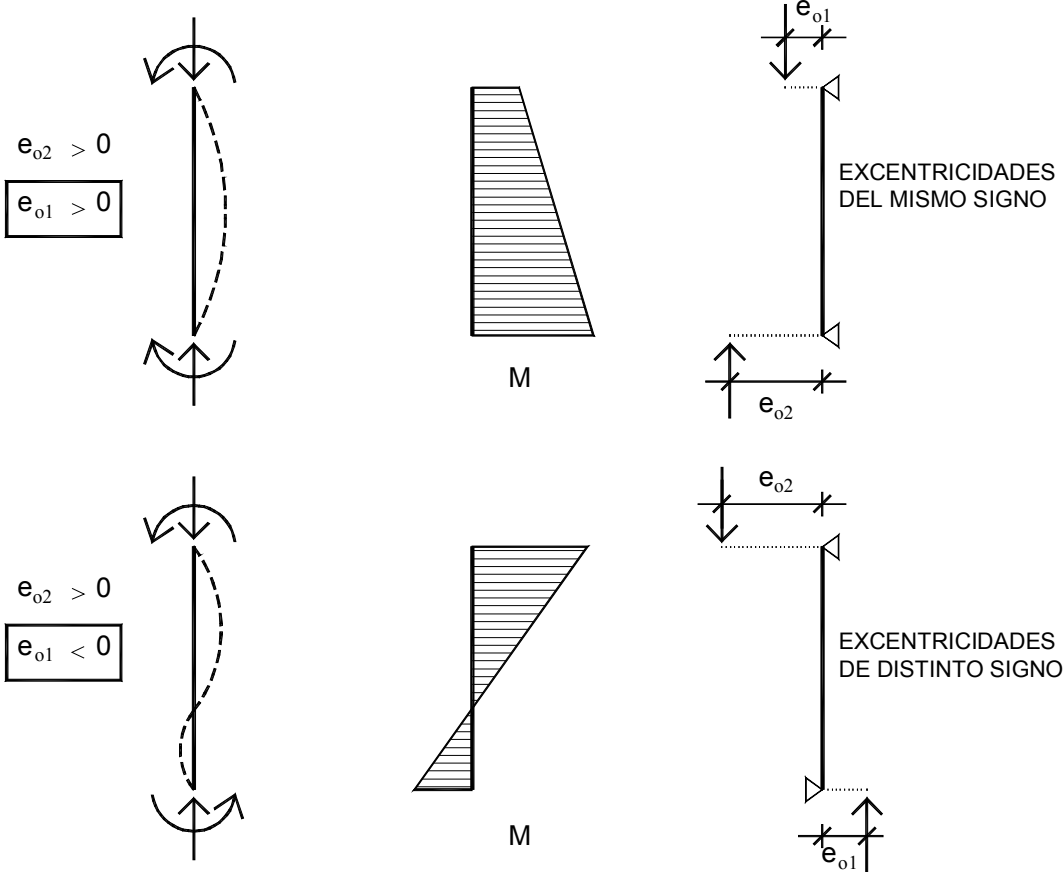
En estructuras indesplazables se tomará:

$$e_0 = 0,6 \cdot e_{0_2} + 0,4 \cdot e_{0_1} \quad \text{no menor de} \quad 0,4 \cdot e_{0_2}$$

donde  $e_{0_2}$  es la de mayor valor absoluto y se tomará positiva.

Esta excentricidad equivalente se tomará como constante en todo el tramo y se utilizará en la verificación de la sección central.

Si se realizan verificaciones en las secciones de los extremos se trabajará con la excentricidad de 1<sup>er</sup> orden correspondiente en cada una de ellas.



Cuando se trate de tramos de estructuras traslacionales, se tomará como excentricidad equivalente de 1<sup>er</sup> orden la mayor de ambas excentricidades:

$$e_0 = e_{o_2} \text{ no menor de } e_{acc}$$



## COMPROBACIÓN DE SOPORTES AISLADOS

Hemos visto que son múltiples los elementos que intervienen en el equilibrio de un tramo de hormigón armado sometido a compresión, pero, sin duda, el parámetro más importante es la esbeltez.

En función de la misma, los soportes pueden ser separados en tres grupos que presentan comportamientos bien diferenciados, ya analizados en el apartado: "Influencia de la esbeltez".

La norma UNIT 1050:2001 establece cuatro rangos de esbeltez, estableciendo criterios de actuación en cada uno de ellos:

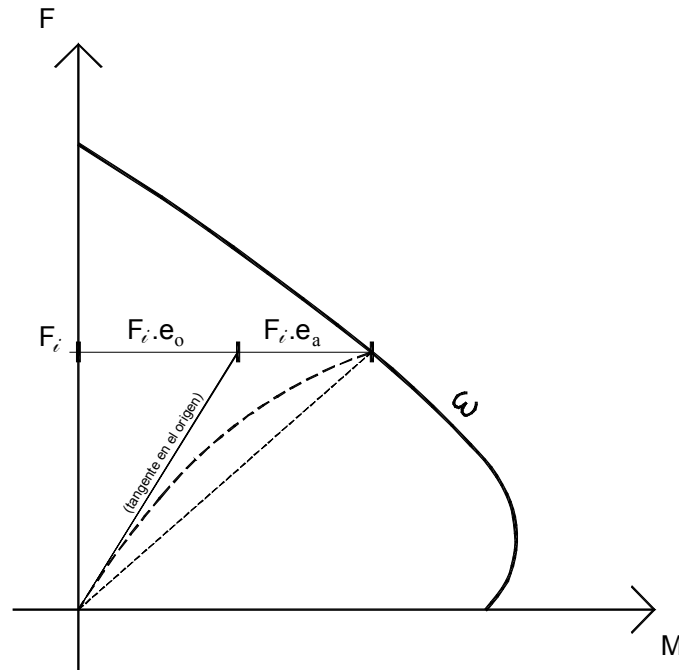
- en primer término descarta los casos en que la esbeltez mecánica,  $\lambda_m$ , sea superior a 200. En general, todas las normas recomiendan evitar esbelteces mayores a 200 (ZONA 3).
- en soportes aislados con  $\lambda_m$  comprendida entre 100 y 200, así como en estructuras traslacionales, el estudio del pandeo debe realizarse según el método general, descrito en la página 4. En el caso de soportes de sección y armaduras constantes, puede suponerse que la deformada adopta forma senoidal.  
Esto permite disponer de tablas y ábacos que facilitan el cálculo. (método de la columna modelo, método de la deformada senoidal, etc.)  
Es la ZONA 2, de grandes esbelteces, donde los soportes pueden fallar por pérdida de la estabilidad, antes de alcanzar el agotamiento resistente de la sección.  
Estas esbelteces suelen producirse en obras especiales, obras de ingeniería vial, como puentes o autopistas elevadas en zonas de montaña, pero son muy poco frecuentes en la actividad habitual del arquitecto, por lo que quedan fuera de los objetivos del curso de Estabilidad de las Construcciones II, y, sencillamente, evitaremos trabajar dentro de esta zona.
- Para soportes aislados o pertenecientes a estructuras intraslacionales, si  $\lambda_m$  está comprendida entre 35 y 100, la norma habilita a aplicar métodos aproximados, que contemplen los efectos de las solicitaciones de segundo orden, ya que estamos en el rango de esbelteces intermedias, ZONA 1, donde la falla se produce por agotamiento resistente de la sección y no por inestabilidad del soporte.

El método propuesto por la norma consiste en determinar la excentricidad ficticia adicional,  $e_a$ , que hace que la carga  $F_i$ , que agota el tramo con esbeltez  $\lambda$  y actuando con excentricidad  $e_0$ , agote también al mismo soporte, con esbeltez nula, actuando la misma carga  $F_i$ , pero con excentricidad  $(e_0 + e_a)$ .

Recordemos que los pilares cortos, de pequeñas esbelteces, con carga descentrada creciente, definían, en el gráfico de interacción, una trayectoria rectilínea, mientras que los de esbelteces medias, por los efectos de 2º orden, definían una trayectoria

curvilínea, cortando a la curva  $\omega$  en un punto que determina una carga de agotamiento inferior, a la de aquellos.

El método simplificado propone entonces considerar el soporte como un tramo corto, con trayectoria rectilínea, pero agregándole una excentricidad ficticia, de tal forma que la trayectoria intersecte la curva  $\omega$  en el mismo punto que correspondería a la trayectoria curvilínea del pilar esbelto con efectos de 2º orden, de modo que coincida para ambos la carga de agotamiento.



Para la determinación del valor de la excentricidad ficticia adicional se propone la siguiente expresión:

$$e_a = \left( 0,85 + \frac{f_{yd}}{12000} \right) \cdot \frac{h + 20 e_0}{h + 10 e_0} \cdot \frac{\ell_e^2}{i} \cdot 10^{-4}$$

donde:

- $f_{yd}$  es la resistencia de cálculo del acero en tracción en daN/cm<sup>2</sup>;
- $h$  es la altura total, medida paralelamente al plano de pandeo que se considera;
- $\ell_e$  es la longitud de pandeo
- $i$  es el radio de giro de la sección total de hormigón, en la dirección considerada;
- $e_0$  es la excentricidad de 1º orden (o la equivalente)

Se pueden distinguir en esta fórmula, un primer factor en donde intervienen las calidades de los materiales, un segundo factor en donde interviene la excentricidad de primer orden, en el tercero está presente la esbeltez y finalmente hay un factor que opera como corrector de las unidades.

Para secciones rectangulares, en las que  $i = \frac{h}{\sqrt{12}}$ , puede utilizarse la siguiente

$$\text{fórmula: } e_a = \left( 3 + \frac{f_{yd}}{3500} \right) \cdot \frac{h + 20 e_0}{h + 10 e_0} \cdot \frac{\ell_e^2}{h} \cdot 10^{-4}$$

Si se trata de sección circular, con  $i = \frac{D}{4}$ , puede tomarse:

$$e_a = \left( 3,4 + \frac{f_{yd}}{3000} \right) \cdot \frac{D + 20 e_0}{D + 10 e_0} \cdot \frac{\ell_e^2}{D} \cdot 10^{-4}$$

En donde D es el diámetro de la sección.

Los antecedentes de esta fórmula se encuentran en los razonamientos efectuados por el ingeniero español E. Torroja. Experiencias posteriores realizadas por investigadores holandeses concluyeron en la fórmula presentada anteriormente, por lo que frecuentemente se la denomina *fórmula holandesa*.

Finalmente nos quedan los casos en que  $\lambda_m$  es inferior a 35, la ZONA 0, en la que ubicamos los soportes cortos o de *pequeñas esbelteces*, para los que pueden desprejarse los efectos de 2º orden.

En general se considera que mientras la pérdida de capacidad portante del soporte, producida por los efectos de segundo orden, sea inferior al 10%, no es necesario tomarlos en cuenta. Esto es aplicable exclusivamente a tramos aislados de estructuras intraslacionales.

En el cuadro siguiente se sintetizan las cuatro zonas, con los criterios de actuación en cada una y sus límites expresados en esbeltez mecánica y su equivalencia en esbelteces geométricas para los casos de secciones rectangulares o cuadradas y circulares:

ESTRUCTURAS TRASLACIONALES	ZONA 1		ZONA 2	ZONA 3
ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES	ZONA 0	ZONA 1	ZONA 2	ZONA 3
	<p><b>PUEDEN DESPRECIARSE EFECTOS DE 2º ORDEN</b></p> <p>PEQUEÑAS ESBELTECES</p>	<p><b>MÉTODO SIMPLIFICADO</b></p> <p>ESBELTECES MEDIAS</p>	<p><b>MÉTODO GENERAL (REDIMENSIONAR)</b></p> <p>GRANDES ESBELTECES</p>	<p><b>FUERA DE NORMA</b></p>
SECCIONES CUALQUIERA $\lambda_m =$	<b>0</b>	<b>35</b>	<b>100</b>	<b>200</b>
SECCIONES RECTANGULARES $\lambda_g =$	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>29</b>	<b>58</b>
SECCIONES CIRCULARES $\lambda_g =$	<b>0</b>	<b>9</b>	<b>25</b>	<b>50</b>

## DETERMINACIÓN DE LAS ARMADURAS

Una vez ubicado el soporte en estudio en la zona que corresponda, de acuerdo a su comportamiento, acorde con las condiciones particulares que en él influyen, se deberán determinar las armaduras como un caso de presoflexión, en el que intervendrán el axil  $N_d$  y un momento igual al axil multiplicado por la suma de excentricidades que corresponda considerar.

Se deberá organizar la armadura en forma simétrica, no solo por tratarse de tramos verticales, sino porque la excentricidad del axil podrá producirse hacia uno u otro lado de la pieza.

En cuanto a la resistencia de cálculo del hormigón deberá tenerse presente el apartado 26.5 de la norma UNIT 1050:2001:

“Cuando se trate de soportes o elementos análogos hormigonados verticalmente, la resistencia de cálculo debe reducirse en un 10%, para tener en cuenta la disminución de resistencia que el hormigón de estas piezas experimenta por efecto de su forma de puesta en obra y compactación”.

Los encofrados de piezas verticales, que deben llenarse por un extremo, desde una de las caras de menor dimensión, no permiten ejecutar eficientemente el colado y compactado del material ni un estrecho control del mismo.

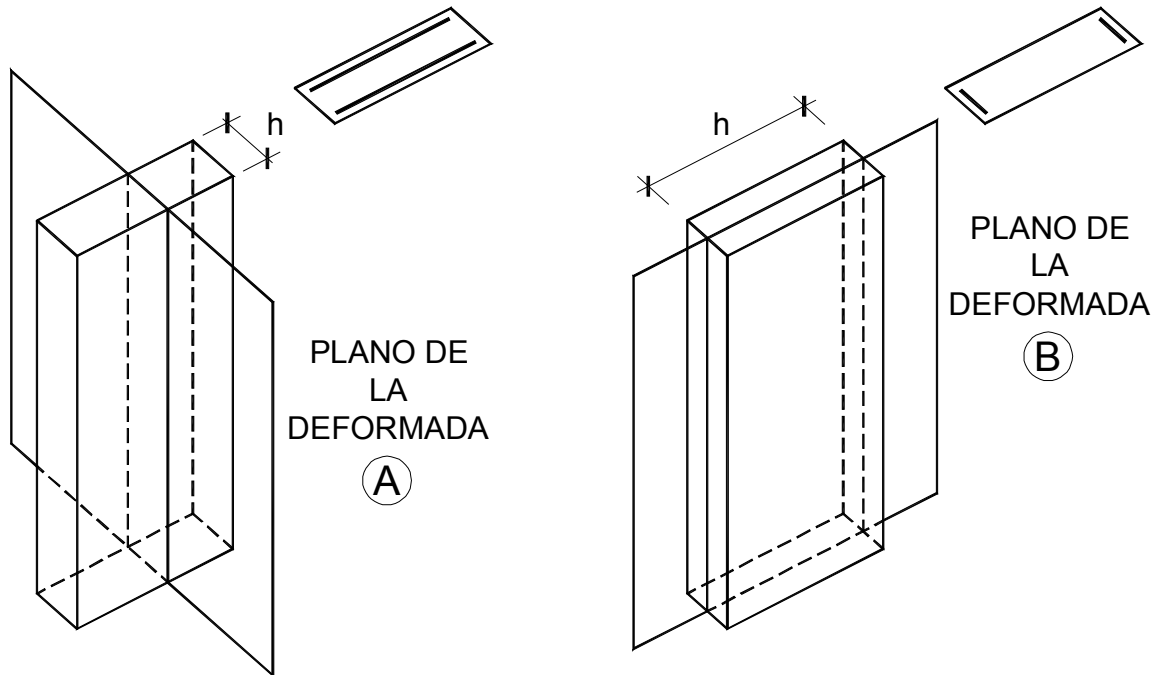
Además, el agua en exceso que en mayor o menor proporción posee el hormigón fresco, y que durante el llenado asciende acumulándose en las capas superiores, en piezas horizontales afecta sólo un pequeño porcentaje de las secciones transversales, pero en las piezas verticales, si bien afectada a menos secciones, éstas resultan totalmente afectadas.

Por esta causa es un hecho que la misma pasta de hormigón colocada en el encofrado de una pieza vertical, produce un material de resistencia inferior que si se la coloca en el encofrado de una pieza horizontal.

## SOPORTE DE SECCIONES RECTANGULARES

Cuando se estudia un soporte de sección rectangular, debe hacerse en los dos planos paralelos a sus caras en forma independiente, y sumar armaduras.

Definimos como *plano desfavorable*, aquel en que la sección trabaja con su menor dimensión como altura, y como *plano favorable* cuando la altura resulta ser la dimensión mayor.



El criterio de sumar armaduras es conservador, pero válido en la etapa de predimensionado.

## SÍNTESIS DE ESTUDIO DE SECCIONES PARA UN SOPORTE DE SECCIÓN RECTANGULAR

Veremos una síntesis del estudio de secciones para un caso particular de soporte con las siguientes condiciones:

- Tramo aislado de una estructura intraslacional;
- Carga teóricamente centrada;
- Sección rectangular de inercia constante en toda la longitud del tramo;
- La longitud de pandeo,  $\ell_e$ , es la misma en ambos planos (favorable y desfavorable).

Tomamos  $\lambda_A > \lambda_B$ , o sea plano A = plano desfavorable y plano B = plano favorable

1. Si  $\lambda_A \leq 10$   $\therefore \lambda_B < 10$

Se estudia el pilar en ZONA 0.

No se consideran efectos de 2º orden.

Debe tomarse  $e_{acc} = \frac{\ell_e}{300}$  no menor de 1cm, sólo en el plano desfavorable.

Se estudia el plano desfavorable (A) con  $N_d$  y  $e_{acc}$ .

No se realiza estudio del plano favorable (B).

2. Si  $10 < \lambda_A < 29$

2.1 Si  $\lambda_B \leq 10$

a) Se estudia el plano desfavorable (A) en ZONA 1, con  $N_d$  y

$$e_{tot} = e_{acc} + e_a.$$

b) No se realiza estudio del plano favorable (B) (por estar en ZONA 0 no se consideran los efectos de 2º orden, por ser el plano favorable no se ubica en él la  $e_{acc}$ ).

2.2 Si  $10 < \lambda_B \leq 29$

a) Se estudia el plano desfavorable (A), en ZONA 1, con  $N_d$  y

$$e_{tot} = e_{acc} + e_a.$$

b) Se estudia el plano favorable (B), en ZONA 1, con  $e_{acc} = 0$  y

$$e_{tot} = e_a.$$

Se suman armaduras.

3. Si  $\lambda_A \geq 29$

No se estudiará en este curso. Hacemos ajuste de las dimensiones de la sección.

## VIABILIDAD DE LAS FORMAS PROYECTADAS

Ya hemos visto la necesidad de limitar la cantidad de acero a disponerse dentro de la sección.

En cuanto a la cuantía mecánica,  $\omega$ , la norma UNIT 1050:2001, en el apartado 38.2, establece:

“En las secciones sometidas a compresión simple o compuesta, las armaduras principales en compresión  $A'_{s1}$  y  $A'_{s2}$ , deben cumplir las limitaciones siguientes:

$$A'_{s1} \cdot f_{yc,d} \leq 0,5 \cdot f_{cd} \cdot A_c$$

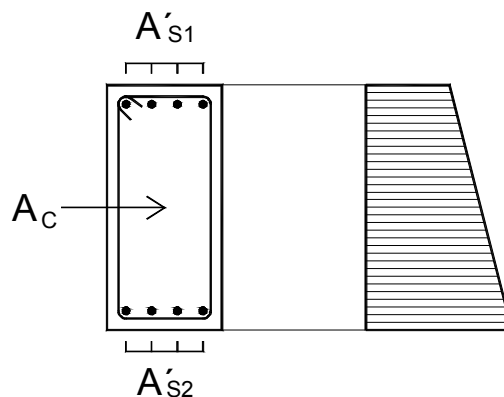
$$A'_{s2} \cdot f_{yc,d} \leq 0,5 \cdot f_{cd} \cdot A_c$$

donde:

$f_{yc,d}$  es la resistencia de cálculo del acero a compresión

$f_{cd}$  es la resistencia de cálculo del hormigón en compresión

$A_c$  es el área de la sección total de hormigón



En los comentarios se agrega:

“En los casos de compresión simple con armadura simétrica, las fórmulas limitativas quedan reducidas a:

$$A'_s \cdot f_{yc,d} \leq f_{cd} \cdot A_c$$

siendo  $A'_s$  la sección total de las armaduras longitudinales en compresión.”

Esto implica que para determinar las armaduras, al utilizar los ábacos de interacción, la máxima curvatura a utilizar es la correspondiente a  $\varpi = 1$ , por fuera de la cual se deberá redimensionar la sección.

Por otra parte, para garantizar el correcto colado y compactado del hormigón, es necesario verificar la separación entre barras de acero, y entre éstas y el encofrado, de manera que permitan el paso del árido grueso, para que el hormigón pueda llenar correctamente todo el molde sin dejar huecos.

Como en nuestro curso no llegamos a organizar la armadura y no disponemos de datos del número de barras y sus diámetros, nos manejamos limitando la cuantía geométrica, como una forma de mantener el área de acero dentro de valores que permitan posteriormente una correcta disposición de las barras.

En el caso de piezas verticales debemos hacer dos comprobaciones:

- Por un lado, deberá cumplirse la limitación fijada en el apartado 48.2 – Pilares, de la norma UNIT 1050:2001: “El área de la sección total de la armadura no debe ser mayor del 9% del área de la sección total de hormigón aún en la zona de empalmes”.

Considerando que los pilares, en general, se empalman las barras al comenzar cada nivel, y si bien no necesariamente coincidirán sus diámetros en los dos niveles, esto llevará a que en la base de cada tramo, donde el control del llenado es más dificultoso, haya el doble de armadura que en el resto del mismo, tomaremos para cada tramo un valor máximo del área del acero igual al 4,5% del área de la sección total de hormigón.

$$\frac{A_{sTOT}}{b \times h} \leq 0,045$$

Como normalmente estaremos verificando el tramo más comprometido, esta comprobación nos garantizará que en la zona donde se empalman las armaduras no se supere el porcentaje establecido por la norma.

- Por otro lado, coherentemente con la limitación que utilizamos para otros tramos lineales, debemos verificar que la armadura dispuesta en una cara tenga un área inferior al 1,8% del área de la sección útil del hormigón (sin considerar el recubrimiento).

$$\frac{A_{s1}}{b \times d} \leq 0,018$$

en donde  $b$  es la dimensión de la sección correspondiente a la cara sobre la que está dispuesta la armadura y  $d = (h - d_1)$

En esta verificación se busca limitar el área de acero para que las barras dispuestas sobre esa cara permitan el pasaje del hormigón fresco que se vierte en el centro de la sección, llenando así el espacio entre armaduras y encofrado que conformará el recubrimiento.

Se debe considerar que en tramos horizontales, ese hormigón tiene como única función recubrir las armaduras para protegerlas de la corrosión, pero en los tramos verticales puede tratarse del borde más comprimido de la sección, por lo que es importante conseguir que el material en esa zona alcance muy buena resistencia.



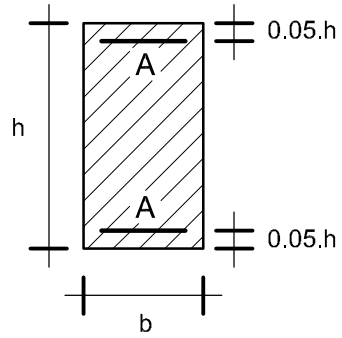
## **ABACOS DE INTERACCIÓN**

Se incluyen a continuación ábacos de interacción tomados del libro “Hormigón Armado” de Jiménez Montoya, García Meseguer y Morán Cabré, que complementan los ya vistos para secciones rectangulares con armaduras dispuestas en dos caras paralelas (ábacos 1, 2 y 3).

Los ábacos 4, 5 y 6 son para secciones con igual armaduras en las cuatro caras, que utilizaremos para secciones cuadradas, y los ábacos 7, 8 y 9 para determinar armaduras en secciones circulares.

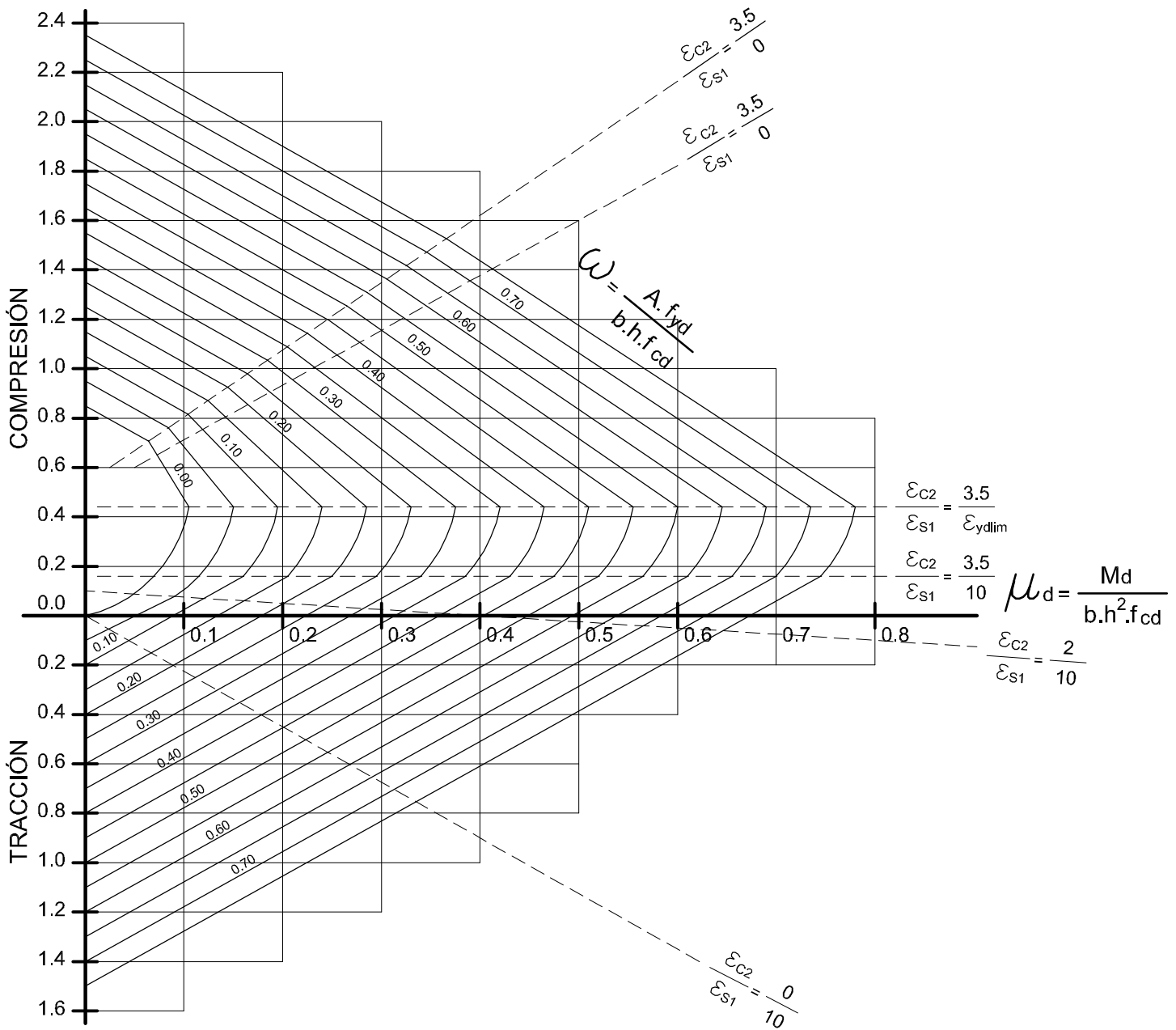
# SECCIONES RECTANGULARES DE HORMIGÓN ARMADO

PRESO Y TENSO FLEXIÓN  
ARMADURAS SIMÉTRICAS



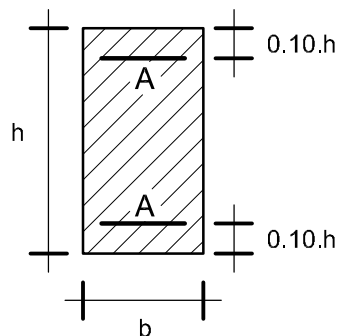
$$f_{yk} = 4200 \text{ daN/cm}^2$$

$$\nu_d = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

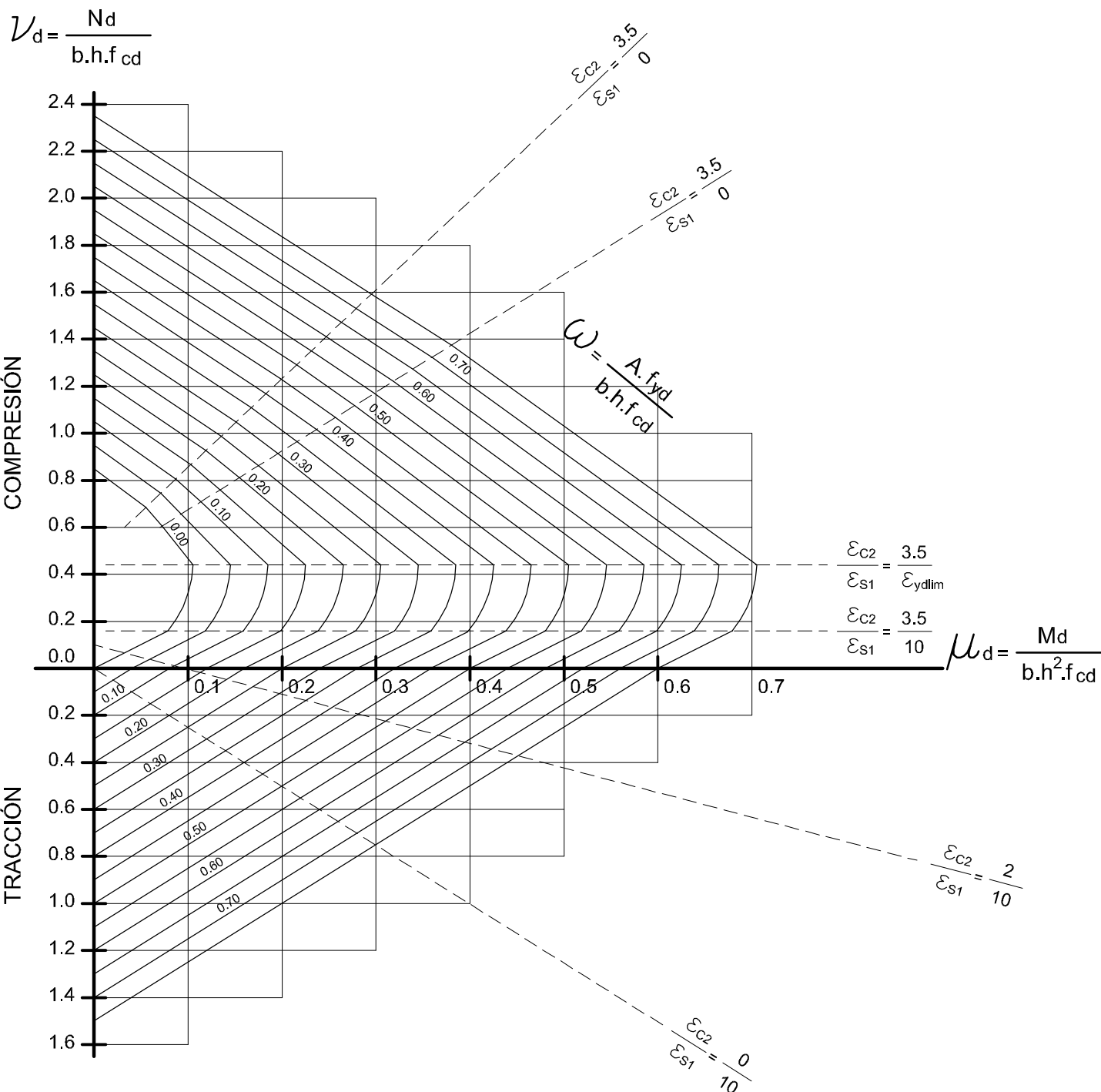


# SECCIONES RECTANGULARES DE HORMIGÓN ARMADO

PRESO Y TENSO FLEXIÓN  
ARMADURAS SIMÉTRICAS

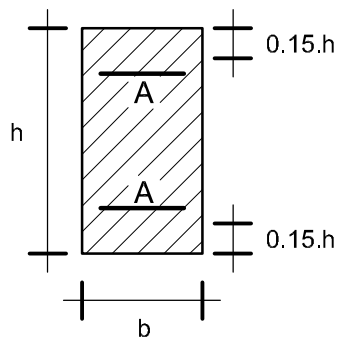


$$f_{yk} = 4200 \text{ daN/cm}^2$$

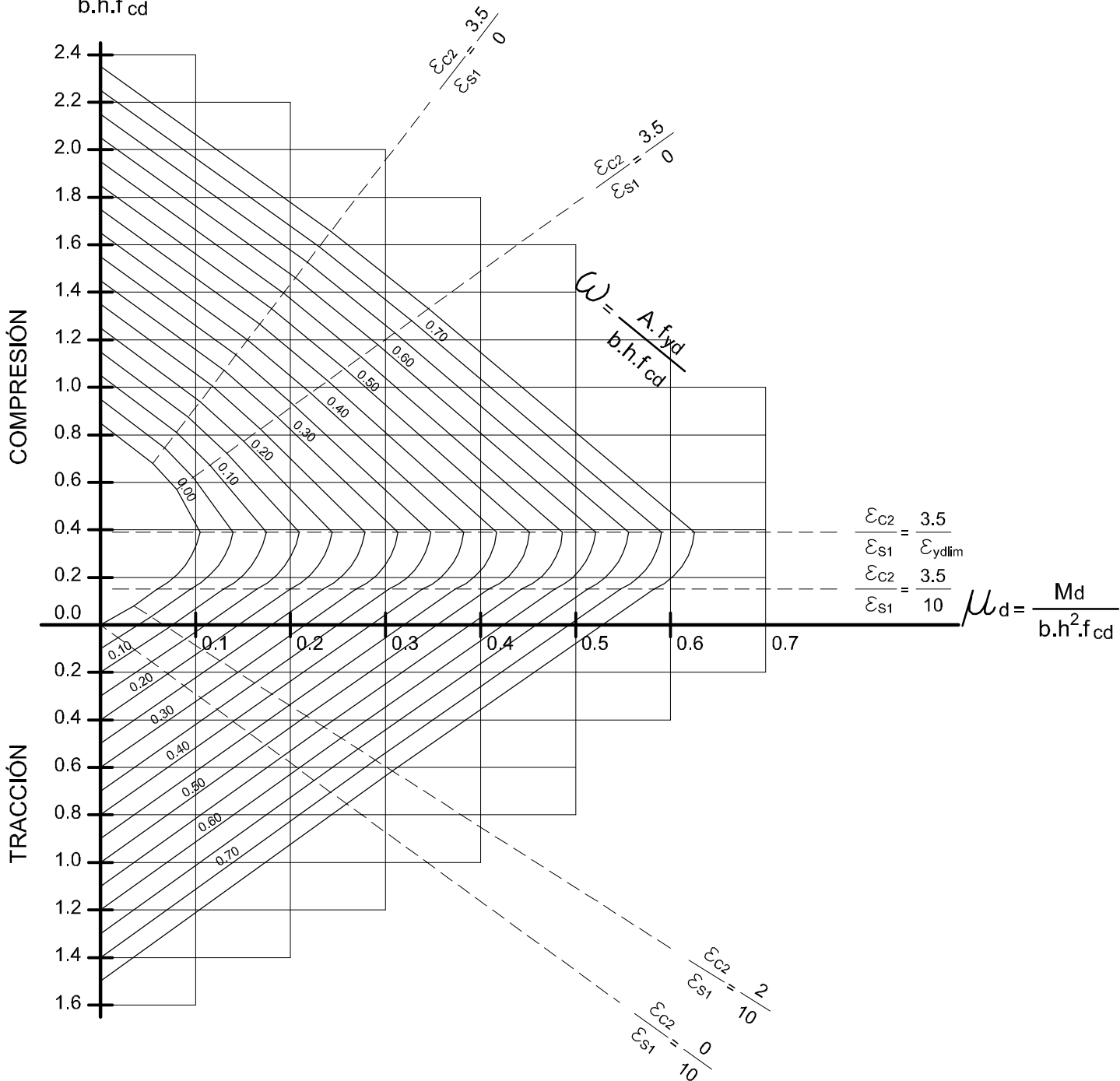


# SECCIONES RECTANGULARES DE HORMIGÓN ARMADO

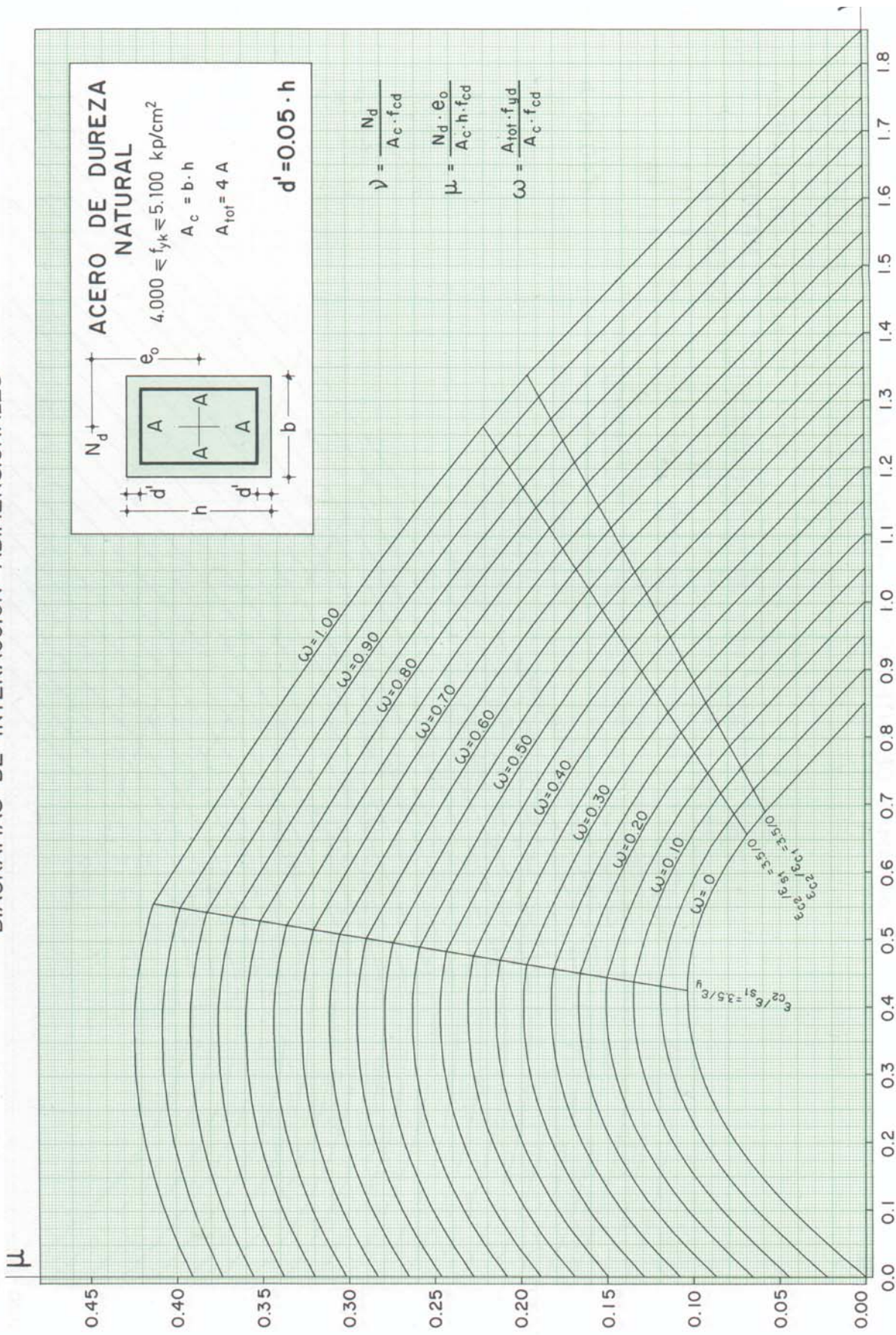
PRESO Y TENSO FLEXIÓN  
ARMADURAS SIMÉTRICAS



$$\nu_d = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

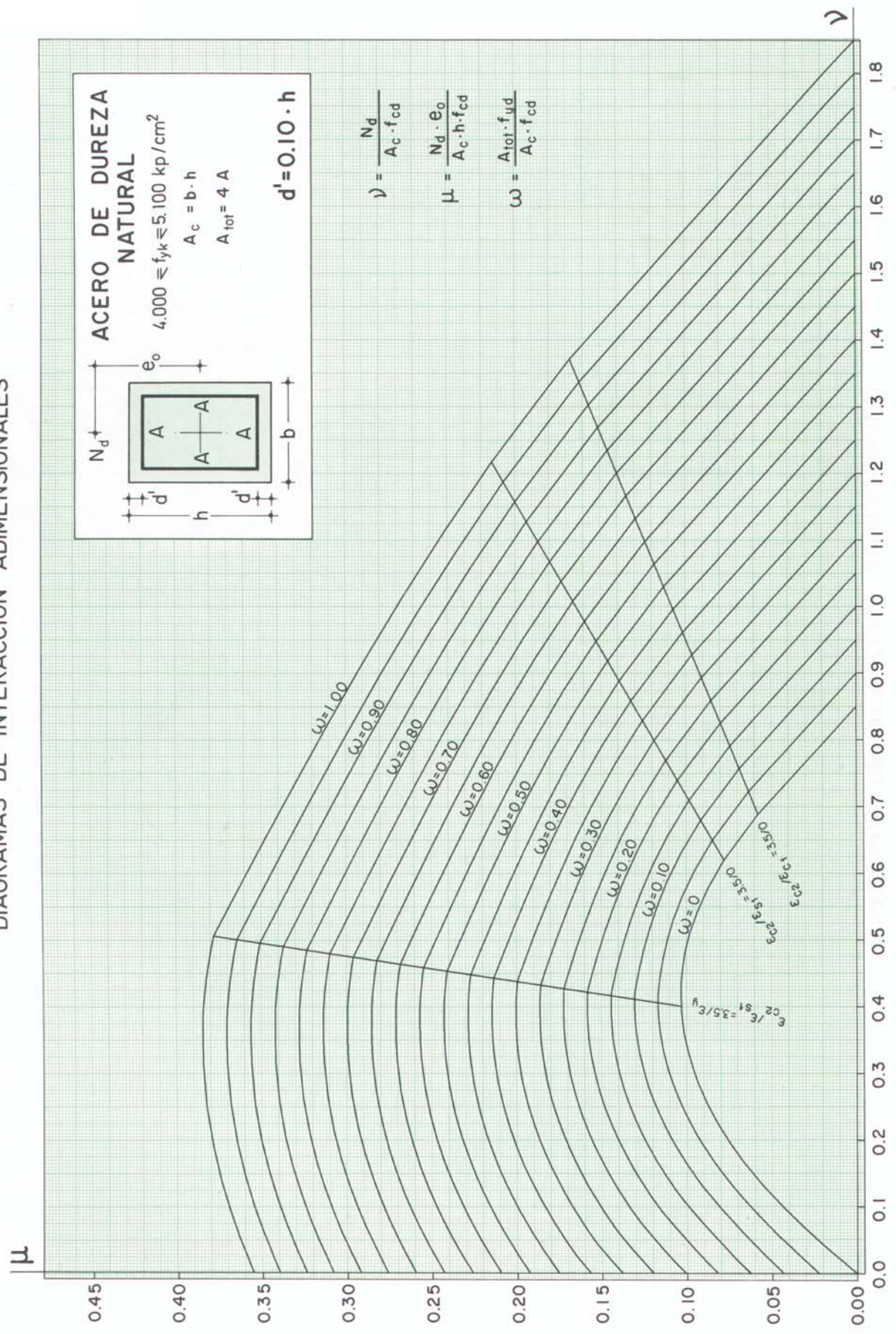


DIAGRAMAS DE INTERACCION ADIMENSIONALES



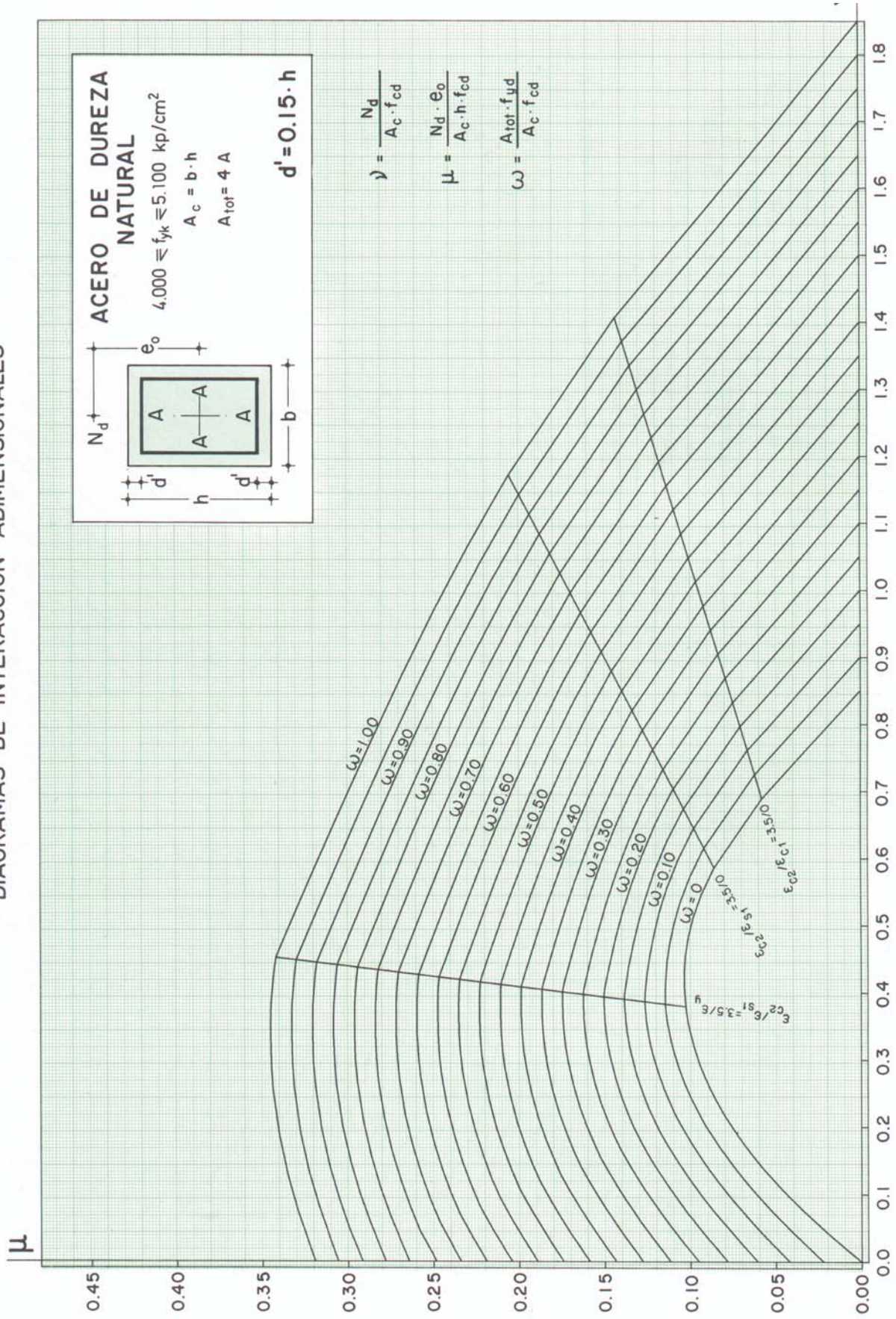


DIAGRAMAS DE INTERACCION ADIMENSIONALES



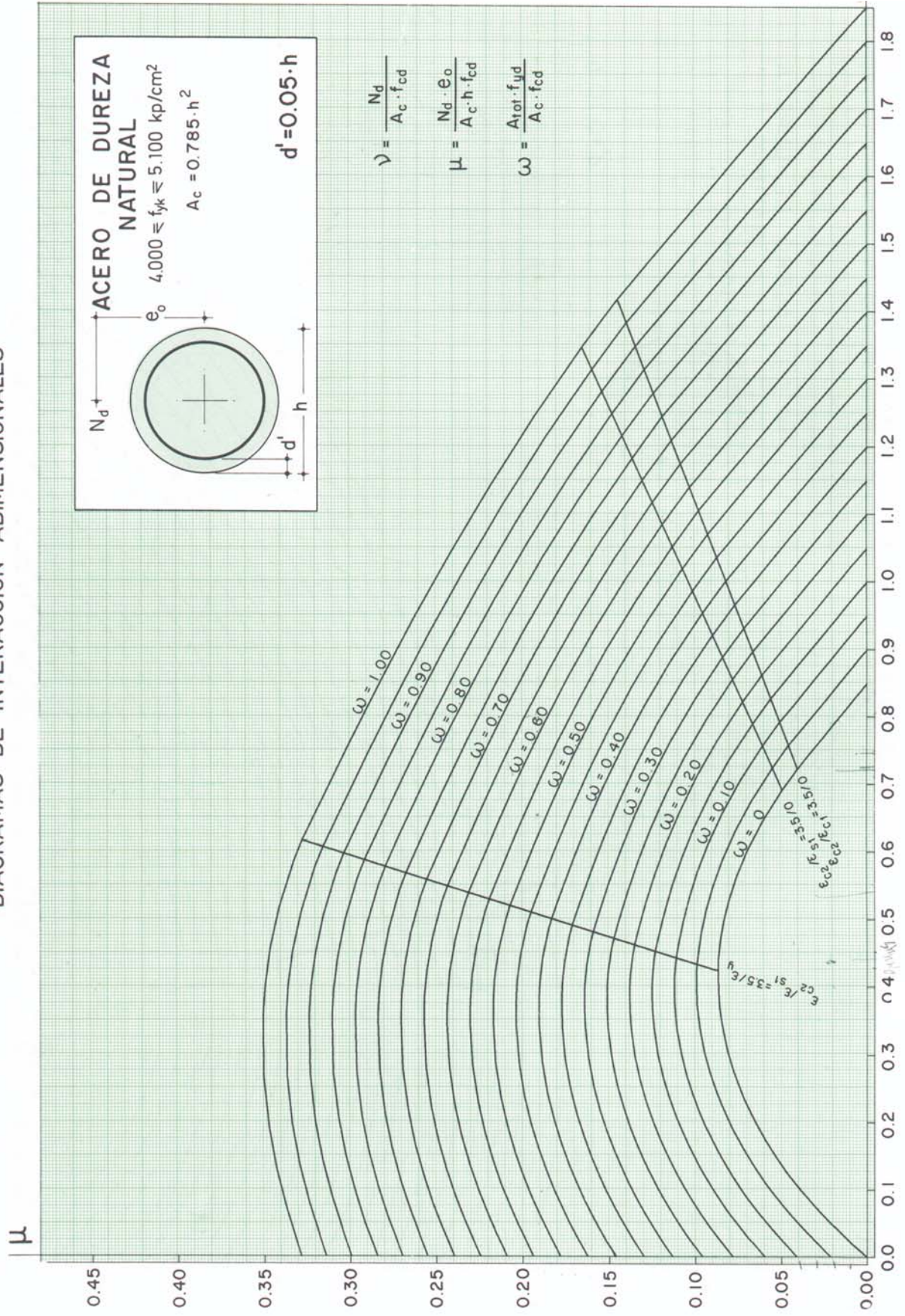


DIAGRAMAS DE INTERACCION ADIMENSIONALES



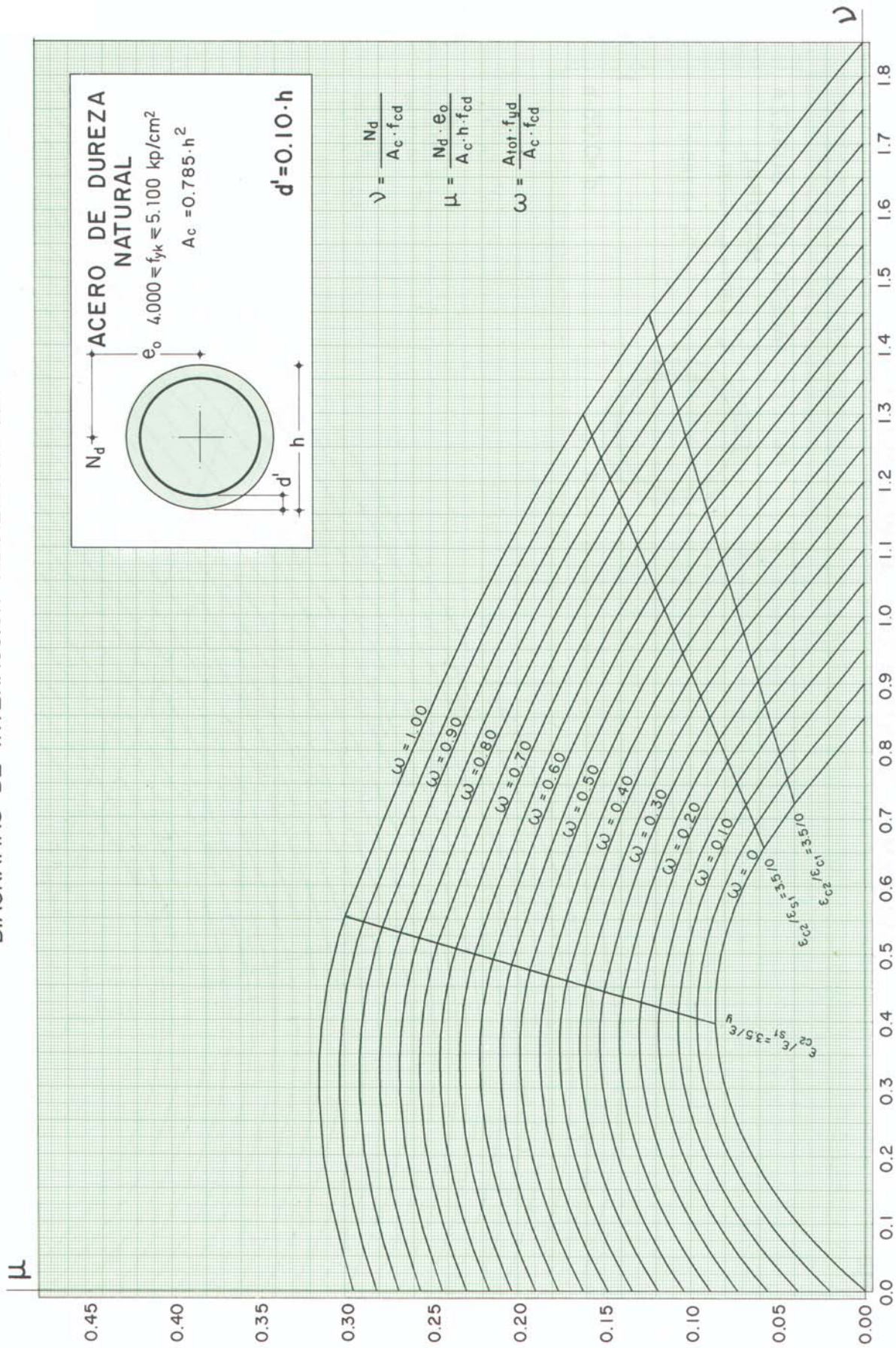


DIAGRAMAS DE INTERACCION ADIMENSIONALES



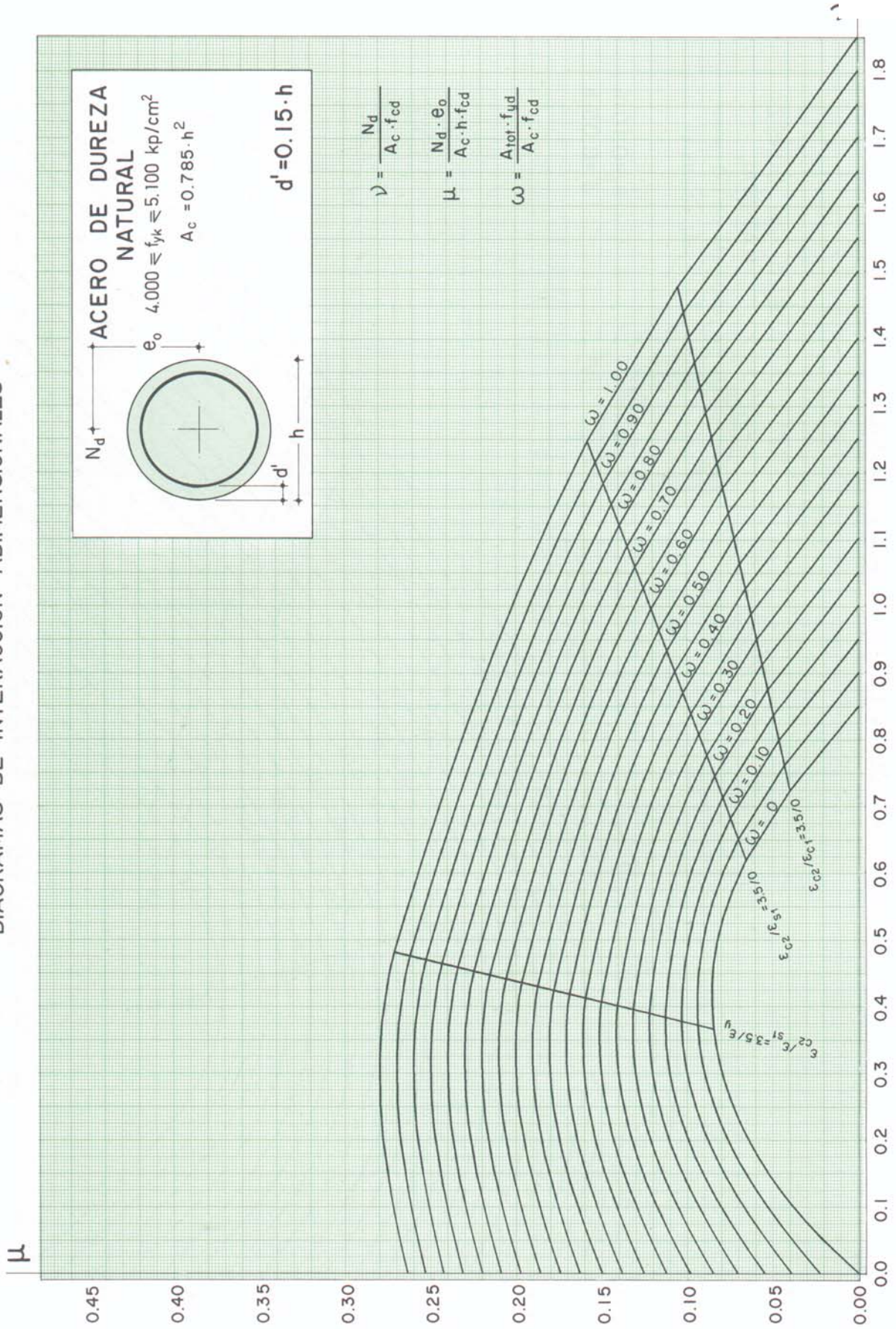


DIAGRAMAS DE INTERACCION ADIMENSIONALES





DIAGRAMAS DE INTERACCION ADIMENSIONALES



## BIBLIOGRAFÍA

- P. Jiménez Montoya, A. García Meseguer y F. Morán Cabré: "Hormigón Armado". Editorial Gustavo Gili. S.A.
- Fritz Leonhardt y Eduard Mönning: "Estructuras de Hormigón Armado" Tomo I, Librería "El ateneo" Editorial.
- INSTITUTO URUGUAYO DE NORMAS TÉCNICAS: "Proyecto y ejecución de estructuras de hormigón en masa o armado" 1050:2001.
- H. Chamlian: "Apuntes sobre Tramos Esbeltos de Hormigón Armado" Editados por Oficina del Libro del CEDA. Facultad de Arquitectura.