

FICHA 2 | APUNTES SOBRE MÉTODO DE CROSS

Se presenta en estos apuntes una exposición de las partes fundamentales del método de Cross, que consideramos el más adecuado para un primer contacto de los estudiantes de arquitectura con las estructuras hiperestáticas. Se trata de un método sencillo y fácil en su parte operativa. A través de su aplicación y en cada una de sus etapas se visualiza el comportamiento de la estructura, y los conceptos que se utilizan son fácilmente comprensibles (momentos freno, rigideces, reparticiones, transmisiones).

El método seguido en la exposición es el que se viene desarrollando desde hace varios años en el curso de Estabilidad 2do. el que, a su vez, está basado en lo fundamental, en la tradición seguida en esta Facultad para la exposición del método, y que se remonta a las clases dictadas por el Arq. Alberto Sayagués, sintetizadas en el libro del I.C.E. "Método de Cross", publicación N°13, y posteriormente expuestas, con algunas variaciones, en los cursos dictados por el Arq. Julio García Mantegazza.

Pretendemos con estos apuntes presentar un material de ayuda directa en el curso de Estabilidad 2do, a los efectos de agilizar y sintetizar la exposición del tema en el desarrollo del curso. Colaboraron en la realización de los originales, los Arqtos. Juan Sarachu (resolución de los problemas), Diana Spatakis (gráficos y fórmulas) y Ma. Del Carmen Fontana (dactilografía.)

Arq. H. CHAMLIAN.
1985.

Hemos entendido conveniente ampliar los apuntes sobre Método de Cross, con distintos complementos tal como se han dictado en el Curso de Estabilidad 2do. en los últimos años.

El índice de los mismos es:

- 1 - ASPECTOS GENERALES.
- 2 - PROBLEMAS REFERENTES A MOMENTOS INICIALES DEL 1er CROSS.
- 3 - ESTRUCTURAS CON NUDOS DESPLAZABLES.
- 4 - RELACIÓN FORMA-SOLICITACIONES. (PARCIALIZACIÓN DEL TODO ESTRUCTURAL (1))
- 5 - PROBLEMA DE LOS APOYOS. (PARCIALIZACIÓN DEL TODO ESTRUCTURAL (2))
- 6 - DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS AXILES.
- 7 - TEMAS PRÁCTICOS.
- 8 - TABLAS Y ÁBACOS.

Arq. H. CHAMLIAN.
1991

INTRODUCCIÓN

- a) En análisis de estructuras, a los efectos del estudio de las solicitaciones, se distingue entre estructuras isostáticas e hiperestáticas.

Particularizando al caso de estructuras cuyo estudio puede esquematizarse en el plano, las condiciones analíticas de equilibrio de un sistema de fuerzas son tres: proyección de las fuerzas sobre dos ejes cualesquiera debe ser cero, y momento respecto a cualquier punto del plano también debe ser nulo.

Las estructuras cuyos sistemas de fuerzas actuantes pueden ser equilibradas, en sus vínculos exteriores, recurriendo solamente a la aplicación de las tres ecuaciones anteriormente indicadas, se llaman isostáticas. Estas estructuras presentan los mínimos vínculos para ser estables.

Las estructuras que no pueden ser resueltas solamente con la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, se llaman hiperestáticas. En este caso debe recurrirse a ecuaciones complementarias que expresen condiciones de deformaciones.

La distinción entre estructuras isostáticas e hiperestáticas es solamente a los efectos de su análisis. En general, no interesa, como determinante, en el momento de la ideación de la estructura resistente y que sea acorde con un determinado planteo arquitectónico. (Una excepción lo constituyen ciertos tipos de suelos que pueden aconsejar el diseño de una estructura isostática, o hiperestática de menor grado).

En el caso de tramos solicitados por flectores axiales y cortantes, que provocan giros, acortamientos o alargamientos, y distorsiones, las únicas deformaciones que se considerarán son los giros; se desprecian los restantes.

- b) El método de CROSS posee las tres cualidades que deben exigirse a un método:
 -generalidad,
 -sencillez,
 -exactitud.

*El método es aplicable a cualquier estructura, por complicada que sea, incluso con tramos curvos, estructuras espaciales, etc.

*La aplicación del método es sencilla, como consecuencia de la claridad intuitiva de su procedimiento. Podemos imaginar qué es lo que ocurre en la estructura en cada etapa del proceso de su resolución.

No es preciso recordar ni convenciones artificiosas, ni fórmulas complicadas; sólo tener presente el sentido físico del problema y considerar el artificio del método: el mecanismo natural de la transformación de una estructura con nudos frenados, a la verdadera, mediante liberación gradual, permitiendo sucesivamente las deformaciones de un nudo: giros y desplazamientos.

Cada barra viene definida por sus rigideces y los coeficientes de transmisión, que le son propios y que no dependen de la situación que ocupa en la estructura.

La parte operativa del cálculo se reduce a simples operaciones aritméticas.

*La exactitud del método deriva de la sencillez de su aplicación, que entraña un menor riesgo de error, y de tener los cálculos siempre a la vista, progresando desde el primer momento hacia el resultado final.

Es un método por aproximaciones sucesivas, lo que no quiere decir que sea un método aproximado. La iteración es un método basado en la repetición de un cierto proceso; en este método, los valores van acercándose cada vez más al resultado final. Ya que cada paso mejora los valores de las incógnitas, pueden obtenerse resultados con la exactitud deseada sin más que repetir el proceso un número suficiente de veces. El número de pasos depende de lo acentuado que sea la convergencia de los resultados al valor final, y del grado de aproximación necesario.

Por lo anterior, la exactitud se regula a voluntad, lo que es muy interesante para los tanteos previos.

- c) La determinación de solicitaciones, en estructuras hiperestáticas requiere, previamente, de una definición formal de la misma.

A través de ésta se determinan, no solamente los valores de las cargas (donde deberán incluirse los pesos propios de los tramos), sino los valores de rigideces, transmisiones, momentos freno, coeficientes de repartición, etc.

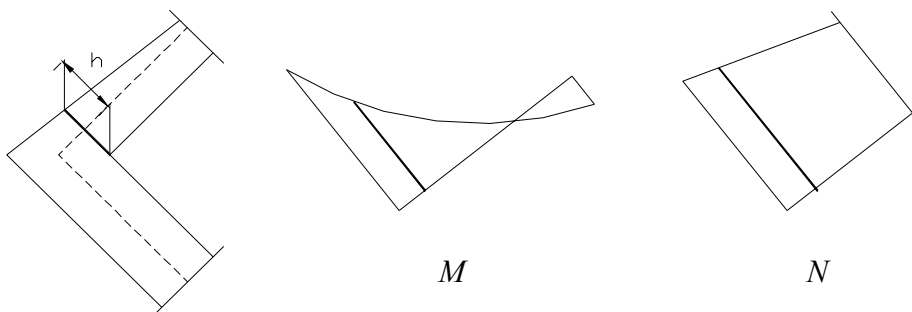
Una vez halladas las solicitaciones, deben verificarse las secciones críticas. Como resultado, pueden producirse dos situaciones: que las formas, proyectadas sean viables o no. En esta última situación deberán ajustarse las formas, en las secciones no viables.

El ajuste del anteproyecto puede ser en algunos sectores, o en toda la estructura.

Debe determinarse si los ajustes realizados justifican o no, un reestudio de las solicitaciones, pues producirán variaciones de los valores anteriormente indicados. Por supuesto, no existen reglas fijas para indicar los caminos a seguir.

Para una etapa de anteproyecto, vamos a citar a algunos autores americanos (Urquhart, O'Rourke y Winter). Establecen que no será necesario repetir el cálculo de los momentos salvo en los casos en que las rigideces relativas resultantes difieran de las estimadas para el cálculo inicial en más de un 30%, aproximadamente. Debe observarse, a este respecto, que las variables que condicionan el dimensionamiento son las relaciones entre las rigideces, y no los valores absolutos de estas últimas. Si en los cálculos de un anteproyecto, se hubieran estimado por defecto las dimensiones de todas las piezas, en un mismo porcentaje, los resultados del cálculo no quedarían afectados por el error indicado; quedaría por estudiar la entidad de la variación del peso propio.

Puede ser válido el estudio de secciones en los bordes de las formas:



1.1 En el estudio de estructuras hiperestáticas, es necesario considerar el problema de las deformaciones.

En el caso que estamos tratando, estructuras esquematizables en un plano y compuestas por tramos lineales, las solicitaciones que existen son momento flector, y esfuerzos axiales y cortantes. Cada una de ellas producen deformaciones, pero las únicas que se consideran, por su entidad, son las deformaciones producidas por el momento flector. Por tanto debemos estudiar giros en tramos flexados y, en particular, se los estudiará en los extremos de los tramos.

Como primera parte, se determinarán expresiones cómodas para la determinación de los valores de los ángulos de giro, en los dos extremos, A y B, de tramos aislados simplemente apoyados, y para tres casos de carga:

- acción normal al eje del tramo y/o momento aplicado en el tramo.
- solamente acción de un momento en el apoyo izquierdo A.
- solamente acción de un momento en el apoyo derecho B.

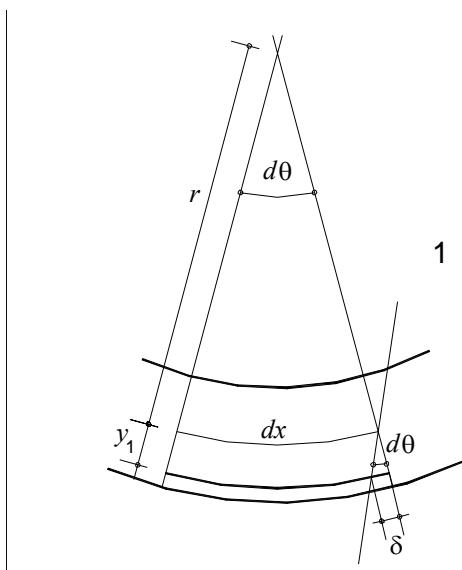
Estas tres situaciones configuran un primer caso, que son la base para el estudio de situaciones más complejas de apoyos, que se resuelven mediante superposición de los primeros.

En el transcurso de esta parte, se definirán los conceptos de rigidez, transmisión y momentos de fijación.

DETERMINACIÓN DE LAS EXPRESIONES DE LOS ÁNGULOS DE GIRO EN LOS APOYOS DE TRAMOS FLEXADOS.

EXPRESIONES MATEMÁTICAS AUXILIARES Y ANTECEDENTES DEL MÉTODO DE CROSS.

1.2 En un tramo en flexión, se considera un elemento dx , y se trata de determinar, en primera instancia, el valor $\frac{1}{r}$:



Las deformaciones: total y unitaria, de las fibras, tienen las expresiones generales:

$$\delta = \frac{F \cdot L}{E \cdot A} \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{\sigma}{E}$$

y al nivel y_1 se produce: $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$

El valor del ángulo $d\theta$ es: $d\theta = \frac{dx}{r}$

Pero también: $d\theta = \frac{\delta}{y_1}$

Igualando: $\frac{dx}{r} = \frac{\delta}{y_1}$

En este caso: $L = dx$ entonces:

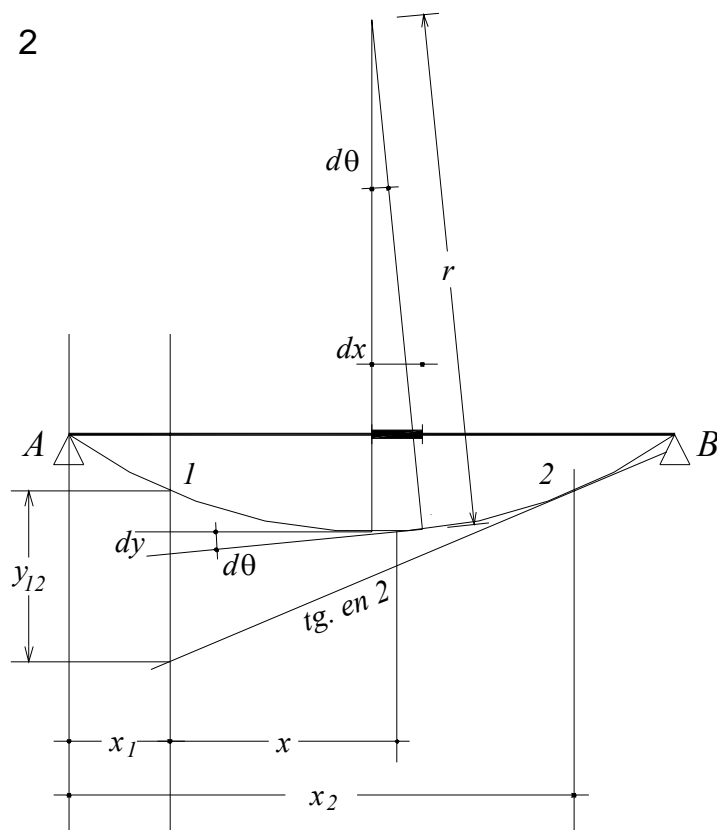
$$\frac{1}{r} = \frac{\delta}{dx} \cdot \frac{1}{y_1} = \frac{\varepsilon}{y_1} = \frac{\sigma_1}{y_1 \cdot E}$$

La expresión general de Navier para la determinación de tensiones normales para tramos en flexión es: $\sigma_1 = \frac{M \cdot y_1}{I}$

Por lo tanto: $\frac{1}{r} = \frac{M}{E \cdot I}$ (1)

1.3 Tomando un tramo AB simplemente apoyado y flexado:

2

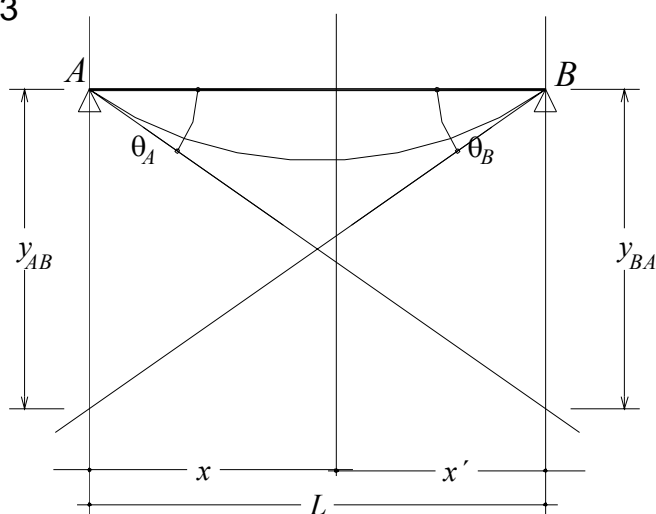


Se trata de hallar, en segunda instancia, y_{12} , que es la distancia, medida sobre una vertical, entre la sección 1 y el corte con la tangente en 2.

$$dy \cong x \operatorname{tg} d\theta \cong x d\theta = \frac{x dx}{r} = x \frac{M}{E \cdot I} dx$$

Por lo tanto:
$$y_{12} = \int_{x_1}^{x_2} x \frac{M}{E \cdot I} dx \quad (2)$$

3



Si las secciones son las extremas del tramo:

$$\theta_A \cong \operatorname{tg} \theta_A = \frac{y_{BA}}{L}$$

$$\theta_B \cong \operatorname{tg} \theta_B = \frac{y_{AB}}{L}$$

Por lo que:

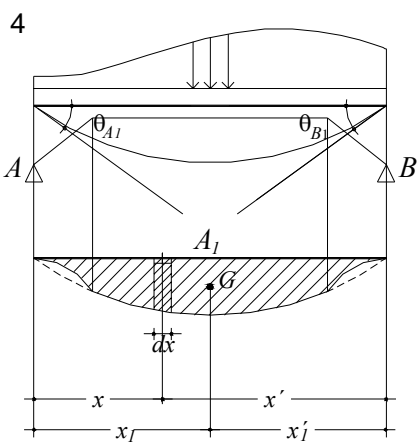
$$\theta_A = \int_0^L \frac{x' \cdot M \cdot dx}{L \cdot E \cdot I} \quad (3)$$

$$\theta_B = \int_0^L \frac{x \cdot M \cdot dx}{L \cdot E \cdot I} \quad (4)$$

Tomando la expresión para θ_A , sacando E y L fuera de la integral y, dentro de ésta, multiplicando y dividiendo entre I_m inercia mínima del tramo, obtenemos:

$$\theta_A = \frac{1}{E \cdot L} \int_0^L \frac{M \cdot I_m \cdot x' \cdot dx}{I \cdot I_m} = \frac{1}{E \cdot I_m \cdot L} \int_0^L \frac{M \cdot I_m \cdot x' \cdot dx}{I}$$

La expresión $M \cdot I_m / I$ implica un diagrama de momentos reducido pues I_m / I es un número menor o igual a 1.



Entonces la integral es igual al momento estático del diagrama de momentos reducido con respecto al extremo opuesto al que se está considerando:

$$\theta_{A1} = \frac{1}{E \cdot I_m \cdot L} A_1 \cdot x_1'$$

$$\theta_{B1} = \frac{1}{E \cdot I_m \cdot L} A_1 \cdot x_1$$

Definimos RIGIDEZ como el valor: $\chi = \frac{E \cdot I_m}{L}$

La rigidez indica la mayor o menor oposición del tramo a ser deformado por giro. Dentro de su valor, hay términos de discutible determinación pero que, al intervenir en el proceso del método con valores relativos, se disminuye la importancia de no tenerlos bien definidos.

La inercia es una característica geométrica con repercusiones mecánicas: indica la distribución de materia alrededor del centro de gravedad y la resistencia a la flexión. En caso del hormigón armado, no se conoce en esta etapa su valor, pues es una incógnita el valor de las armaduras, la sección fisurada, etc.

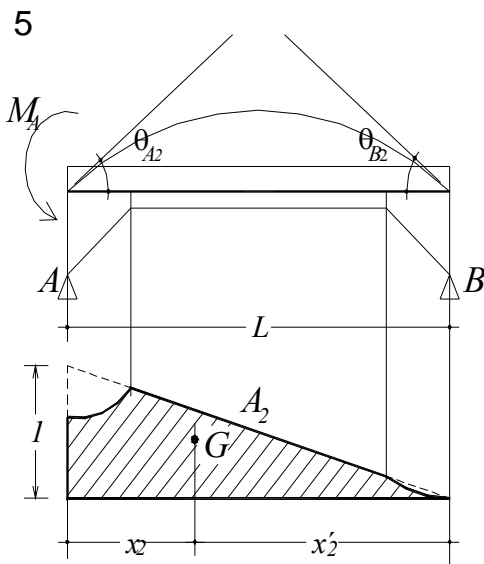
Por lo tanto, las expresiones anteriores quedan:

$$\theta_{A1} = \frac{A_1 \cdot x_1'}{\chi \cdot L^2} \quad (5)$$

$$\theta_{B1} = \frac{A_1 \cdot x_1}{\chi \cdot L^2} \quad (6)$$

1.4 DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES PARA LA RIGIDEZ (γ ó α) Y DE TRANSMISION (β).

1.4.1 Se considerarán dos casos. El primero de ellos es el de un tramo simplemente apoyado, con un momento M_A en el apoyo izquierdo.



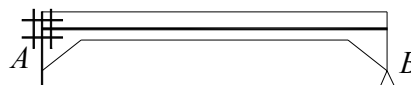
El área A_2 se forma con un momento aplicado igual a 1, por lo tanto:

$$\theta_{A2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x'_2}{\chi \cdot L^2} = \frac{M_A}{\chi \cdot \gamma_A} \quad (7)$$

siendo:
$$\gamma_A = \frac{L^2}{A_2 \cdot x'_2} \quad (8)$$

En general se acostumbra trabajar con:

$$\alpha = \frac{\gamma}{4} \quad (9)$$



Con esta expresión se aclara que la rigidez es el momento que es necesario aplicar en el extremo de un tramo para producir un giro unidad, pues: $\chi \cdot \gamma_A = \frac{M_A}{\theta_A}$

Sí $\theta_A = 1$, entonces: $\chi \cdot \gamma_A = M_A$

El valor de γ implica la consideración del tipo de apoyos en el concepto de rigidez.

Por otra parte: $\frac{1}{\chi \cdot \gamma_A} = \frac{\theta_A}{M_A}$

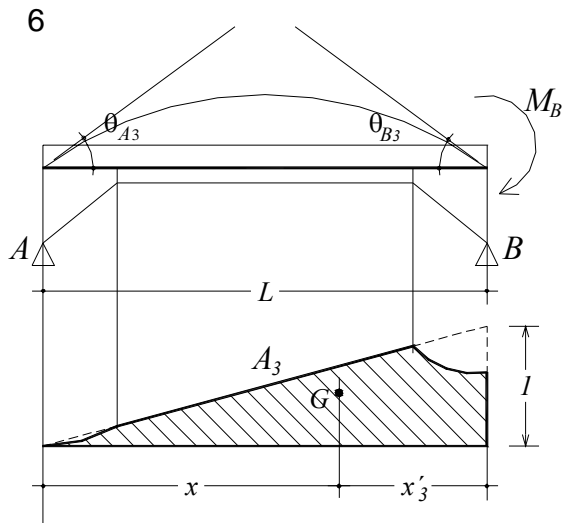
Y sí $M_A = 1$; entonces: $\frac{1}{\chi \cdot \gamma_A} = \theta_A$

por lo que $\frac{1}{\chi \cdot \gamma_A}$ es el giro en A cuando actúa un momento unitario.

Del mismo modo:
$$\theta_{B2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x_2}{\chi \cdot L^2} \quad (10)$$

Para inercia constante, γ_A adopta el valor:
$$\gamma_A = \frac{L^2}{1 \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2L}{3}} \quad \therefore \quad \boxed{\gamma_A = 3} ; \quad \boxed{\alpha_A = 0.75}$$

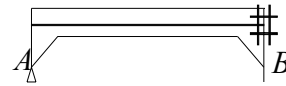
Si actúa M_B :



$$\theta_{A3} = \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x'_3}{\chi \cdot L^2} \quad (11)$$

$$\theta_{B3} = \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x_3}{\chi \cdot L^2} = \frac{M_B}{\chi \cdot \gamma_B} \quad (12)$$

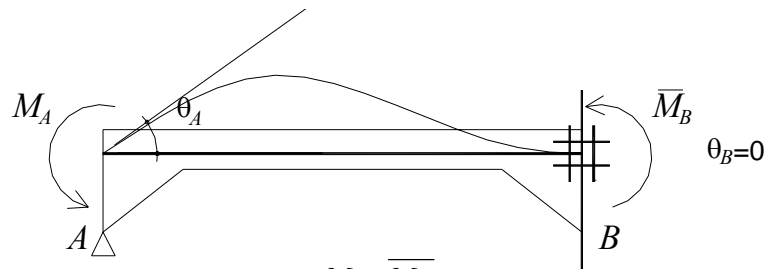
$$\gamma_B = \frac{L^2}{A_3 \cdot x_3} \quad (13)$$



1.4.2 Como segundo caso, se considerará un tramo con un extremo apoyado y el otro fijo (situación ficticia, comúnmente denominada de empotramiento perfecto) y con un momento en el extremo apoyado.

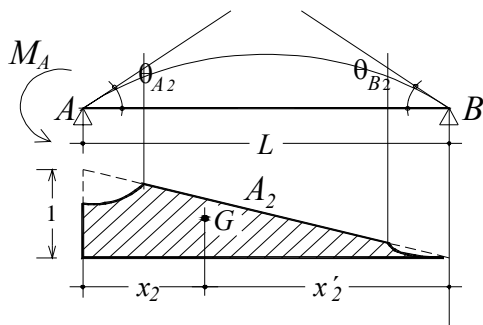
Veremos dos situaciones:

A)

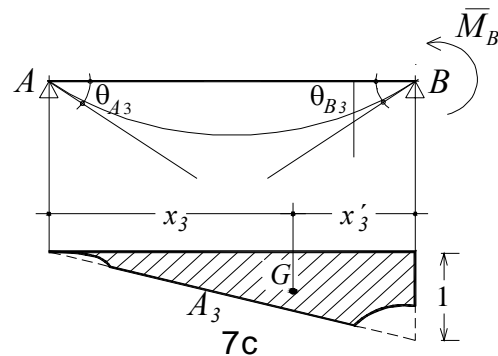


7a

Se observa que en el apoyo B aparece un momento \bar{M}_B , cuyo valor se determinará a continuación.



7b



7c

Las expresiones de los giros son:

$$\theta_{A2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x'_2}{\chi \cdot L^2} \quad \theta_{A3} = \frac{\overline{M}_B \cdot A_3 \cdot x'_3}{\chi \cdot L^2}$$

$$\theta_{B2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x_2}{\chi \cdot L^2} \quad \theta_{B3} = \frac{\overline{M}_B \cdot A_3 \cdot x_3}{\chi \cdot L^2}$$

El giro en B es nulo, por lo tanto:

$$\theta_{B2} = \theta_{B3} \quad \text{entonces:} \quad M_A \cdot A_2 \cdot x_2 = \overline{M}_B \cdot A_3 \cdot x_3$$

$$\boxed{\overline{M}_B = \frac{A_2 \cdot x_2}{A_3 \cdot x_3} M_A = \beta_{AB} \cdot M_A} \quad (14) \quad \text{siendo:} \quad \boxed{\beta_{AB} = \frac{A_2 \cdot x_2}{A_3 \cdot x_3}} \quad (15)$$

Para inercia constante β_{AB} adopta el valor:

$$\beta_{AB} = \frac{A_2 \cdot \frac{L}{3}}{A_3 \cdot \frac{2}{3}L} \quad \therefore \quad \boxed{\beta = \frac{1}{2}}$$

Posteriormente veremos otra manera de expresar β_{AB} (fórmula 15)

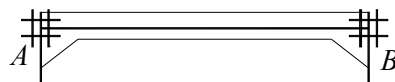
La expresión del giro en A es:

$$\theta_A = \theta_{A2} - \theta_{A3}$$

$$\theta_A = \frac{M_A}{\chi} \left(\frac{A_2 \cdot x'_2}{L^2} - \beta_{AB} \frac{A_3 \cdot x'_3}{L^2} \right)$$

$$\boxed{\theta_A = \frac{M_A}{\chi} \left[A_2 \left(x'_2 - x_2 \frac{x'_3}{x_3} \right) \right] \frac{1}{L^2} = \frac{M_A}{\chi \cdot \gamma_A}} \quad (16)$$

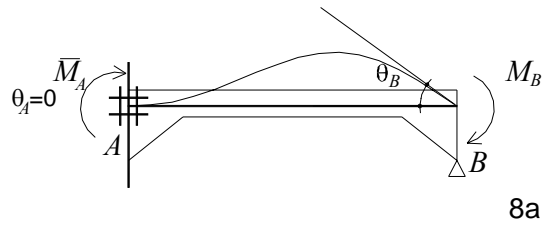
Siendo: $\gamma_A = \frac{L^2}{A_2 \left(x'_2 - x_2 \frac{x'_3}{x_3} \right)}$ (17)



Para inercia constante, γ_A adopta el valor:

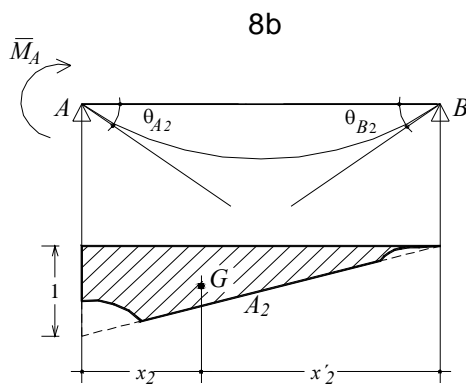
$$\gamma_A = \frac{L^2}{\frac{L}{2} \left(\frac{2L}{3} - \frac{L}{3} \cdot \frac{\frac{L}{3}}{\frac{2L}{3}} \right)} \quad \therefore \quad \boxed{\gamma_A = 4} \quad \therefore \quad \boxed{\alpha_A = 1}$$

B) Si las condiciones de apoyo fueran inversas:

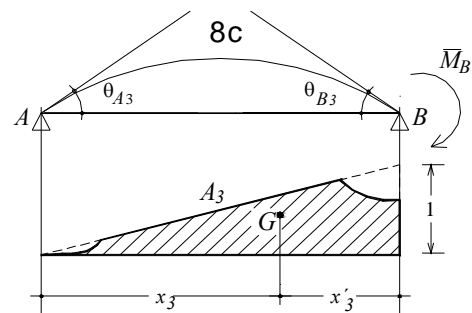


8a

\overline{M}_A y M_B
SON DEL MISMO SENTIDO



8b



8c

Las expresiones de los giros son:

$$\theta_{A2} = \frac{\overline{M}_A \cdot A_2 \cdot x'_2}{\chi \cdot L^2}$$

$$\theta_{A3} = \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x'_3}{\chi \cdot L^2}$$

$$\theta_{B2} = \frac{\overline{M}_A \cdot A_2 \cdot x_2}{\chi \cdot L^2}$$

$$\theta_{B3} = \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x_3}{\chi \cdot L^2}$$

El giro en A es nulo, por lo tanto:

$$\theta_{A2} = \theta_{A3} \quad \text{entonces:} \quad \overline{M}_A \cdot A_2 \cdot x'_2 = M_B \cdot A_3 \cdot x'_3$$

$$\boxed{\overline{M}_A = \frac{A_3 \cdot x'_3}{A_2 \cdot x'_2} M_B = \beta_{BA} \cdot M_B} \quad (18) \quad \text{siendo:} \quad \boxed{\beta_{BA} = \frac{A_3 \cdot x'_3}{A_2 \cdot x'_2}} \quad (19)$$

Posteriormente veremos otra manera de expresar β_{BA} (fórmula 19)

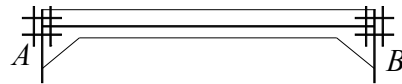
La expresión del giro en B es: $\theta_B = \theta_{B3} - \theta_{B2}$

$$\theta_B = \frac{M_B}{\chi} \left(\frac{A_3 \cdot x_3}{L^2} - \beta_{BA} \frac{A_2 \cdot x_2}{L^2} \right)$$

$$\theta_B = \frac{M_B}{\chi} \left[A_3 \left(x_3 - x'_3 \frac{x_2}{x'_2} \right) \right] \frac{1}{L^2} = \frac{M_B}{\chi \cdot \gamma_B} \quad (20)$$

siendo:

$$\gamma_B = \frac{L^2}{A_3 \left(x_3 - x'_3 \frac{x_2}{x'_2} \right)} \quad (21)$$



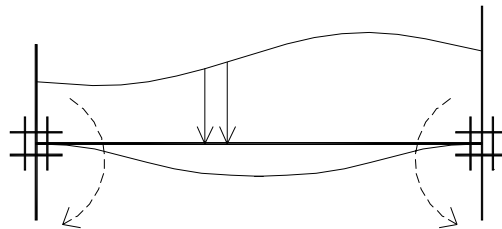
1.5 DETERMINACION DE LOS MOMENTOS FRENO.

A continuación se determinarán momentos en los extremos de las barras con la condición de deformación de giro nulo en los mismos. Se hará para dos situaciones: ambos extremos sin giro (biempotrado) e impedimento de giro en uno de ellos y articulado en el otro (empotrado-apoyado).

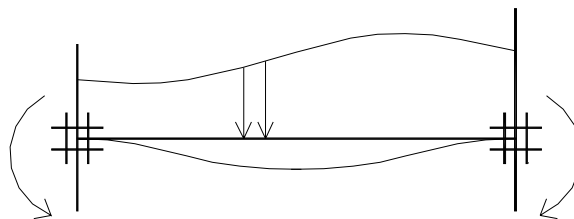
A su vez se estudiarán dos situaciones: valores de los momentos para cargas normales al eje de la barra y/o momentos aplicados en el tramo, y para una situación de desplazamiento de uno o de los dos extremos de la barra (sin cargas ni momentos en el tramo).

Es necesario aclarar aquí el sentido de los momentos que convenimos utilizar. Existen dos tipos de convenciones de signos;

- a) acción de la barra sobre el nudo:



- b) acción del nudo sobre la barra (es la acción que ejerce el resto de las barras sobre el tramo que se estudia);



Como este es el sentido de los momentos que se utilizan para hallar diagramas de solicitaciones en el tramo, esta segunda convención es la que se aplicará en lo que sigue.

Para operar algebraicamente, utilizaremos los siguientes signos:



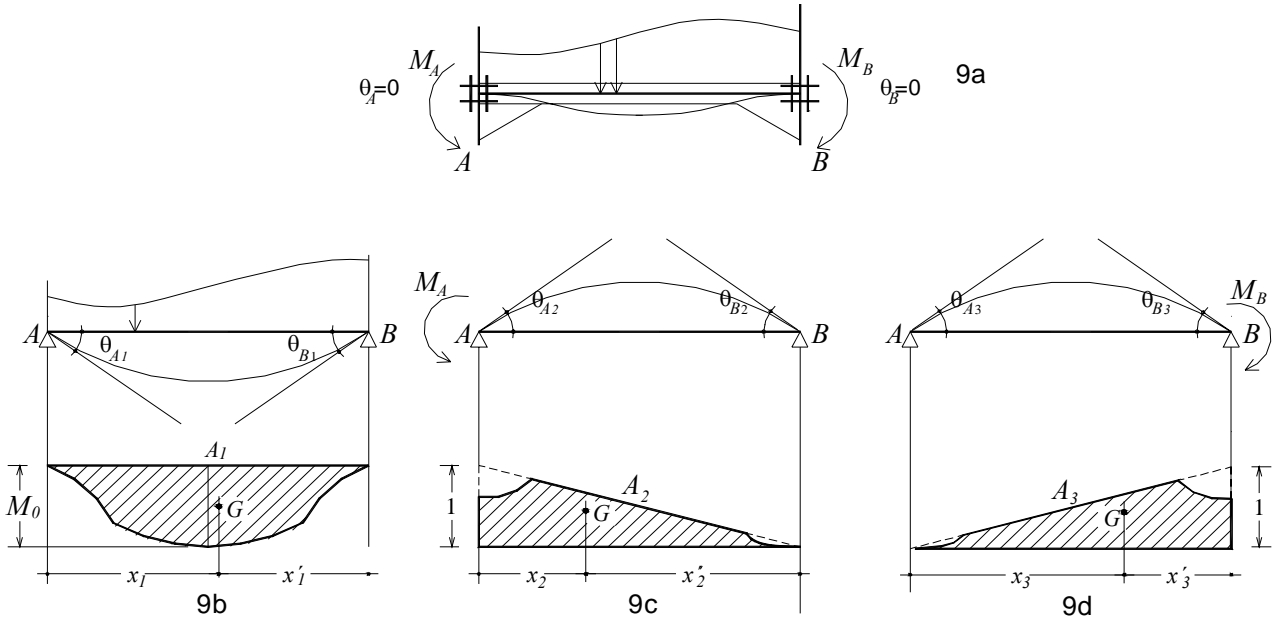
sentido antihorario
signo -



sentido horario
signo +

1.5.1 Tramo con cargas normales a su eje y con los dos extremos frenados (empotramiento perfecto en ambos apoyos).

Se aplica superposición de tres casos:



Las expresiones de los giros son:

$$\theta_{A1} = \frac{A_1 \cdot x'_1}{\chi \cdot L^2}$$

$$\theta_{A2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x'_2}{\chi \cdot L^2}$$

$$\theta_{A3} = \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x'_3}{\chi \cdot L^2}$$

$$\theta_{B1} = \frac{A_1 \cdot x_1}{\chi \cdot L^2}$$

$$\theta_{B2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x_2}{\chi \cdot L^2}$$

$$\theta_{B3} = \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x_3}{\chi \cdot L^2}$$

Los giros en los apoyos son nulos, por tanto:

$$\theta_{A1} - \theta_{A2} - \theta_{A3} = 0$$

$$A_1 \cdot x'_1 - M_A \cdot A_2 \cdot x'_2 - M_B \cdot A_3 \cdot x'_3 = 0 \quad (\text{a})$$

$$\theta_{B1} - \theta_{B2} - \theta_{B3} = 0$$

$$A_1 \cdot x_1 - M_A \cdot A_2 \cdot x_2 - M_B \cdot A_3 \cdot x_3 = 0 \quad (\text{b})$$

Multiplicando (a) por x_3 y (b) por x_3 restando ambas y despejando M_A :

$$M_A = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{x'_1 x_3 - x_1 x'_3}{x_3 x'_2 - x'_3 x_2} \quad (22)$$

Multiplicando (a) por x_2 y (b) por x'_2 , restando ambas y despejando M_B :

$$M_B = \frac{A_1}{A_3} \cdot \frac{x'_1 x_2 - x_1 x'_2}{x'_3 x_2 - x_3 x'_2} \quad (23)$$

Para inercia constante, y carga uniformemente repartida:

$$M_A = \frac{\frac{2}{3} M_0 \cdot L}{\frac{L}{2}} \cdot \frac{\frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} L - \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{3}}{\frac{2}{3} L \cdot \frac{2}{3} L - \frac{L}{3} \cdot \frac{L}{3}} = \frac{2}{3} M_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{p \cdot L^2}{8} \quad \text{pues } M_0 = \frac{p \cdot L^2}{8} \quad \therefore \boxed{M_A = \frac{p \cdot L^2}{12}}$$

1.5.2 Tramo con cargas normales a su eje y con el extremo izquierdo articulado y el derecho frenado.

Se consideran las figuras 9b y 9d:

$$\theta_{B1} - \theta_{B3} = 0 \quad A_1 \cdot x_1 - M_B \cdot A_3 \cdot x_3 = 0$$

$$\boxed{M_B = \frac{A_1 \cdot x_1}{A_3 \cdot x_3}} \quad (24)$$

1.5.3 Tramo con cargas normales a su eje y con el extremo izquierdo frenado y el derecho articulado.

Se consideran las figuras 9c y 9b:

$$\theta_{A1} - \theta_{A2} = 0 \quad A_1 \cdot x'_1 - M_A \cdot A_2 \cdot x'_2 = 0$$

$$\boxed{M_A = \frac{A_1 \cdot x'_1}{A_2 \cdot x'_2}} \quad (25)$$

Para inercia constante y carga uniformemente repartida:

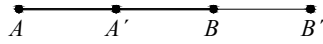
$$M_A = \frac{\frac{2}{3} M_0 \cdot L \cdot \frac{L}{2}}{\frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} L} = M_0$$

$$\therefore \boxed{M_A = \frac{p \cdot L^2}{8}}$$

1.5.4 Momentos freno para tramos con corrimientos de apoyos.

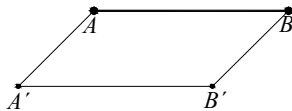
Los casos que se pueden producir son los que se detallan a continuación:

a)



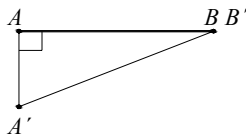
La pieza se desplaza sobre su propio eje la misma cantidad. No hay deformación de flexión cualquiera sea el vínculo.

b)



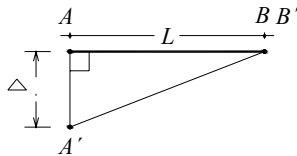
La pieza se desplaza paralelamente a sí misma la misma cantidad. Tampoco hay deformaciones de flexión para este caso, cualesquiera sean las condiciones de apoyo.

c)



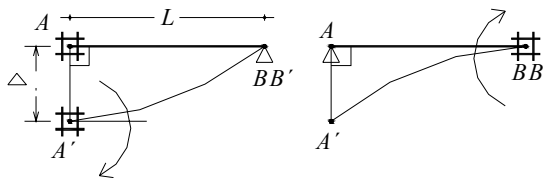
Se desplaza un solo apoyo, por la condición de los vínculos pueden darse varios casos;

c.1)



Ambos apoyos articulados; no hay deformación por flexión.

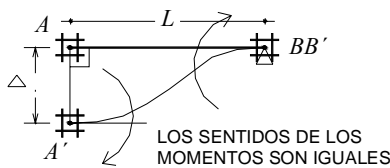
c.2)



Un apoyo impedido de girar y se desplaza uno de los apoyos:

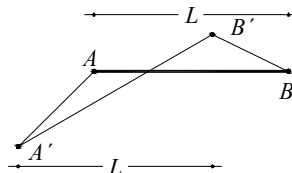
En este caso hay deformación por flexión

c.3)



Los dos apoyos impedidos de girar: En este caso también hay deformación por flexión.

d)



Los dos extremos se desplazan arbitrariamente.

Se puede encarar como la combinación de dos movimientos anteriores: 1) Se desplazan los dos apoyos paralelamente (caso b); 2) Desplazamiento como en el caso c, y pueden darse cualquiera de las tres situaciones, que tiene dos casos en que hay deformaciones por flexión.

De lo descrito anteriormente, pueden extraerse tres reglas para determinar deformaciones en barras con nudos desplazables e impedidos de girar (iniciación del 2º Cross):

1) La deformación Δ se mide sobre una recta perpendicular al eje de la barra en su posición inicial, y el segmento se determina por la proyección, sobre esa recta, de los dos extremos de la barra en su posición deformada.

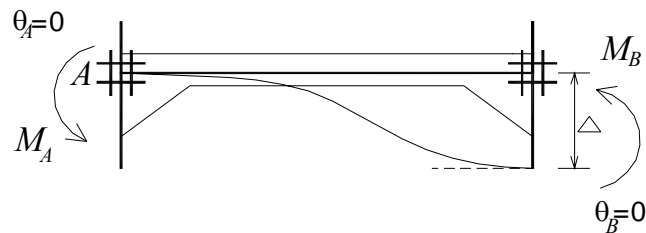
2) La proyección de los extremos del tramo, luego de la deformación, sobre una recta coincidente con el eje de la barra, antes de la deformación, se mantiene igual a L (luz del tramo).

3) En los nudos frenados, (impedidos de girar), luego de la deformación, la tangente a la deformada es paralela o coincide con el eje de la barra, antes de su deformación.

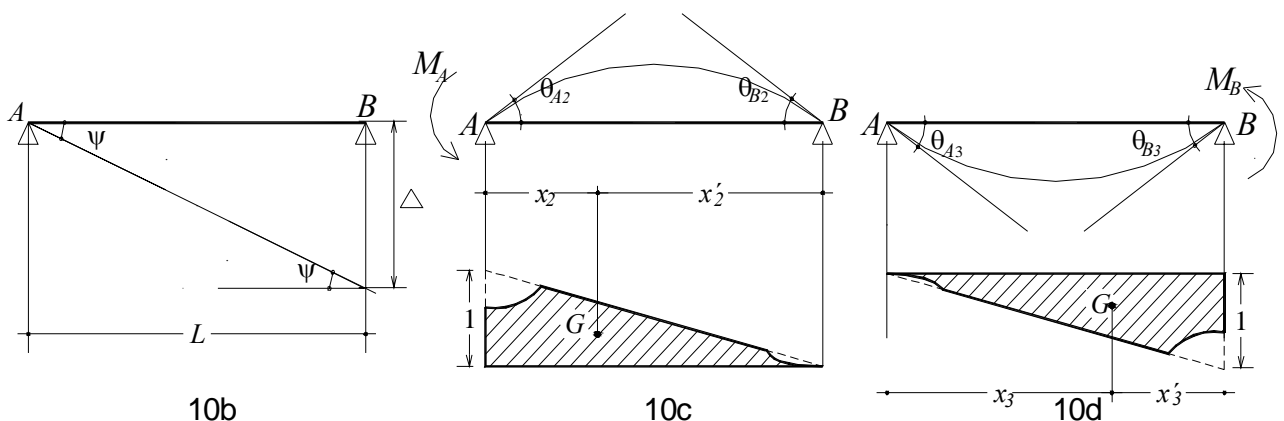
Se verán a continuación los procedimientos para la determinación de momentos freno, con corrimientos de nudos.

1.5.5 Tramo con corrimiento de apoyos y con los dos extremos frenados.

Se aplica superposición de tres casos:



10a



10b

10c

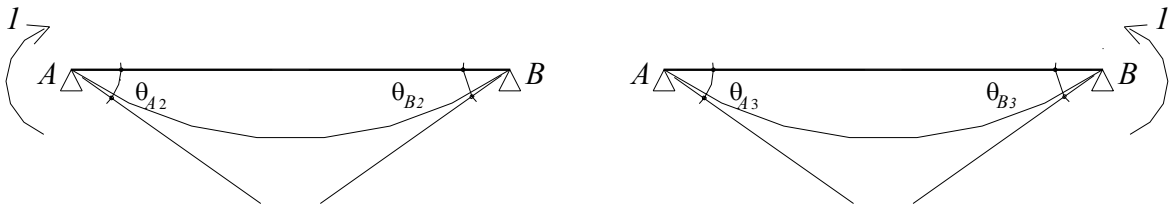
10d

Las expresiones de los giros son:

$$\psi = \frac{\Delta}{L} \quad \theta_{A2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x'_2}{\chi \cdot L^2} \quad \theta_{A3} = \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x'_3}{\chi \cdot L^2}$$

$$\theta_{B2} = \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x_2}{\chi \cdot L^2} \quad \theta_{B3} = \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x_3}{\chi \cdot L^2}$$

A los efectos de facilitar las expresiones, aplicaremos el teorema de la reciprocidad de las deformaciones de BETI-MAXWELL:



El giro del punto de aplicación del primer momento unitario originado por el segundo momento unitario, es igual al giro del punto de aplicación del segundo momento unitario originado por el primer momento unitario.

$$\theta_{A3} = \theta_{B2}$$

De donde se concluye: $A_2 \cdot x_2 = A_3 \cdot x'_3$ (26)

Con esta igualdad podemos plantear nuevamente las expresiones (15) y (19):

$$\beta_{AB} = \frac{x'_3}{x_3} \quad (15')$$

$$\beta_{BA} = \frac{x_2}{x'_2} \quad (19')$$

Los giros en los apoyos son nulos, por lo tanto:

$$\theta_A = \psi - \theta_{A2} + \theta_{A3} = 0$$

$$\frac{\Delta}{L} - \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x'_2}{\chi \cdot L^2} + \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x'_3}{\chi \cdot L^2} = 0 \quad (c)$$

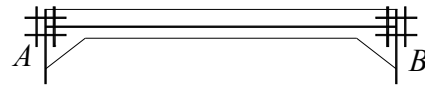
$$\theta_B = \psi + \theta_{B2} - \theta_{B3} = 0$$

$$\frac{\Delta}{L} + \frac{M_A \cdot A_2 \cdot x_2}{\chi \cdot L^2} - \frac{M_B \cdot A_3 \cdot x_3}{\chi \cdot L^2} = 0 \quad (d)$$

Multiplicando (c) por x_3 , (d) por x'_3 , sumando ambas, despejando M_A y multiplicando y dividiendo el segundo término por x_3 :

$$M_A = \frac{\Delta}{L} \chi \frac{L^2(x_3 + x'_3)}{A_2(x'_2 x_3 - x_2 x'_3)} = \frac{\Delta}{L} \chi \frac{L^2}{A_2 \left(x'_2 - x_2 \frac{x'_3}{x_3} \right)} \left(1 + \frac{x'_3}{x_3} \right)$$

$$\boxed{M_A = \frac{\Delta}{L} \chi 4 \alpha_A (1 + \beta_{AB})} \quad (27)$$



Obteniéndose α_A a partir de la ecuación (17).

Multiplicando (c) por x_2 , (d) por x'_2 y operando análogamente:

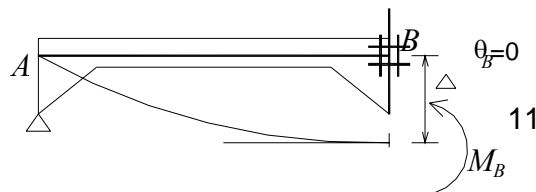
$$\boxed{M_B = \frac{\Delta}{L} \chi 4 \alpha_B (1 + \beta_{BA})} \quad (28)$$

Obteniéndose α_B a partir de la ecuación (21).

Para inercia constante:

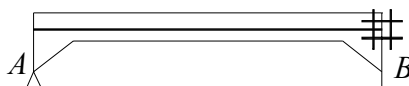
$$M_A = M_B = \frac{\Delta}{L} \cdot \chi \cdot 4 \cdot 1 \cdot (1 + 0.5) \quad \therefore \quad \boxed{M_A = M_B = 6 \cdot \chi \cdot \frac{\Delta}{L}}$$

1.5.6 Tramo con corrimiento de apoyo derecho y con el extremo izquierdo articulado y el derecho frenado.



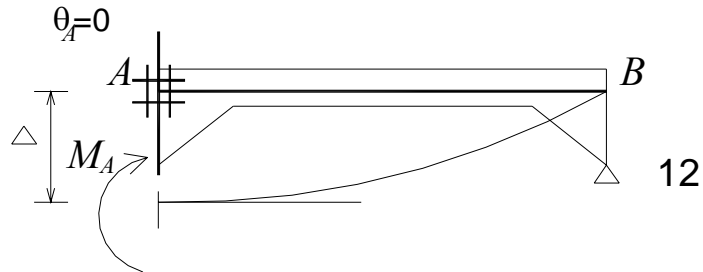
La aplicación de la expresión (28), con $\beta_{BA} = 0$, conduce a:

$$\boxed{M_B = \frac{\Delta}{L} \chi 4 \alpha_B} \quad (29)$$



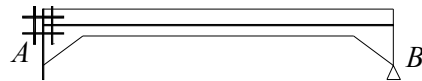
Obteniéndose α_B de la fórmula (13).

1.5.7 Tramo con corrimiento de apoyo izquierdo y con el extremo izquierdo frenado y el derecho articulado.



La aplicación de la expresión (27), con $\beta_{AB} = 0$ conduce a:

$$M_A = \frac{\Delta}{L} \chi 4 \alpha_A \quad (30)$$



Obteniéndose α_A de la fórmula (8).

Para inercia constante:

$$M_A = \frac{\Delta}{L} \chi 4 \cdot 0.75$$

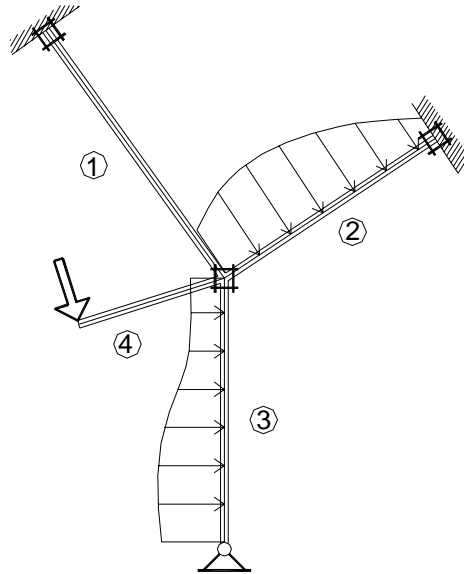
$$M_A = 3 \chi \frac{\Delta}{L}$$

2. REPARTICIÓN

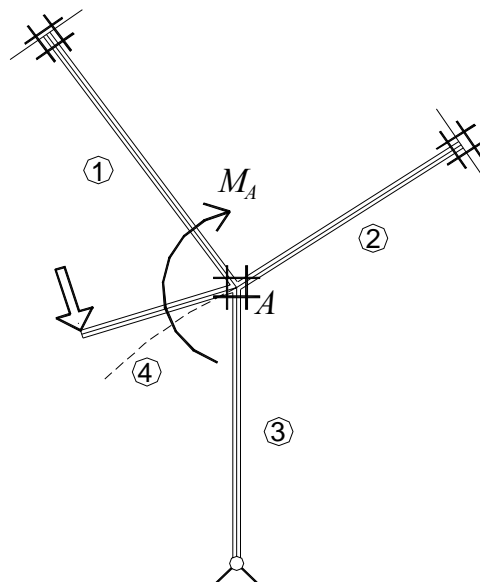
2.1 Hasta este momento, se han estudiado tramos aislados, con cualquier tipo de vínculos, y cualquier tipo de cargas.

A partir de ahora, veremos qué ocurre cuando a un nudo concurren varios tramos, acercándonos a la situación real de una estructura.

En esta parte se definirá el concepto de repartición, y se visualizará el artificio del método de Cross para un ejemplo elemental.



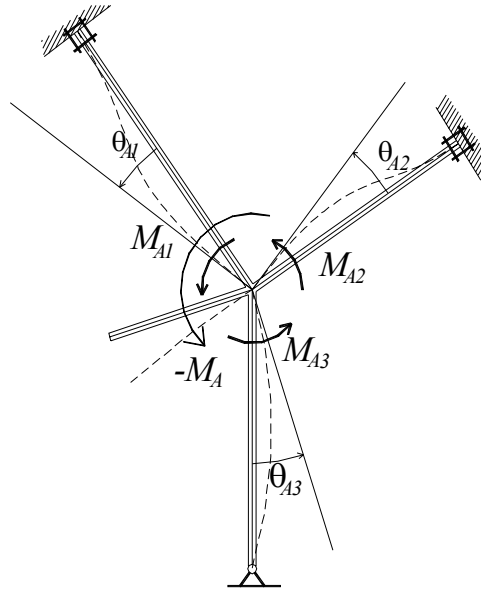
2.2 Supongamos un nudo A, al cual concurren barras con distintos vínculos en su otro extremo, existiendo cargas solamente en la ménsula.



Inmovilizando el nudo A, aparece un momento freno M_A , con el sentido indicado, que producirá giro nulo en los extremos de los tramos.

2.2.1 Si quitamos el freno en A, el nudo gira, produciéndose las deformaciones que se indican, provocadas por $-M_A$.

El problema planteado es determinar el valor de los momentos en el nudo A, de los tramos que concurren al mismo.



Por hipótesis se admite que todos los tramos concurrentes al nudo tienen el mismo giro:

$$\theta_{A1} = \theta_{A2} = \theta_{A3}$$

Siendo la relación entre deformaciones (giros) y causas que las producen (momentos):

$$\theta_{A1} = \frac{M_{A1}}{\gamma_1 \cdot \chi_1} \quad \theta_{A2} = \frac{M_{A2}}{\gamma_2 \cdot \chi_2} \quad \theta_{A3} = \frac{M_{A3}}{\gamma_3 \cdot \chi_3}$$

Por otra parte, el momento en el nudo: $-M_A$, se reparte entre los tramos, debiéndose cumplir:

$$M_{A1} + M_{A2} + M_{A3} = -M_A$$

La ménsula no colabora, pues ante la acción del momento $-M_A$ en el nudo, gira sin oponer resistencia.

De ambas relaciones obtenemos:

$$\frac{M_{A1}}{\gamma_1 \chi_1} = \frac{M_{A2}}{\gamma_2 \chi_2} = \frac{M_{A3}}{\gamma_3 \chi_3} = -\frac{M_A}{\gamma_1 \chi_1 + \gamma_2 \chi_2 + \gamma_3 \chi_3} = -\frac{M_A}{\sum \gamma_i \chi_i}$$

Particularizando al tramo 1:

$$\frac{M_{A1}}{\gamma_1 \chi_1} = -\frac{M_A}{\sum \gamma_i \chi_i}$$

$$M_{A1} = -\frac{\gamma_1 \chi_1}{\sum \gamma_i \chi_i} M_A$$

Y generalizando para un tramo cualquiera:

$$M_{Ai} = -\frac{\gamma_i \chi_i}{\sum \gamma_i \chi_i} M_A$$

Se define coeficiente de repartición al valor:

$$r_i = \frac{\gamma_i \chi_i}{\sum \gamma_i \chi_i}$$

Por lo que:

$$M_{Ai} = -r_i M_A$$

Esta expresión resuelve el problema planteado: la determinación de los momentos M_{Ai} .

A los efectos prácticos, es conveniente simplificar la expresión del coeficiente de repartición:

Dividiendo numerador y denominador entre 4, aparece el valor α y, como generalmente operamos con barras del mismo material, se simplifica el valor E en la expresión de χ .

Resulta entonces:

$$r_i = \frac{\alpha_i \frac{I_{mi}}{L_i}}{\sum \alpha_i \frac{I_{mi}}{L_i}}$$

2.2.2 Otra simplificación sumamente práctica consiste en no operar con los valores de I_m (inercia mínima del tramo) sino con relaciones de inercia.

Se adopta como valor 1 a la menor de las inercias mínimas de los tramos que intervienen con coeficientes de repartición. El valor de las inercias del resto de los tramos estará dado de acuerdo con su relación con el de la inercia mínima.

$$r_i = \frac{\alpha_i \left[\frac{I_{mi}}{\text{menor}I_m} \right] L_i}{\sum \left[\alpha \frac{I_m}{\text{menor}I_m} \frac{L}{L} \right]}$$

De acuerdo a lo ya visto, se debe aclarar que la suma de los coeficientes de repartición de las barras que concurren a un nudo, debe ser igual a 1.00, y que al repartir se debe equilibrar (cambio de signo del momento).

En síntesis, la condición que regula la repartición de un momento no equilibrado, es el hecho que las barras que concurren al mismo nudo, deben girar un mismo ángulo. Entonces, ese momento se debe distribuir en cada barra en proporción al momento necesario para hacer girar cada extremo un mismo ángulo.

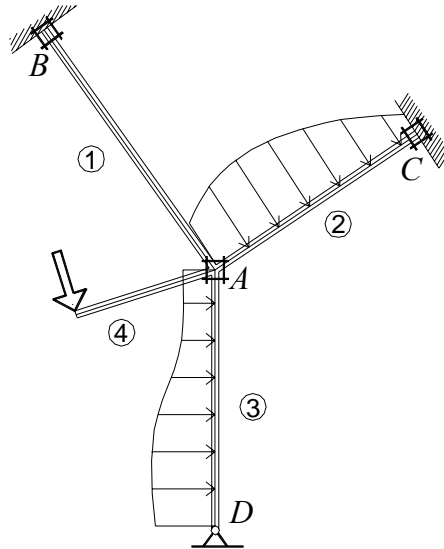
Si la rigidez es el momento que es necesario aplicar al extremo de un tramo para producir un giro unidad, entonces el momento no equilibrado se distribuye entre los tramos concurrentes a un nudo, proporcionalmente a sus rigideces.

2.3 ARTIFICIO DEL METODO DE CROSS APLICADO A UN CASO SENCILLO

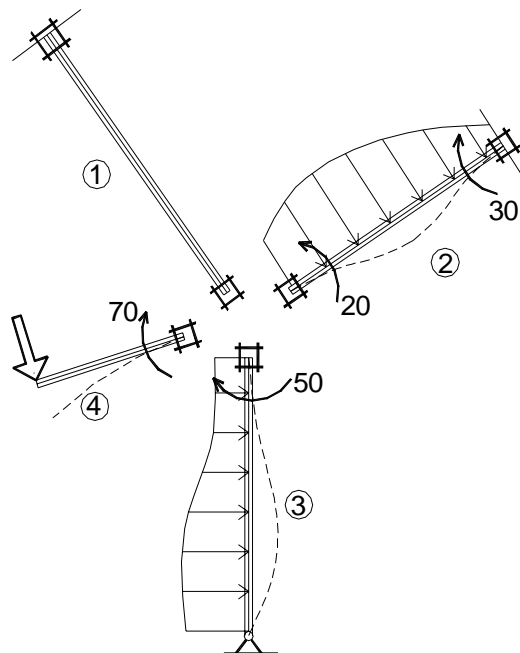
A través de un ejemplo muy sencillo veremos las partes sustanciales del artificio y etapas del Método de Cross.

El proceso se ha exagerado en cuanto a cantidad de secuencias, para facilitar la comprensión del mismo.

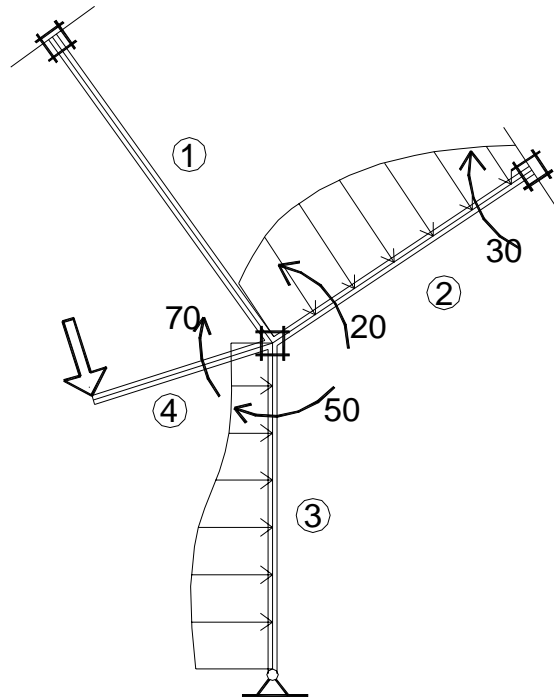
Inicialmente se aplican frenos a los nudos donde concurren tramos con momentos desconocidos, que les impiden girar y desplazarse.



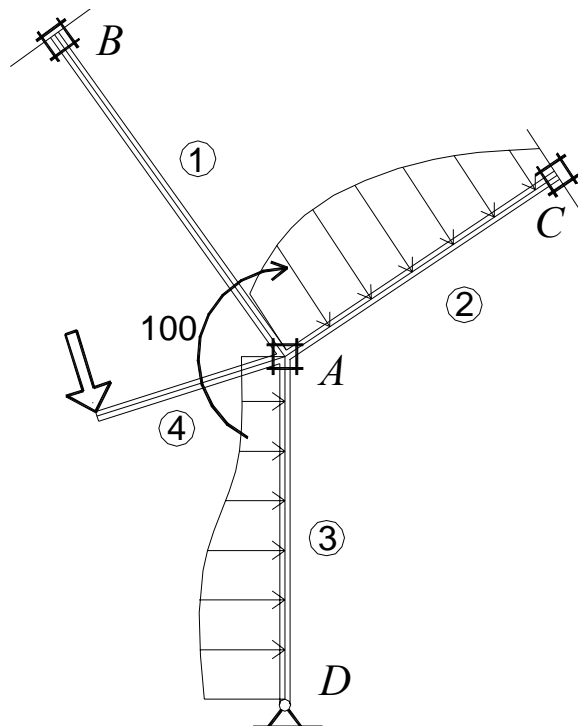
2.3.1 Se aíslan los tramos quedando cada uno de ellos en situación ya estudiada, de extremos con giros nulos (ambos o uno de ellos). Esta es una situación ficticia pero conocida; en etapas sucesivas se va aproximando a la situación de giro real para el nudo. Con las fórmulas ya vistas, (o utilizando valores tabulados), pueden determinarse los momentos frenos (acción del nudo sobre el tramo).



2.3.2 Se unen los tramos disponiendo en los extremos de cada uno los momentos hallados en la etapa anterior.

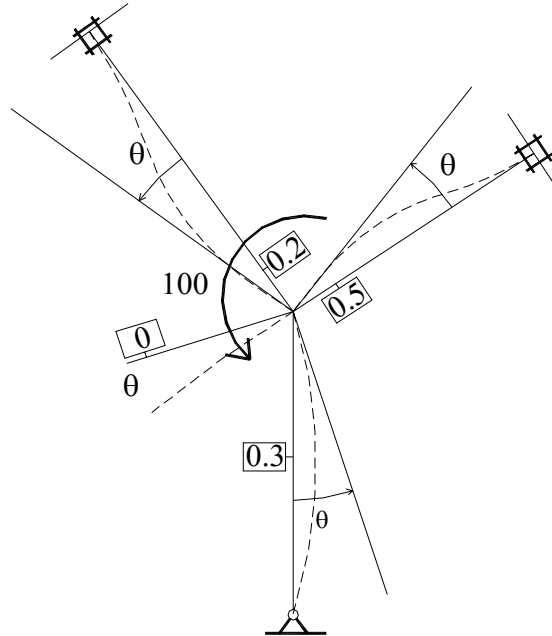


2.3.3 En los nudos en los que existe más de un momento, se procede a la determinación de su valor resultante.

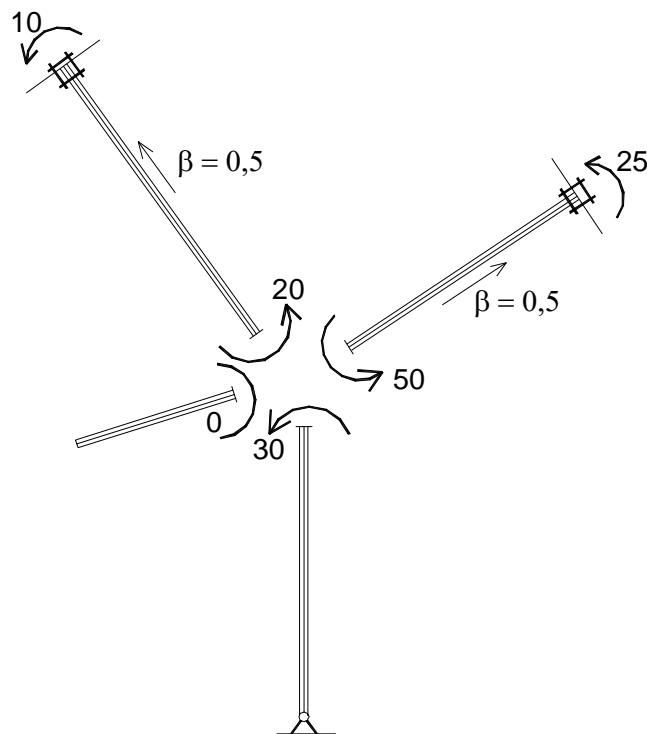


2.3.4 Se determinan los coeficientes de repartición para los extremos de los tramos que concurren al nudo A.

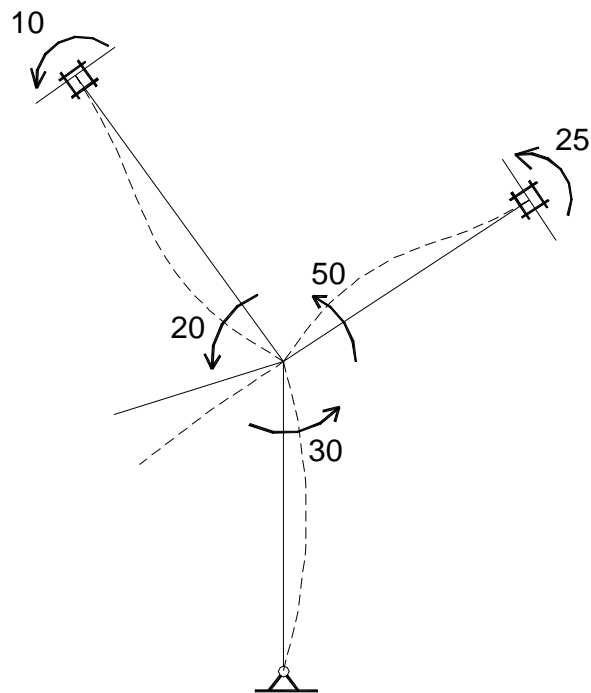
Se quita el freno en el nudo A, y se produce un giro del mismo con sentido contrario al del momento freno.



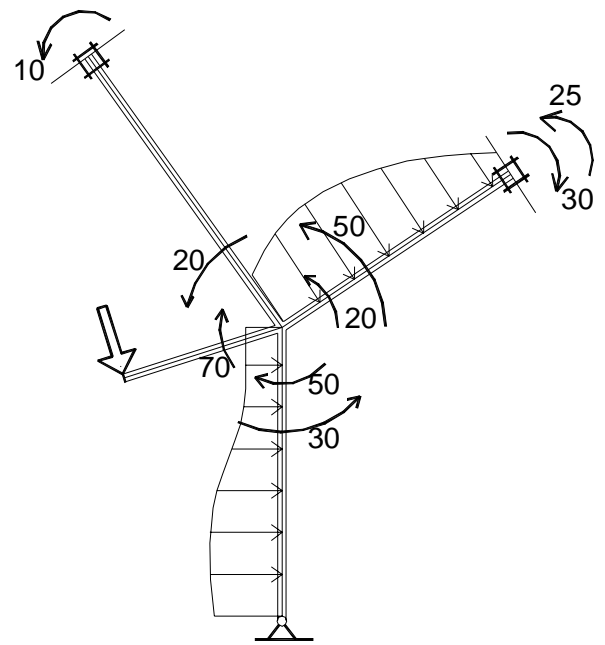
2.3.5 Se reparte el momento entre las distintas barras, de acuerdo al coeficiente de repartición de cada una de ellas. Los momentos repartidos se transmitirán al otro extremo de los tramos, cuando corresponda, es decir, cuando el otro extremo pueda resistir momentos.



2.3.6 Se unen nuevamente los tramos y los valores hallados se disponen en la estructura.

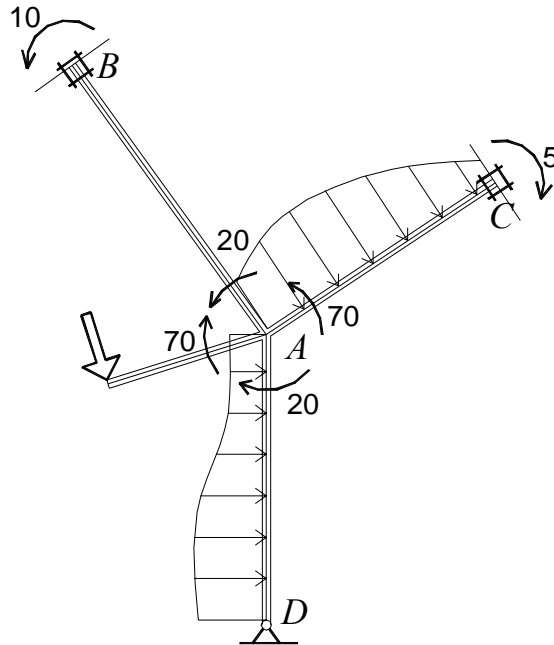


2.3.7 Se superponen los momentos hallados en las etapas 3 (momentos frenos) y 7 (momentos repartidos y transmitidos, que aparecen una vez retirado el freno).

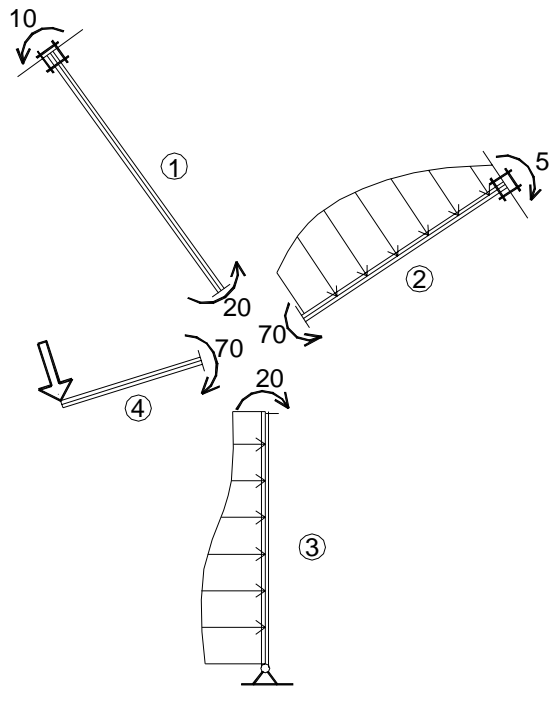


2.3.8 Se suman los momentos que aparecen en cada sección (extremos de tramos). Se hace notar que en el nudo A , donde se colocó el freno inicialmente, existe equilibrio de momentos.

En B y C no se quitará el freno, pues esa es la situación teórica de apoyo de esos extremos.



2.3.9 Se aíslan los tramos, disponiendo los momentos finales obtenidos en 8, iniciándose el estudio de las solicitaciones en todos los tramos, de acuerdo a procedimientos ya conocidos.

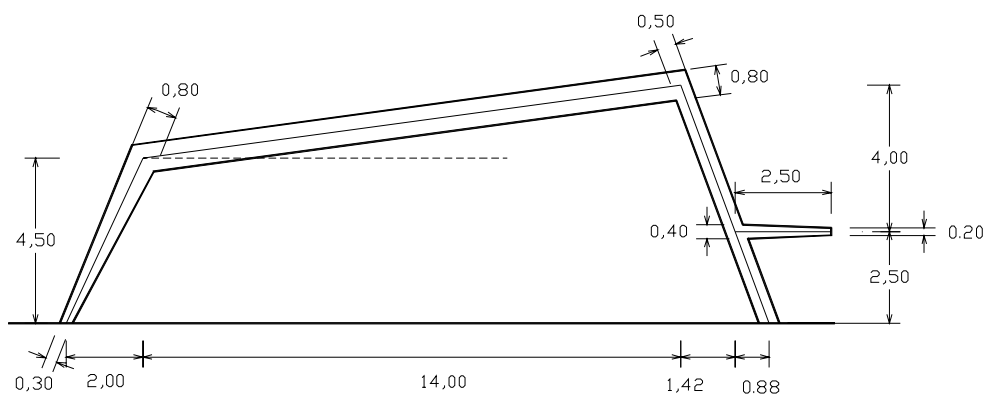


3.1 Ya estamos en condiciones de abordar la solución de una estructura hiperestática más compleja por el Método de Cross.

El procedimiento que se seguirá ahora es resolver un ejemplo concreto, bastante completo, e ir indicando, paso a paso mientras se resuelve el mismo, las distintas secuencias generales del estudio (guión del método).

A su vez, se irán agregando complementos y artificios del método, no vistos hasta ahora (procedimiento del 2º Cross, etc.).

3.2 El objetivo del método es la determinación de momentos en secciones convenientemente elegidas, a partir de los cuales pueden obtenerse las solicitaciones en todos los tramos, así como descargas y reacciones en los apoyos. Para ello debe partirse de una definición formal de la estructura como un dato de partida, ya sea en cuanto a esquema como a forma y dimensiones de todas las secciones.



3.3 Determinación de los coeficientes α y β :

Las expresiones de los valores de α (para determinar coeficientes de repartición) y de β (de transmisión de momentos) para los casos más generales se encuentran en la primera parte de esta publicación.

Para algunos casos particulares de variaciones de inercia, los coeficientes se encuentran en las tablas 5.2.1., 5.2.2., 5.2.3., de la publicación Tablas y Abacos, del I.C. La determinación

de valores se hace en función de la relación de la inercia mínima sobre la máxima del mismo tramo, pues da una relación fácil de abarcar, comprendida entre 0 y 1.

Para relaciones intermedias respecto a las tabuladas, es válida la interpolación lineal, incluso para valores intermedios de las cartelas.

Una vez determinado el coeficiente α (para el nudo), y a los solos efectos de determinar el coeficiente de repartición, la barra se presenta frente a las demás como si fuera de inercia constante con el menor valor.

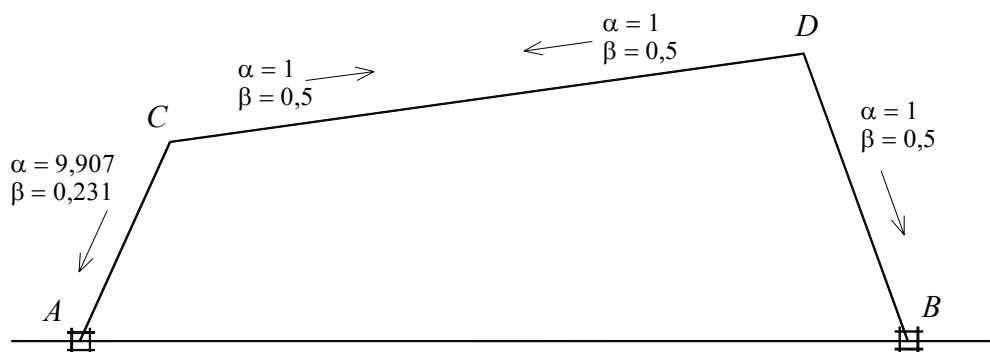
En caso de inercia constante, los valores de β y α son:

- tramo con ambos extremos fijos (o frenados): $\alpha = 1$; $\beta = 0.5$

- tramo con un extremo articulado y el otro fijo: $\alpha = 0.75$

Los valores de estos coeficientes conviene indicarlos sobre el esquema de la estructura.

		CA apoyo con cartela	AC apoyo sin cartela
<u>TRAMO AC</u> tabla II-6	$\frac{I_m}{I_0} = \left(\frac{0.30}{0.80}\right)^3 = 0,053$ $a/L=1$	$\alpha = 9,907$ $\beta = 0,231$	$\alpha = 2,202$ $\beta = 1,041$
<u>TRAMO CD</u>	$I = \text{constante}$	$\alpha = 1$	$\beta = 0,5$
<u>TRAMO DB</u>	$I = \text{constante}$	$\alpha = 1$	$\beta = 0,5$



3.4 Determinación de las rigideces de los tramos y los coeficientes de repartición: para las luces deben tomarse los valores reales de las mismas, no su proyección. Las dimensiones de las secciones se hallan en caso de inercia variable, hasta los extremos del tramo en el esquema.

Los valores de las inercias de las secciones se encuentran en general, en la tabla 2.5., de la publicación Tablas y Abacos. En caso de hormigón armado, la determinación de las inercias se hace considerando la sección total de hormigón sin fisurar, y sin considerar el acero (valor aún desconocido). Si la sección es nervada, la definición de la misma se hace de la siguiente manera:

- sección en L : ancho del ala $be = 2,25 hf + bw$

- sección en T : ancho del ala $be = 6 hf + bw$

debiendo ser el espesor del ala hf mayor o igual a 7 cm para ser considerado.

Por comodidad operativa se aconseja tomar a la menor de las inercias mínimas de los tramos que intervienen con sus rigideces, (es decir, se exceptúan los tramos en cuyos extremos ya se conocen los momentos finales, como por ejemplo, ménsulas), o la inercia del tramo si es de sección constante, como de valor unidad.

Los valores de la inercia de los demás tramos (su inercia mínima si es de sección variable, o la inercia del tramo, si es de sección constante) serán expresados en relación a la unidad, resultando valores iguales o mayores que 1.

Para determinar la inercia del tramo (respecto al que se dió valor unidad), se recomienda plantear la relación con los valores completos de los términos y luego simplificar; no es necesario, pues, determinar los valores reales de las inercias ya que lo que interviene en el coeficiente de repartición es la relación.

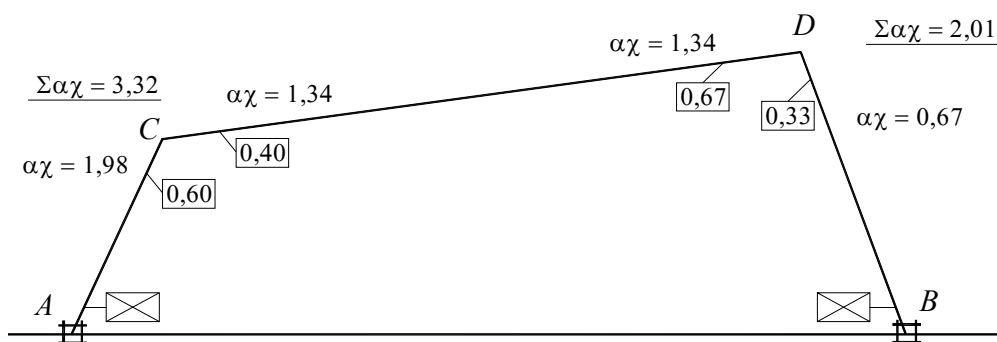
Luego se plantean las sumatorias de las rigideces (multiplicadas por α) en cada nudo, y se hallan los coeficientes de repartición. La sumatoria de los coeficientes de repartición en cada nudo debe valer 1.

Todo este proceso se recomienda hacerlo también en el esquema de la estructura para evitar errores.

$$\text{TRAMO AC} \quad I_1 = 1 \quad L_1 = 4,92 \text{ m} \quad \chi_1 = \frac{1}{4,92} = 0,20$$

$$\text{TRAMO CD} \quad I_2 = \left(\frac{80}{30}\right)^3 = 19 \quad L_2 = 14,14 \text{ m} \quad \chi_2 = \frac{19}{14,14} = 1,34$$

$$\text{TRAMO DB} \quad I_3 = \left(\frac{50}{30}\right)^3 = 4,63 \quad L_3 = 6,89 \text{ m} \quad \chi_3 = \frac{4,63}{6,89} = 0,67$$



$$r_{CA} = \frac{1,98}{3,32} = 0,60$$

$$r_{DC} = \frac{1,34}{2,01} = 0,67$$

$$r_{CD} = \frac{1,34}{3,32} = 0,40$$

$$r_{DB} = \frac{0,67}{2,01} = 0,33$$

3.5 Determinación de los momentos de fijación, o de empotramiento perfecto, provocados por cargas perpendiculares al eje del tramo, o por momentos aplicados en el mismo:

Las expresiones de esos momentos en su forma más general en cuanto a tipo de carga y variación de inercia del tramo, se encuentran en la primera parte de esta publicación.

Para casos especiales de variación de inercia, y ciertos tipos de carga (uniformemente repartida en todo el tramo y concentrada en ciertas secciones) se encuentra el valor fácilmente en las tablas 5.2.1., 5.2.2., 5.2.3., de la publicación Tablas y Abacos, a través de los coeficientes m y \bar{m} .

Si el tramo es de inercia constante, para numerosos casos de carga, las fórmulas se hallan en la tabla 5.1.1. Para inercia constante y ciertas cargas (uniformemente repartida parcial y concentrada) en las tablas 5.1.2., se determinan los valores de los momentos, si no se desea utilizar las expresiones generales de la tabla 5.1.1.

Para los momentos de fijación, acción del nudo sobre la barra, se adoptará, convencionalmente, un signo: (+) para el sentido horario y (-) para el sentido antihorario.

DETERMINACIÓN DE CARGAS.

(Sólo a efectos del p.p.: las barras de I variable se toman con carga uniformemente repartida con su altura promedio).

$$\text{TRAMO AC} \quad pp = \frac{0,30 + 0,80}{2} \times 0,30 \times 2.500 = 413 \quad daN/m \quad tramo$$

$$\text{descarga de la cubierta} = 500 \quad daN/m \quad tramo$$

$$\text{carga total} = 913 \quad daN/m \quad tramo$$

$$\text{TRAMO CD} \quad pp = 0,80 \times 0,30 \times 2.500 = 600 \quad daN/m \quad tramo$$

$$\text{descarga de la cubierta} = 500 \quad daN/m \quad tramo$$

$$\text{carga total} = 1.100 \quad daN/m \quad tramo$$

TRAMO_DB $pp = 0,50 \times 0,30 \times 2.500 = 375 \text{ daN/m tramo}$
 descarga de la cubierta = 500 daN/m tramo
 carga total = 875 daN/m tramo

MENSULA $pp = \frac{0,20 + 0,40}{2} \times 0,30 \times 2.500 = 225 \text{ daN/m tramo}$
 descarga de la cubierta = 500 daN/m tramo
 carga total = 725 daN/m tramo

descarga de la ménsula sobre el tramo.

$$\text{fuerza} = 725 \times 2,50 = 1.813 \text{ daN}$$

$$\text{momento} = \frac{725 \times 2,50^2}{2} = 2.265 \text{ daNm}$$

DETERMINACION DE MOMENTOS DE FIJACION O DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO.

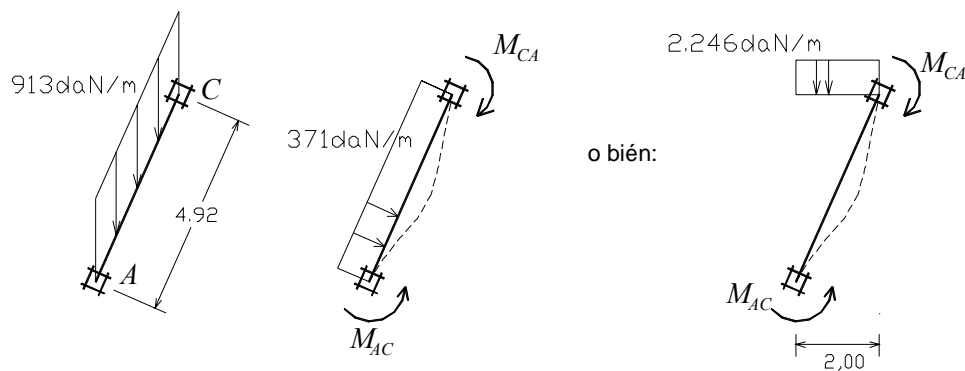
TRAMO_AC $\frac{I_m}{I_0} = \left(\frac{30}{80}\right)^3 = 0,05$

apoyo con cartela

$$m = 0,1402$$

apoyo sin cartela

$$m = 0,0422$$

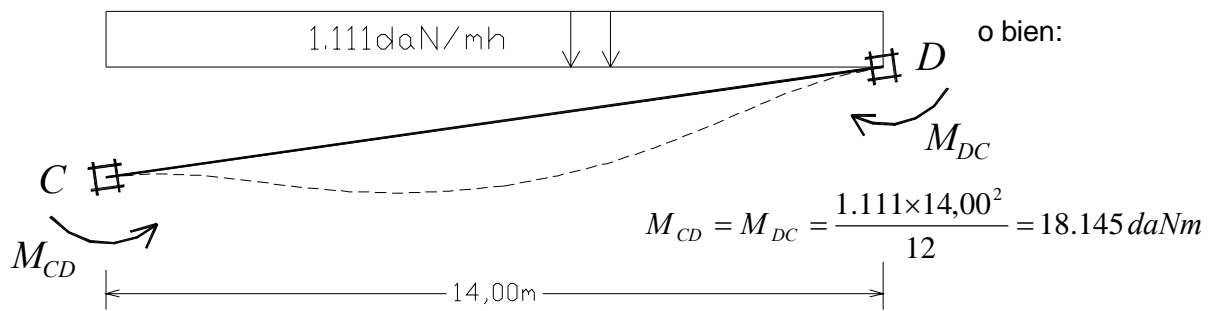
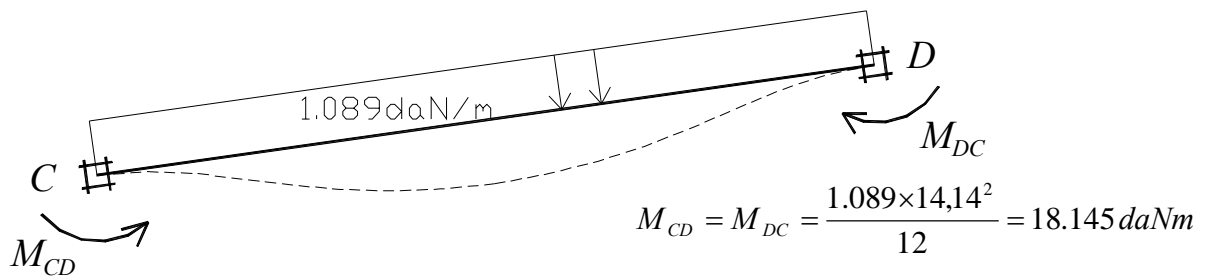
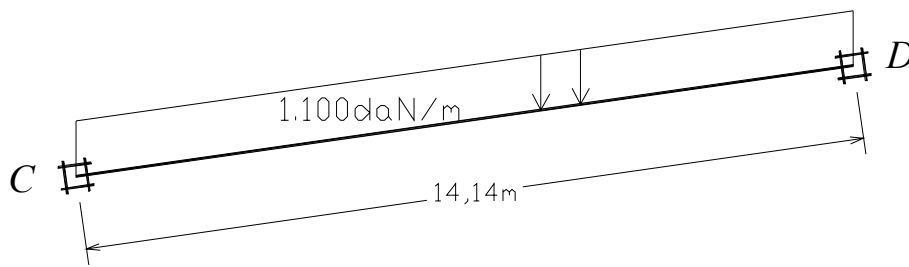
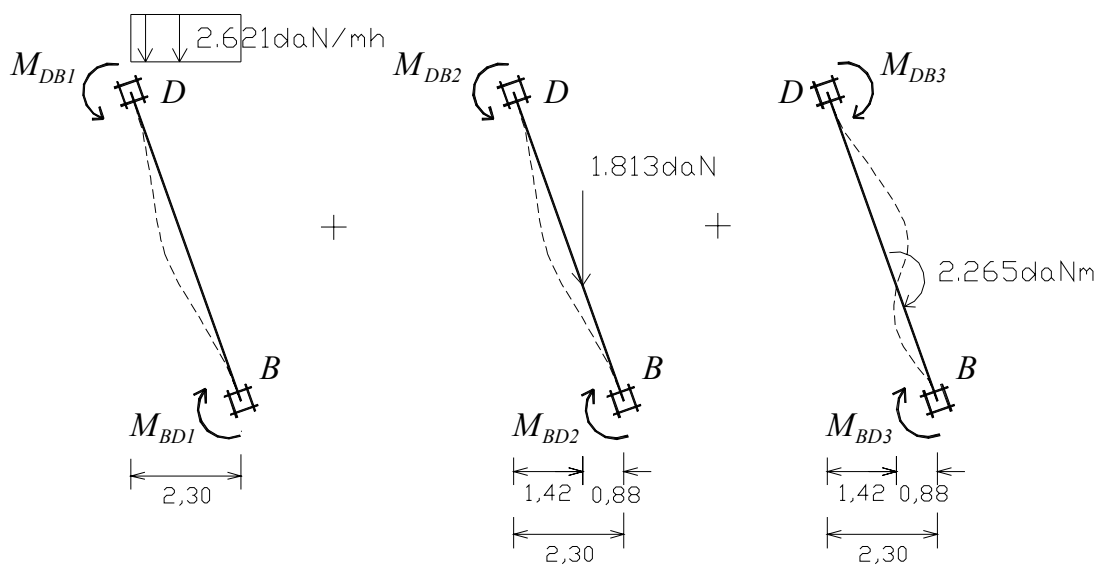


$$M_{CA} = 0,1402 \times 371 \times 4,92^2 = 1.259 \text{ daNm}$$

$$M_{AC} = 0,0422 \times 371 \times 4,92^2 = 379 \text{ daNm}$$

$$M_{CA} = 0,1402 \times 2.246 \times 2,00^2 = 1.259 \text{ daNm}$$

$$M_{AC} = 0,0422 \times 2.246 \times 2,00^2 = 379 \text{ daNm}$$

TRAMO CDTRAMO DB

$$M_{DB_1} = M_{BD_1} = \frac{2.621 \times 2,30^2}{12} = 1.155 \text{ daNm}$$

$$M_{DB_2} = \frac{1.813 \times 1,42 \times 0,88}{2,30^2} \cdot 0,88 = 377 \text{ daNm}$$

$$M_{BD_2} = \frac{1.813 \times 1,42 \times 0,88}{2,30^2} \cdot 1,42 = 608 \text{ daNm}$$

$$M_{DB_3} = \frac{2.265 \times 0,88}{2,30} \left(2 - 3 \frac{0,88}{2,30} \right) = 739 \text{ daNm}$$

$$M_{BD_3} = \frac{2.265 \times 1,42}{2,30} \left(2 - 3 \frac{1,42}{2,30} \right) = 207 \text{ daNm}$$

$$M_{DB} = M_{DB_1} + M_{DB_2} + M_{DB_3} = -1.155 - 377 + 739 = -793 \text{ daNm}$$

$$M_{BD} = M_{BD_1} + M_{BD_2} + M_{BD_3} = +1.155 + 608 + 207 = +1.970 \text{ daNm}$$

3.6 La etapa siguiente consiste en partir de una situación ficticia, pero conocida, de los nudos (o de algunos de ellos). Se colocarán aparatos fijadores que les impida girar y desplazarse, situación que se impondrá solamente a aquellos nudos a los cuales concurren barras con momentos desconocidos en sus extremos, por lo que se hace necesario examinar atentamente la estructura y determinar valores de momentos en los extremos de las barras, cuando sea posible, por procedimientos ya conocidos.

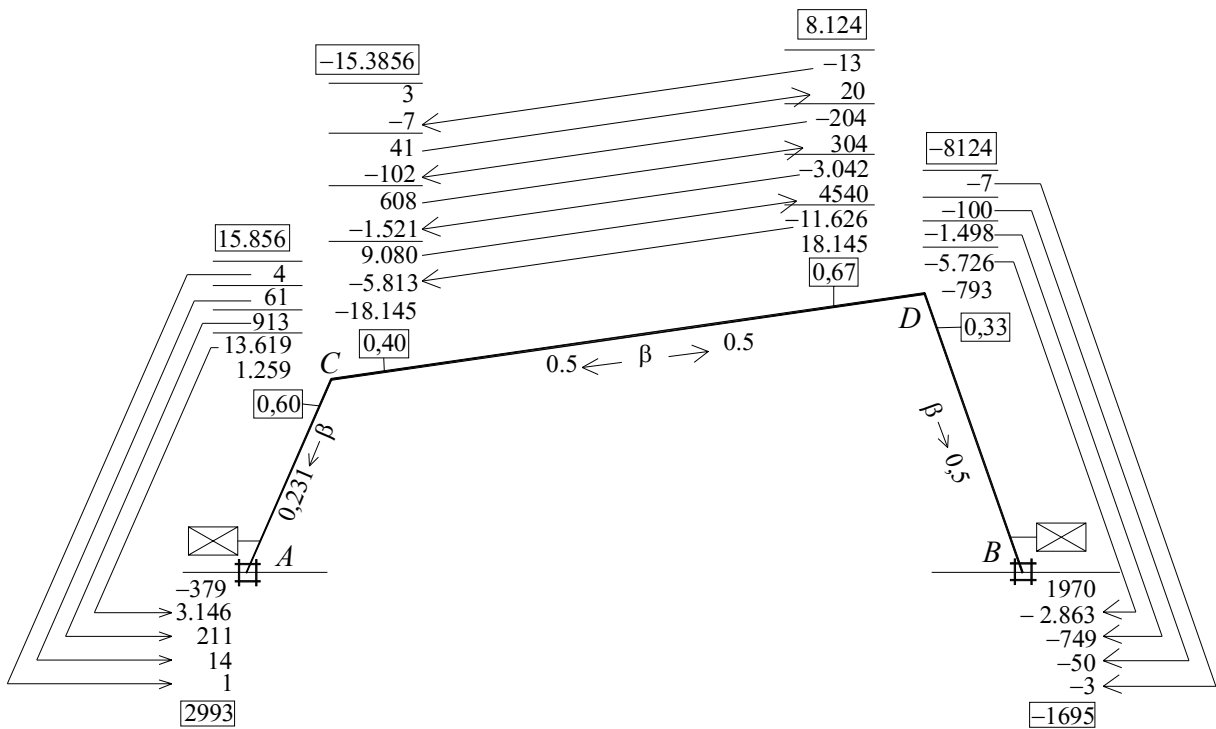
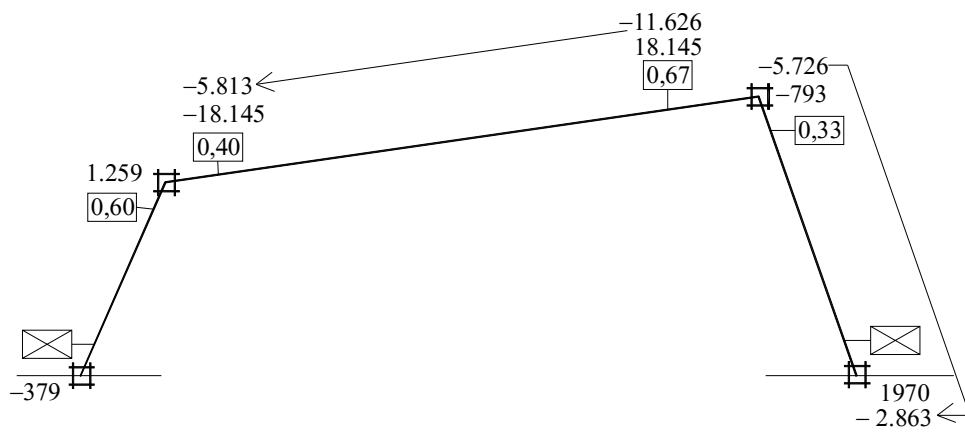
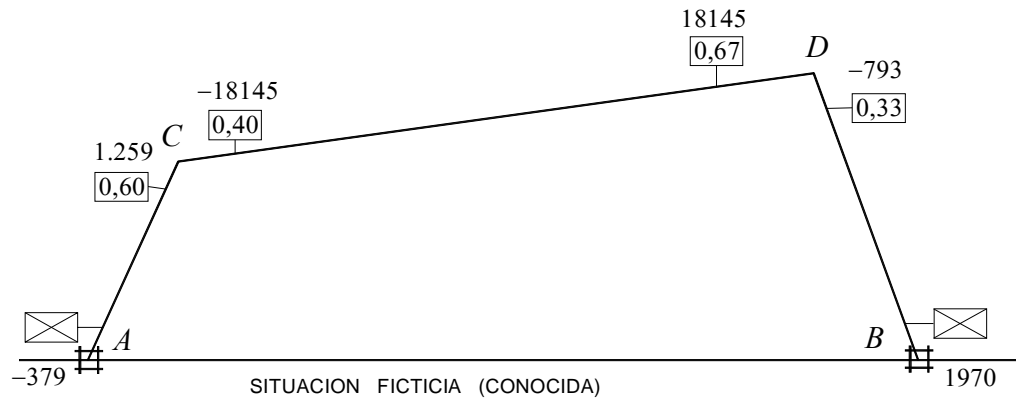
Determinados los momentos de fijación (o de empotramiento perfecto) en los extremos de los tramos que corresponda, se procede a quitar los aparatos fijadores, es decir se les permite girar, a cada nudo por vez, en un cierto orden. Aparecerá un momento desequilibrante; se equilibra repartiendo entre las barras que correspondan, y se transmite a los demás extremos de las barras, cuando corresponda.

Equilibrado el nudo, se vuelve a colocar el aparato fijador y se sigue el mismo proceso en el siguiente nudo frenado, si existe. El proceso se sigue hasta obtener valores de momentos cuya diferencia con el del mismo, en la vuelta anterior, se considera despreciable.

No debe terminarse el proceso con una transmisión, salvo que se realice a un nudo al que no se le quitará el freno.

Terminado el proceso hemos llegado a una posición de los nudos de la estructura en la cual se les ha permitido girar, partiendo de una posición ficta y conocida de impedimento de giro, a través de un proceso de liberación gradual.

Se suman los momentos en los extremos de cada barra, incluyendo los de fijación iniciales, debiendo existir equilibrio en cada nudo. El proceso descrito se conoce como 1º Cross, y es conveniente realizarlo sobre el esquema de la estructura.



3.7 Se estudia cada tramo aislado con las cargas actuantes y los momentos hallados en (3.6 momentos del 1° Cross), y se determinan las descargas en los extremos de los tramos.

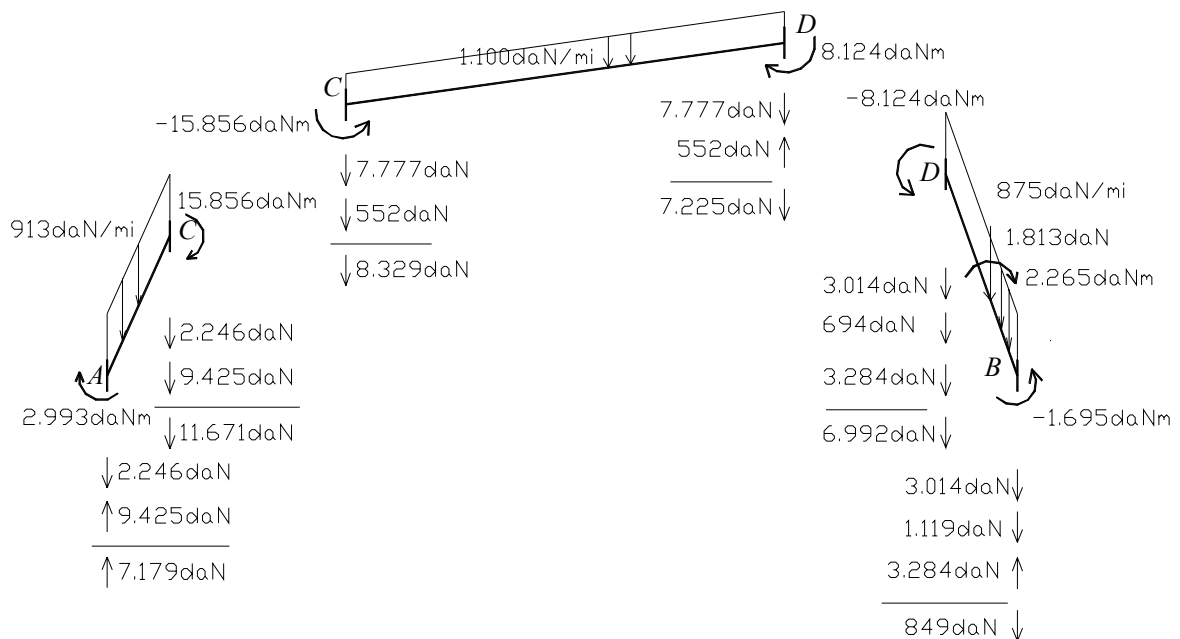
Se aconseja el siguiente procedimiento, válido en la mayoría de los casos:

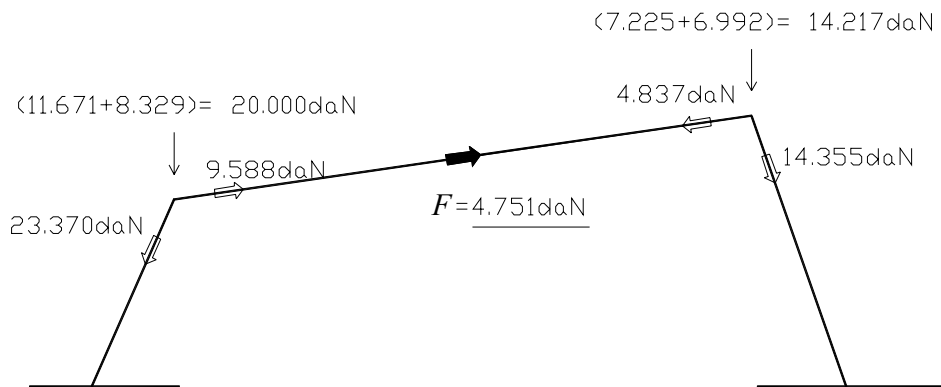
- si la barra no es vertical, descargar según verticales;
- si la barra es vertical, descargar según horizontales.

Logradas esas descargas, se suman en cada nudo, y se descomponen en caminos materiales, intentando llevarlas a los apoyos, donde deben encontrar su equilibrio. Pueden darse dos casos:

A) Por caminos materiales, todas las descargas o van hacia los apoyos de la estructura o se equilibran a través de barras, solicitando axialmente las barras que transitan. Entonces, los momentos hallados en (3.6) son los definitivos en los extremos de los tramos, y corresponde hallar los diagramas de sollicitaciones, de acuerdo a la parte (3.12), que se verá más adelante.

B) Hay fuerzas que, por caminos materiales, no se pueden transmitir a los apoyos o equilibrar a través de las barras. Entonces se producirán deformaciones por flexión que afectarán los momentos hallados en (3.6). A las fuerzas causantes de esa situación se les denomina fuerzas F de desviación. En esta situación corresponde cumplir la etapa siguiente.



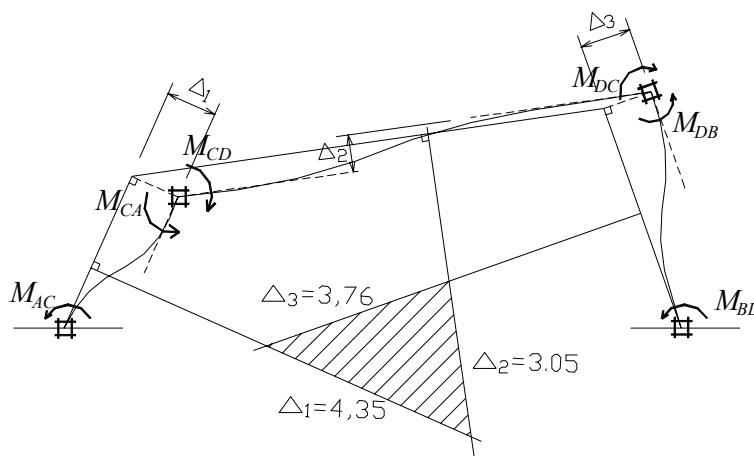


3.8 Planteada la estructura bajo la acción solamente de la(s) fuerza(s) de desviación, se hace un trazado de la deformada con los nudos frenados, sin giro, pero con posibilidad de desplazamientos. Los desplazamientos de los nudos de cada barra son perpendiculares a su eje (ver los casos posibles en la primera parte de esta publicación).

Se plantean las relaciones entre los desplazamientos de los nudos. En general esa relación se hará a través de un triángulo, pudiendo darse como caso particular bastante frecuente, un segmento de recta.

Se plantean momentos de fijación ficticios en los nudos que correspondan, pero relacionados correctamente entre sí. Pueden seguirse dos procedimientos: dar un valor arbitrario a un momento, o a un desplazamiento.

Con estos momentos se procede de igual manera a lo indicado en la etapa (3.6). Este proceso se llama 2º Cross.



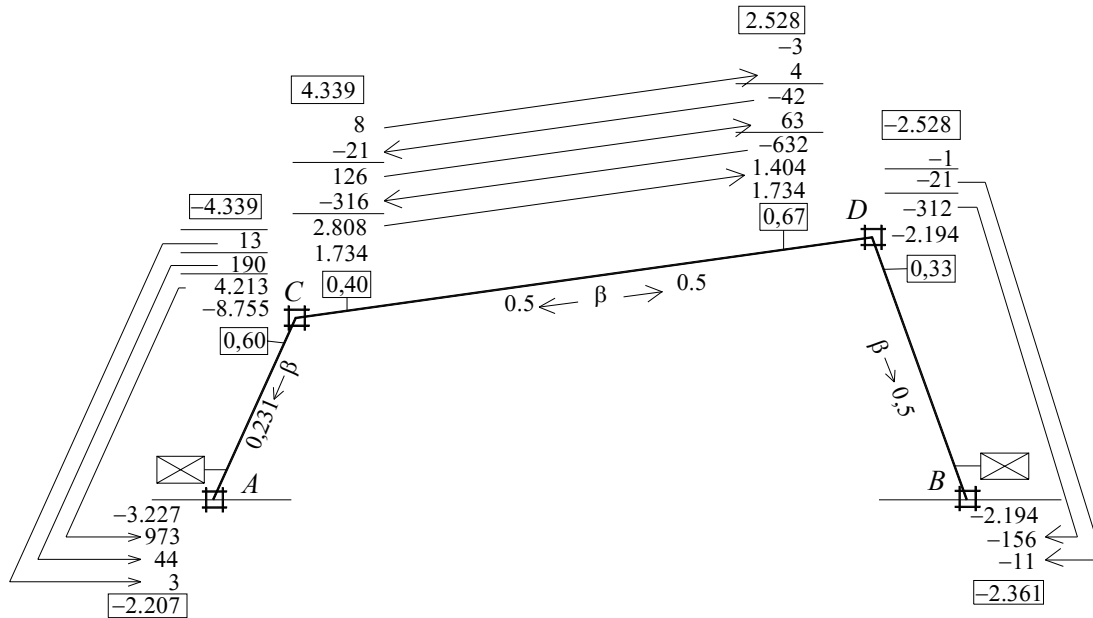
$$M_{AC} = 4 \cdot \alpha_{AC} (1 + \beta_{AC}) \chi_1 \cdot \frac{\Delta_1}{L_1} = 4 \times 2,202 (1 + 1,041) 0,203 \cdot \frac{4,35}{4,92} = 3,227$$

$$M_{CA} = 4 \cdot \alpha_{CA} (1 + \beta_{CA}) \chi_1 \cdot \frac{\Delta_1}{L_1} = 4 \times 9,907 (1 + 0,231) 0,203 \cdot \frac{4,35}{4,92} = 8,755$$

$$M_{CD} = M_{DC} = 6 \chi_2 \cdot \frac{\Delta_2}{L_2} = 6 \times 1,34 \cdot \frac{3,05}{14,14} = 1,734$$

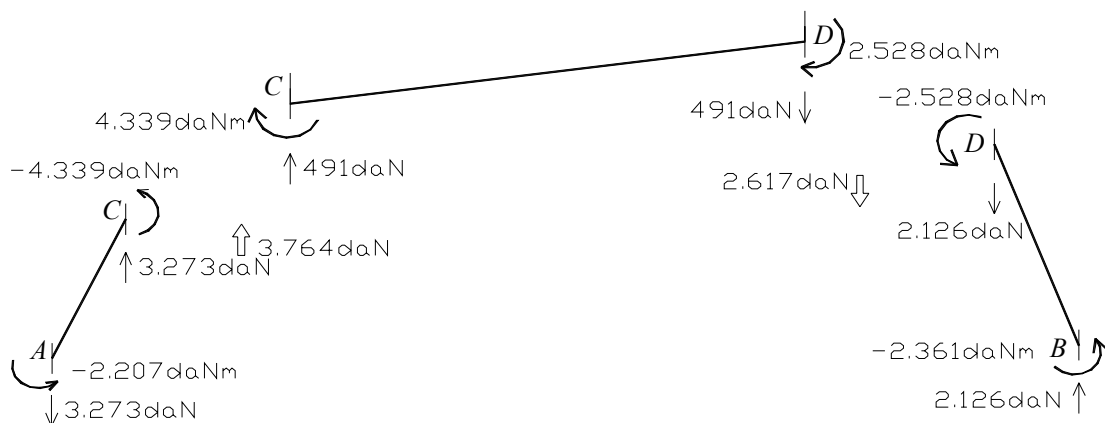
$$M_{DB} = M_{BD} = 6 \chi_3 \cdot \frac{\Delta_3}{L_3} = 6 \times 0,67 \cdot \frac{3,76}{6,89} = 2,194$$

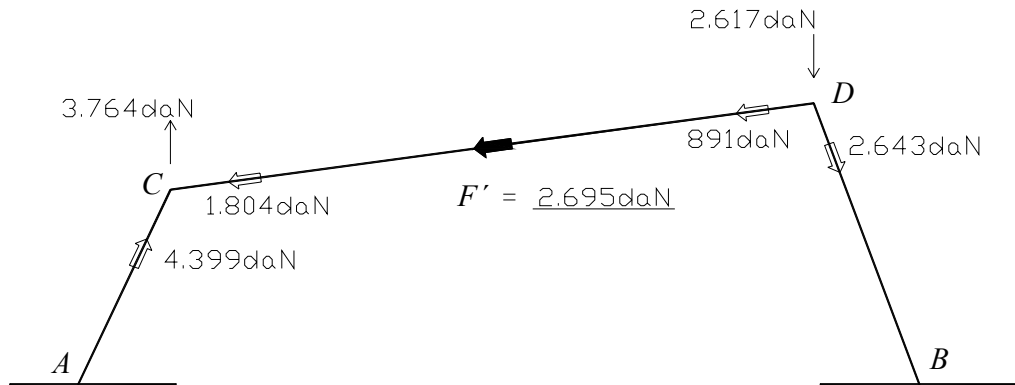
Multiplicamos los valores obtenidos por 1000, de manera de mantener la proporción entre ellos y obtener valores más cómodos para trabajar.



3.9 Se plantean las descargas en los nudos con las mismas consideraciones vistas en (3.7), pero sin las cargas exteriores, solamente con los momentos en los extremos de las barras hallados en (3.8).

Se deberá llegar a una fuerza de desviación F' cuyo valor no será igual al hallado en (3.7), pero de la misma dirección y sentido contrario.





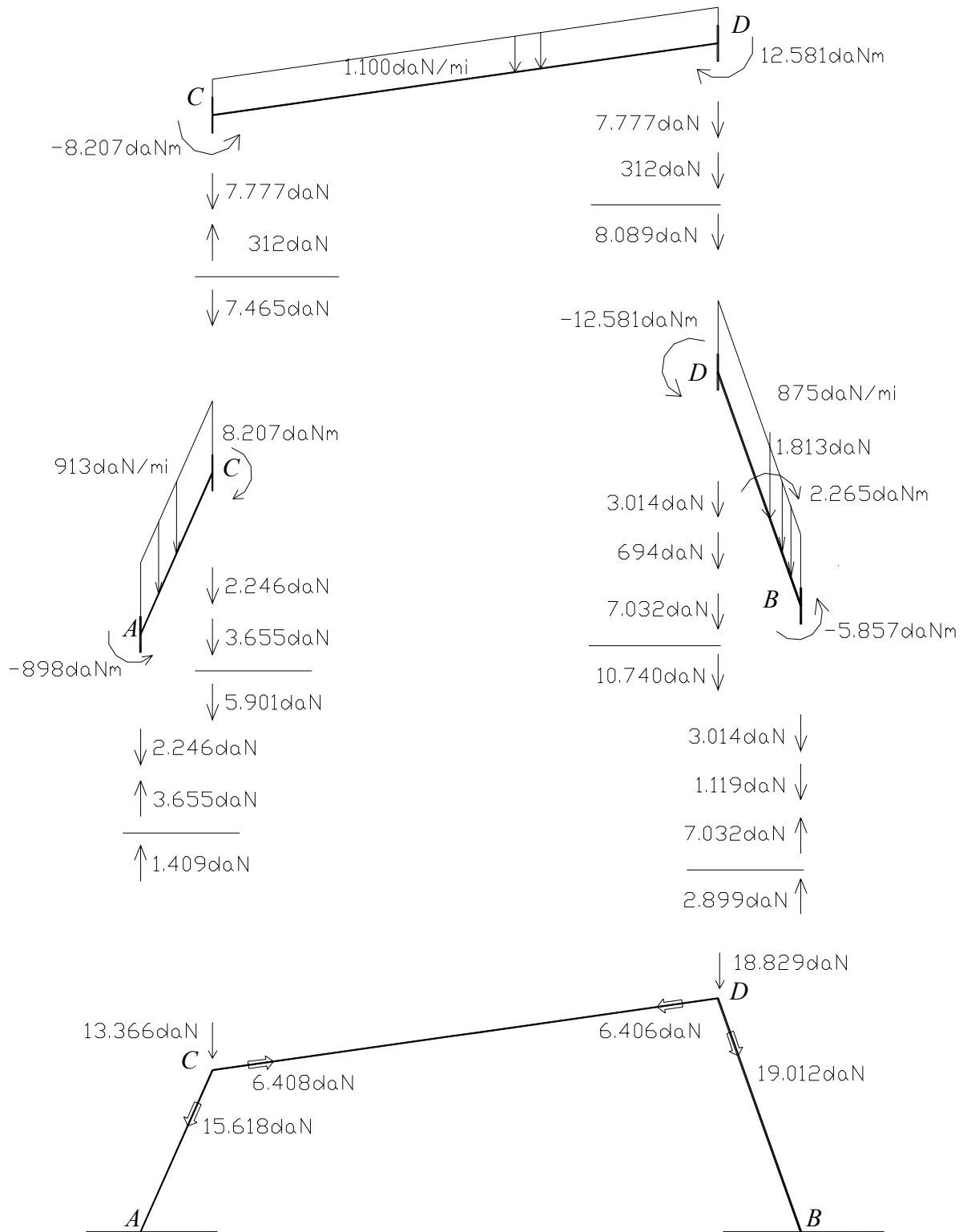
3.10 Se halla la relación $\alpha = F/F'$, y se multiplican los momentos hallados en (3.8) por α . Estos momentos se suman a los hallados al terminar el proceso del 1º Cross, en (3.6), obteniéndose los momentos finales, que era el objetivo del método, en los extremos de los tramos.

$$\alpha = \frac{F}{F'} = \frac{4.751}{2.695} = 1,76$$

M (1er. CROSS)	αM (2do. CROSS)	M . FINALES.
$M_{AC} = 2.993$	+ 1,76 (-2.207) =	-898 daNm
$M_{CA} = 15.856$	+ 1,76 (-4.339) =	8.207 daNm
$M_{CD} = -15.856$	+ 1,76 (4.339) =	-8.207 daNm
$M_{DC} = 8.124$	+ 1,76 (2.528) =	12.581 daNm
$M_{DB} = -8.124$	+ 1,76 (-2.528) =	-12.581 daNm
$M_{BD} = -1.695$	+ 1,76 (-2.361) =	-5.857 daNm

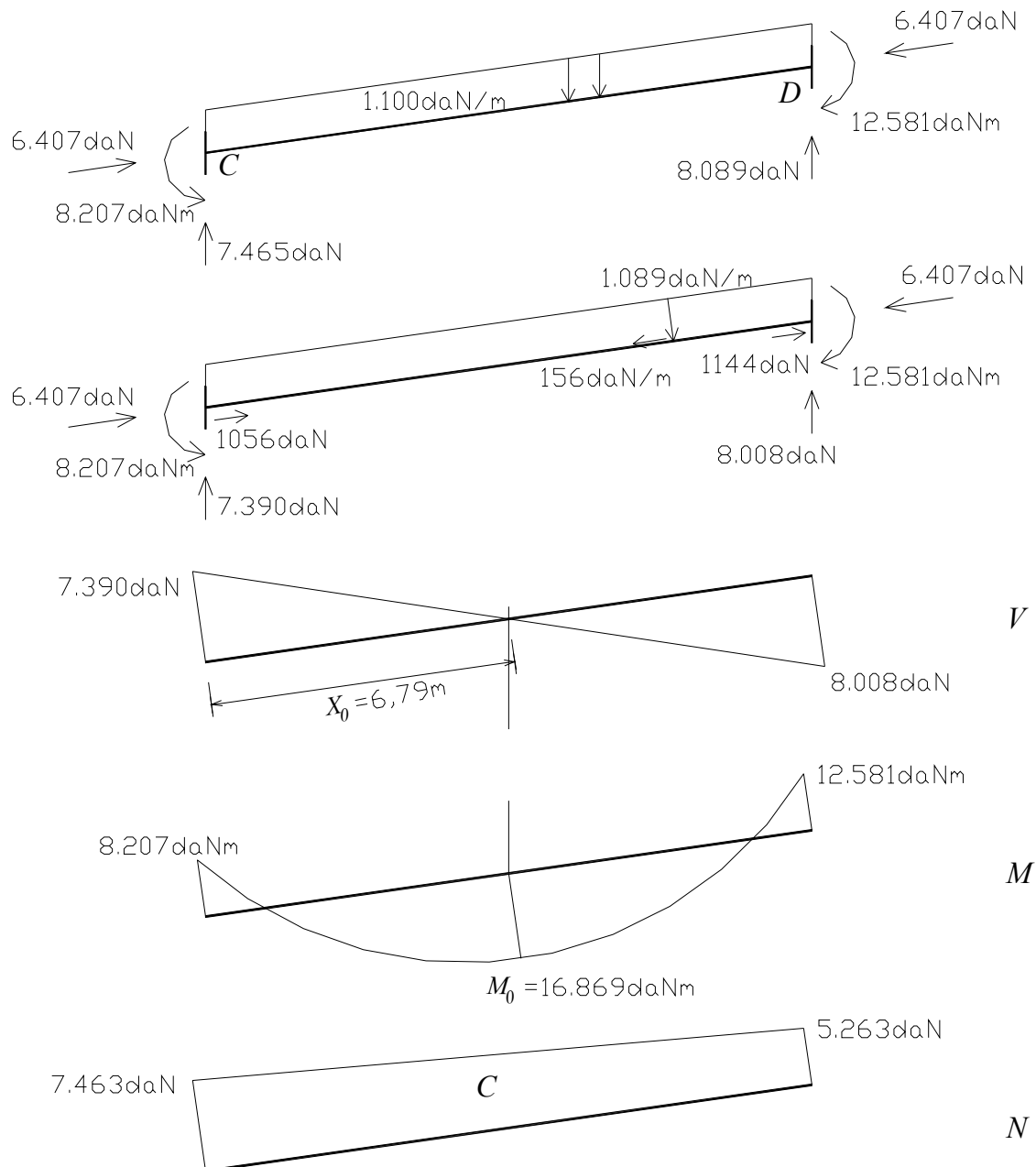
3.11 Con los momentos finales hallados en (3.10), se plantean las descargas finales en los nudos (con las cargas exteriores actuantes y esos momentos finales). Se puede proceder también por superposición: los hallados en (3.9) multiplicados por α , más las descargas halladas en (3.7).

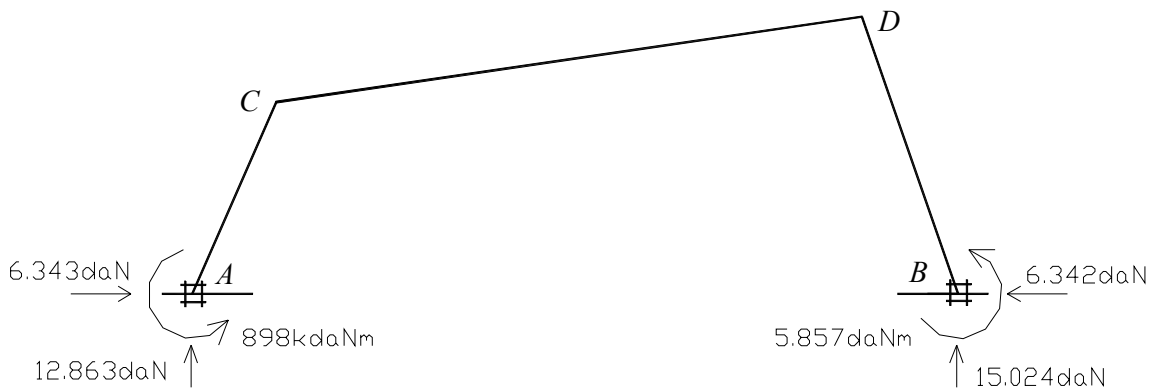
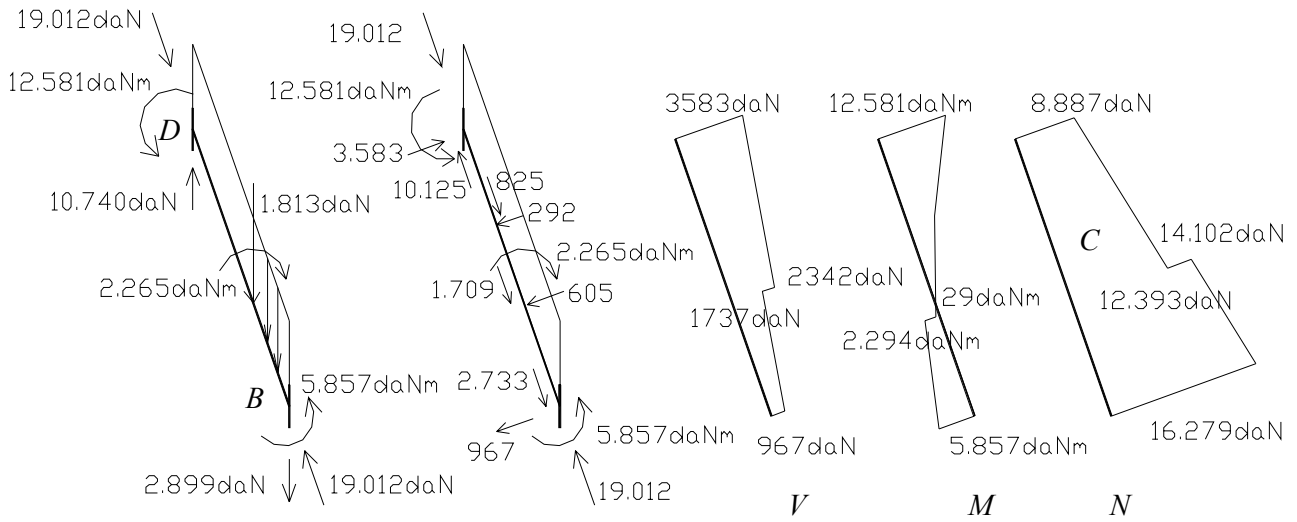
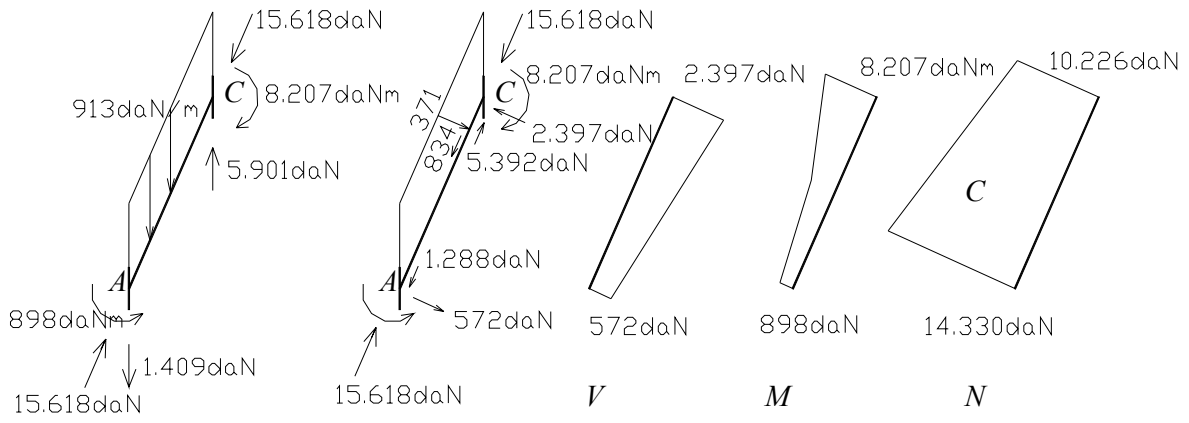
Finalmente, al plantear la transmisión de carga a los apoyos, no debe existir fuerza de desviación; debe darse equilibrio a través de los apoyos de la estructura o a través de las barras.



3.12 Se plantea la situación de cada tramo aislado y en equilibrio, con las acciones exteriores, los momentos finales en los extremos de las barras, los axiles que transitan por la misma, y con las iguales y contrarias a las descargas de los tramos.

Planteado el tramo de ese modo resultará fácil determinar los diagramas de solicitaciones (momento flector, esfuerzo axial y cortante) de acuerdo a lo ya conocido.

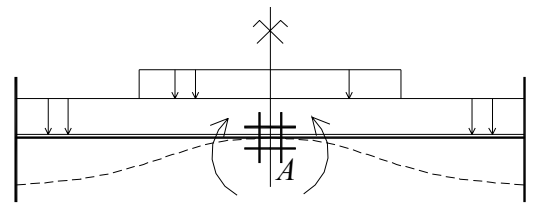




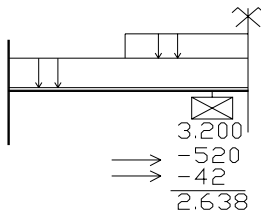
4. CASOS DE SIMETRÍA.

En estructuras simétricas (de forma, de carga, de esquema, etc.) el procedimiento de Cross se simplifica notablemente, por lo cual se analizarán a continuación las dos situaciones que puede presentarse.

4.1 Eje de simetría por un nudo.

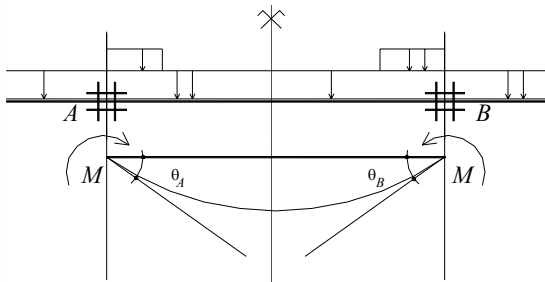


Los momentos freno son iguales, pero de sentidos contrarios y, a cada lado del apoyo llegarán momentos transmitidos, desde el otro extremo de cada tramo, iguales, pero también de sentido contrario.



Por tanto, se puede estudiar media estructura quedando el nudo central en condición de frenado siempre, y el momento en ese extremo es el inicial (de empotramiento perfecto) más los transmitidos.

4.2 Eje de simetría por el tramo.



En A y B aparecerán momentos iguales pero de sentido contrario, siendo ambos ángulos de giro también iguales y con sentidos contrarios.

La expresión del momento en un apoyo es, en general:

$$M = \gamma \cdot \chi \cdot \theta \quad \text{Expresión (7) – pág. 6.}$$

Si trabajamos con media estructura (por ejemplo, la parte izquierda), cuando expresemos el valor del momento en A debemos incluir la influencia del momento en B .

Expresión(14)-pág.8.

Por tanto:
$$M_A = \theta_A \cdot \gamma_A \cdot \chi + \beta(\theta_B \cdot \gamma_B \cdot \chi)$$

Por simetría:
$$\gamma_A = \gamma_B \quad , \text{ y por lo ya visto: } \theta_A = -\theta_B$$

$$M_A = (1 - \beta) \gamma_A \cdot \chi \cdot \theta_A$$

Esto significa que podemos operar con media estructura, siempre que en el tramo central se afecte su rigidez (para determinar los coeficientes de repartición) por el valor $(1-\beta)$.

En inercia constante: $(1-\beta) = 0,5$.

Los demás valores, momentos de empotramiento perfecto, etc. debe determinarse con la luz real del tramo.

A continuación se estudia un ejemplo en donde se presentan ambos casos de simetría.

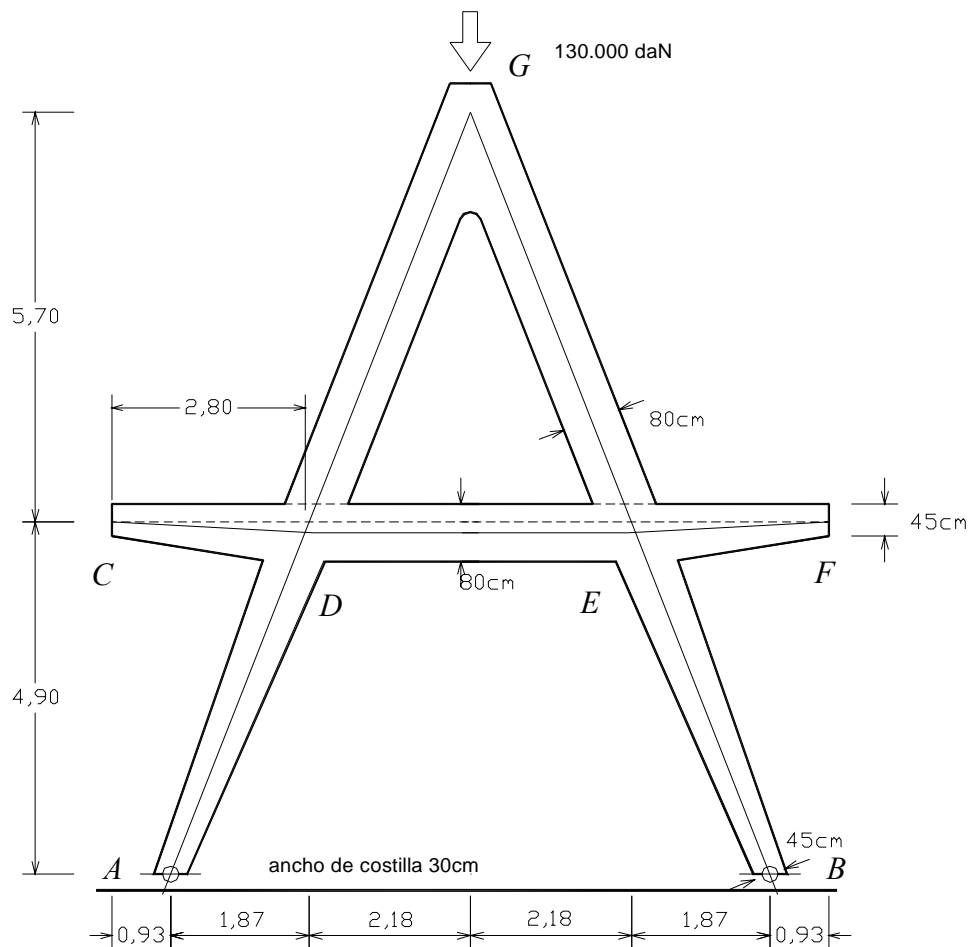
Atención: para hacer las descargas por caminos materiales conviene trabajar con la estructura completa.

4.3 HALL DE EXPOSICIONES DE LA TOKYO INTERNACIONAL TRADE CENTER CORPORATION, TOKYO, JAPON.

(documento: BAUEN IN STAHL 2,pág.107).

Se estudiará una de las costillas de hormigón armado que, ubicadas a distancias iguales, sostienen el entrepiso para público y el techo metálico.

El entrepiso está formado por una losa nervada de doble carpeta (5cm c/u), cuyos moldes llegan hasta la costilla y descarga, en total, 8.000 daN/m. El techo descarga una acción concentrada, en G, de 130.000 daN.



$I=5,62$

$\alpha\chi = \frac{5,62}{6,10} = 0,921$

$p_i = 600 \text{ daN/m}$

$p_h = 1.679 \text{ daN/m}$

$\frac{I_m}{I_o} = \left(\frac{45}{80}\right)^3 = 0,178$

$m = 0,159$

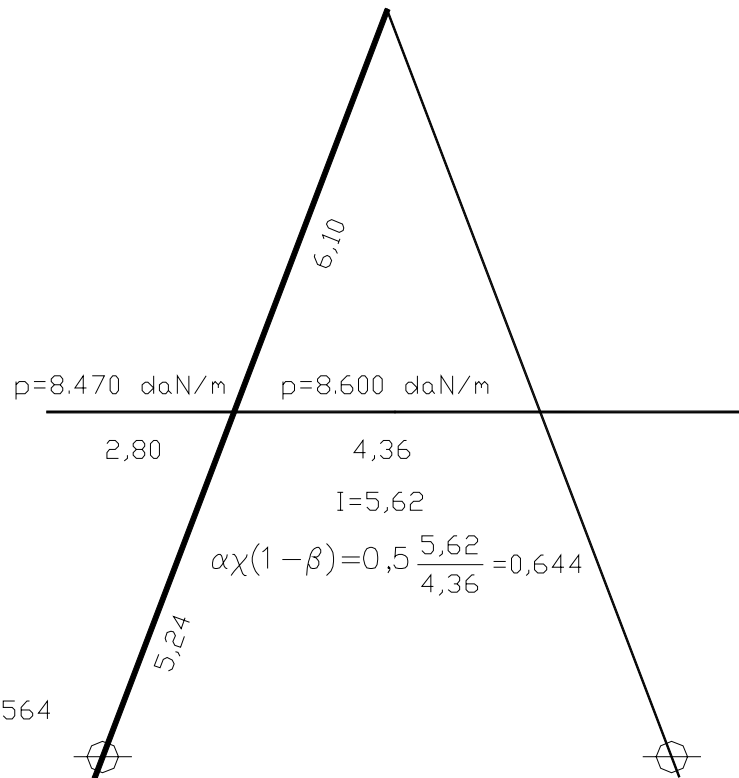
$\alpha = 2,955$

$I=1$

$\alpha\chi = 2,955 \frac{1}{5,24} = 0,564$

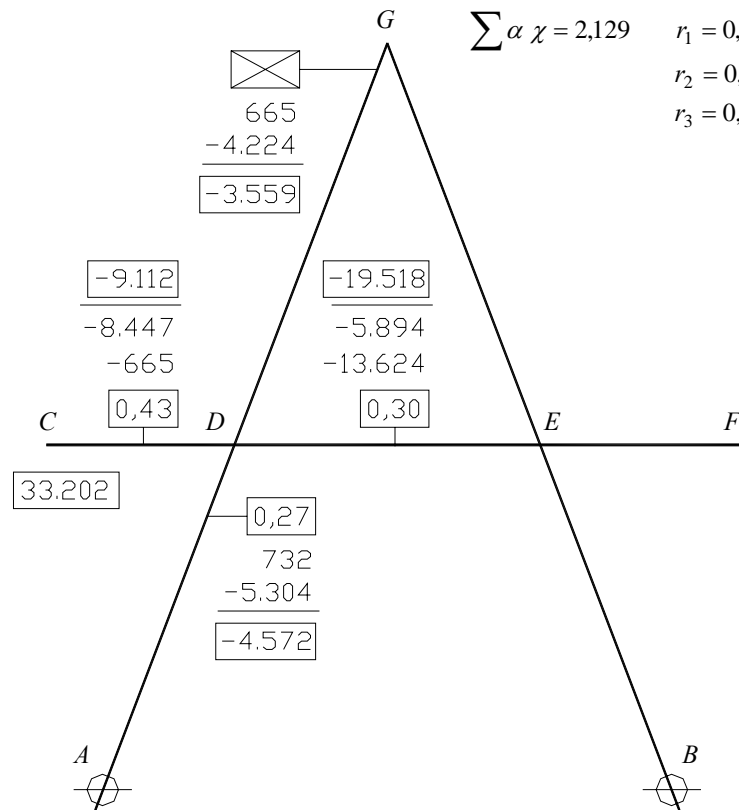
$q_i = 470 \text{ daN/m}$

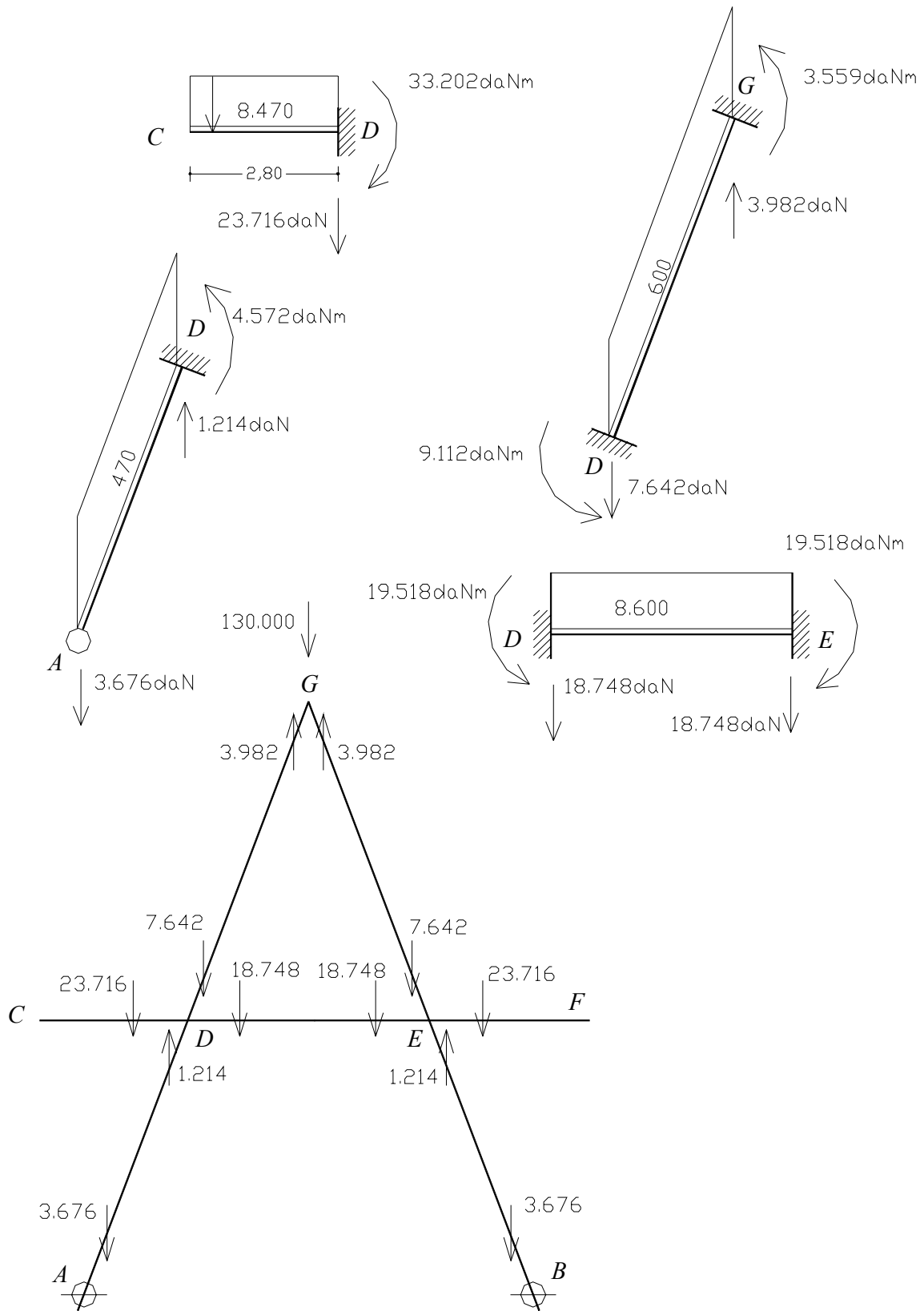
$q_h = 1.317 \text{ daN/m}$

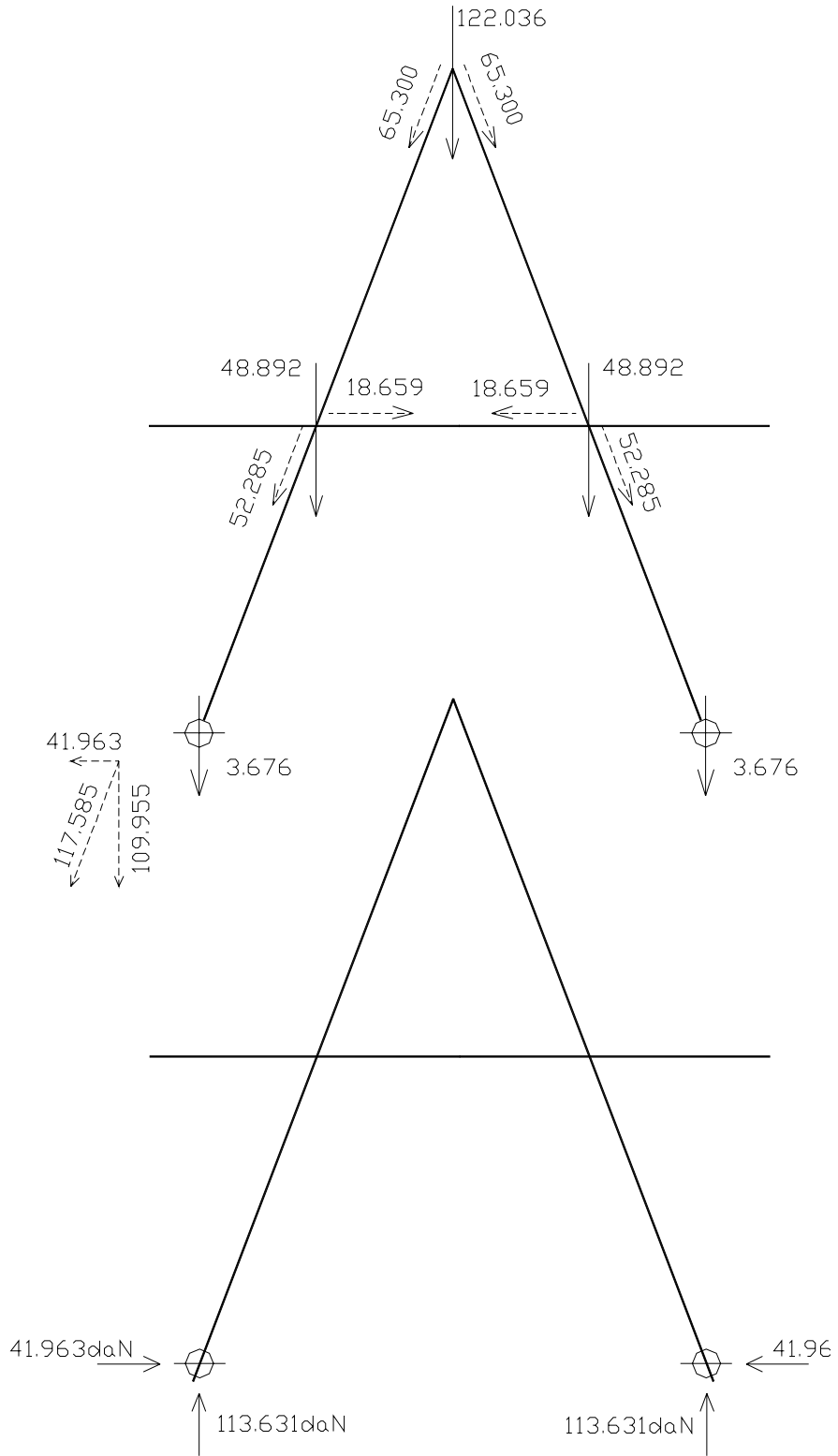


$\alpha\chi(1-\beta) = 0,5 \frac{5,62}{4,36} = 0,644$

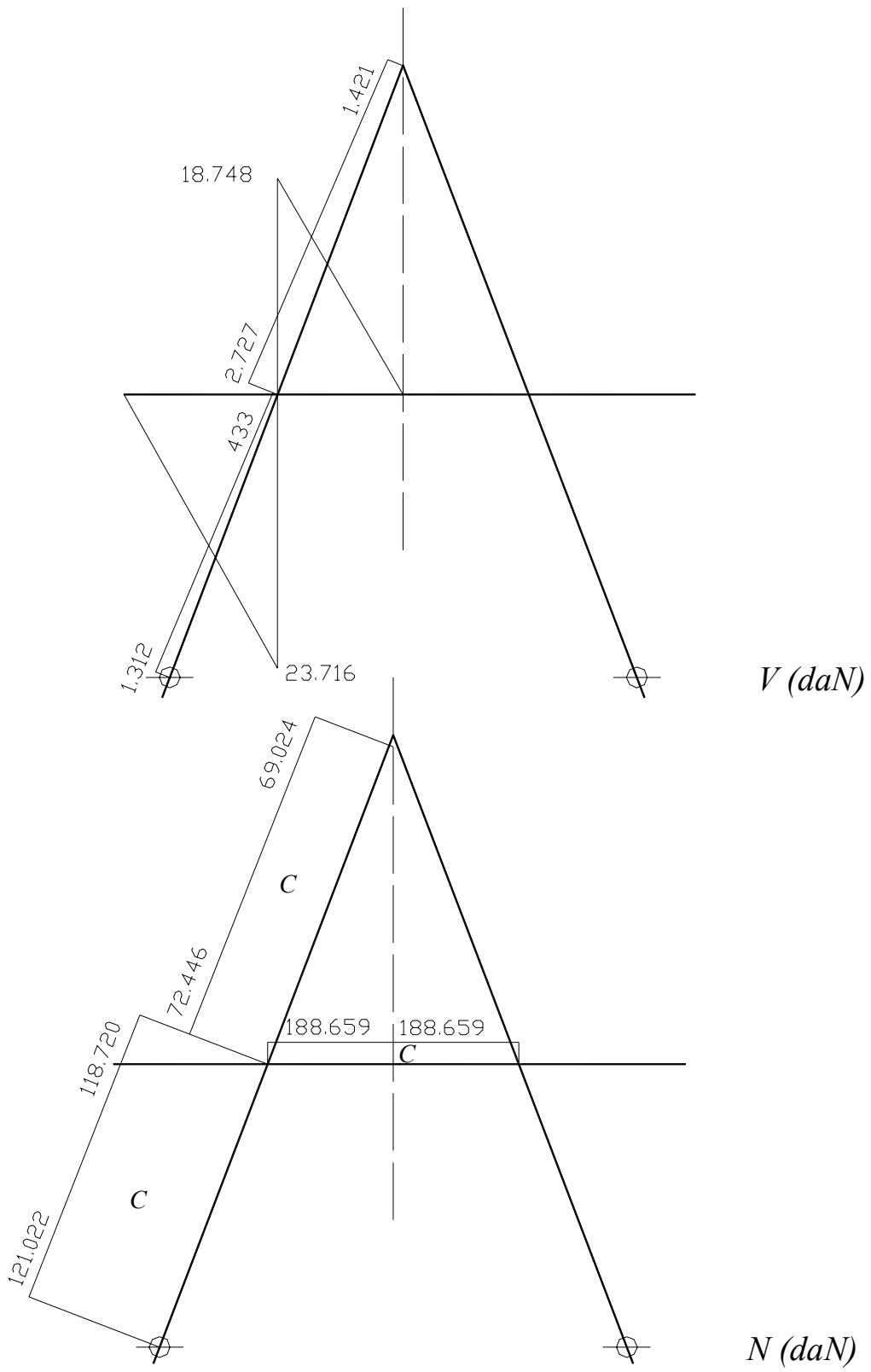
$\sum \alpha \chi = 2,129$
 $r_1 = 0,27$
 $r_2 = 0,43$
 $r_3 = 0,30$

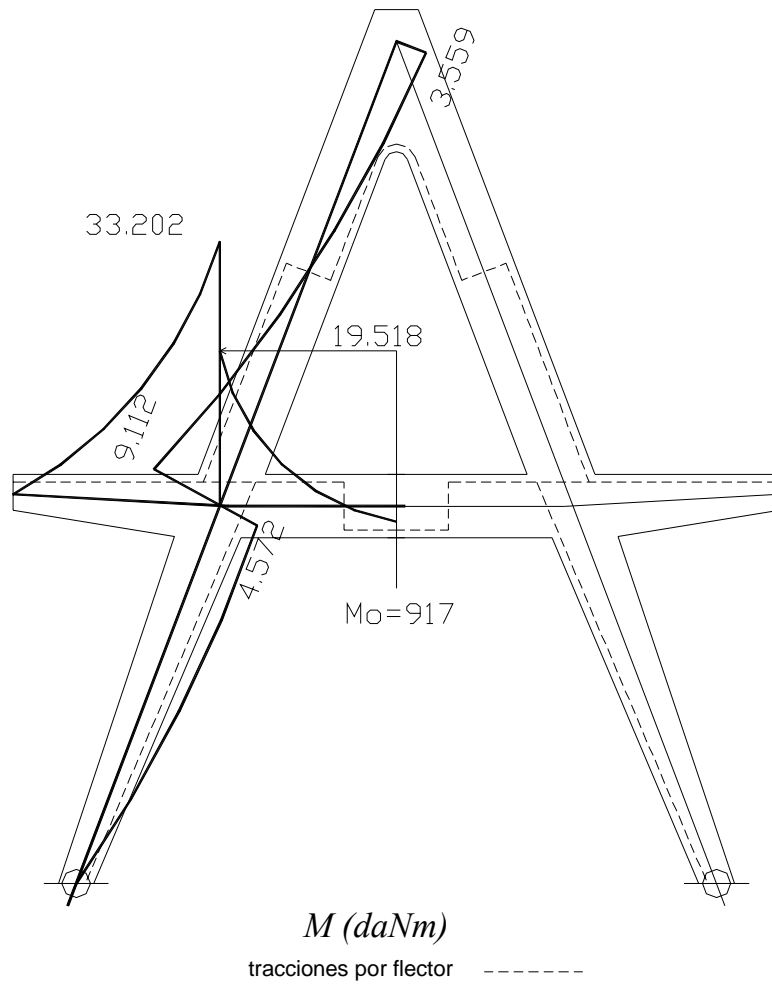






Reacciones.



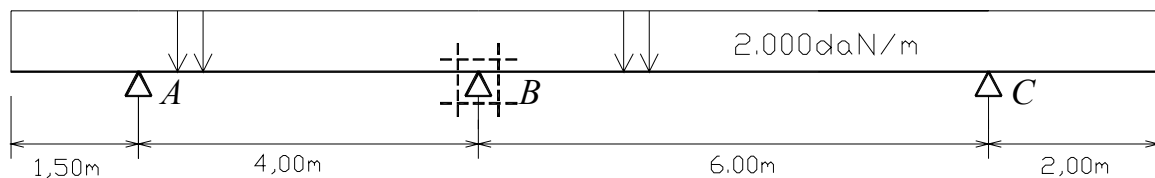


COMPLEMENTOS

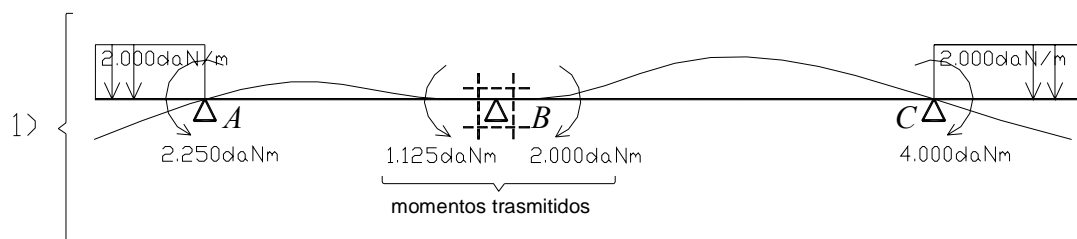
1 - PROBLEMAS REFERENTES A MOMENTOS INICIALES DEL 1er CROSS.

Como ya quedó dicho, a través del estudio de las estructuras por el método de Cross, se obtienen los momentos en los extremos de las barras, siempre que no puedan ser determinados por otros procedimientos; concretamente, veremos el tratamiento aconsejado para el caso de: a) barras que se prolongan en ménsulas, y b) el caso de estructuras con vínculos isostáticos con los apoyos exteriores.

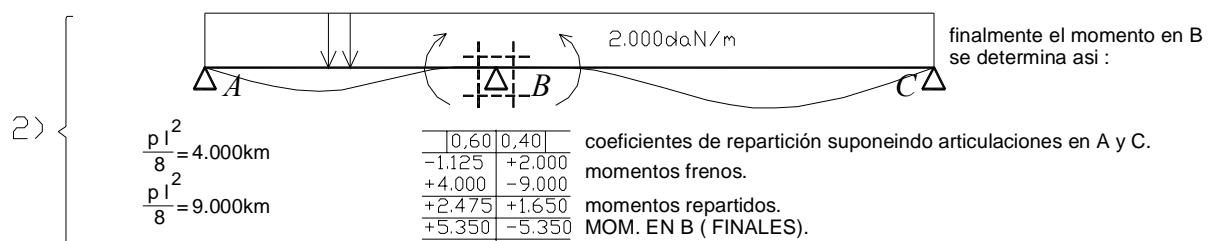
a) Lo veremos a través de dos ejemplos.



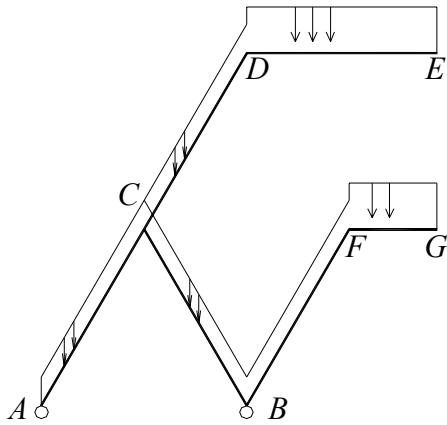
El único momento de apoyo desconocido es el B, (A y C tienen momentos conocidos). Se actúa por superposición:



+



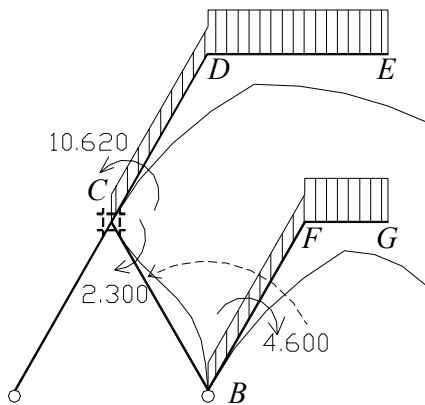
Un caso más completo es el presentado en el ejercicio 8



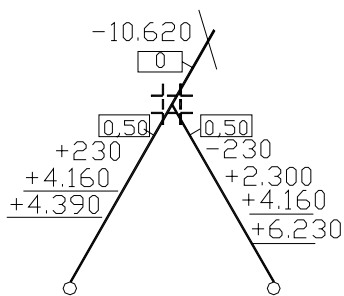
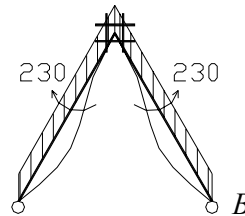
Solamente se desconocen los momentos en C de la barra CA y CB .

Los momentos en B y el momento en C de la barra CD son conocidos.

Se actúa por superposición:



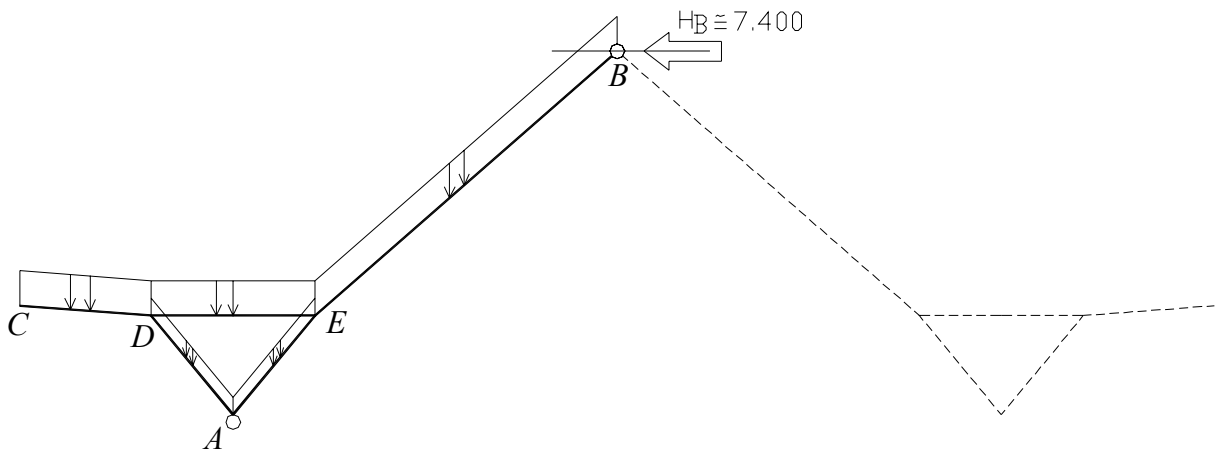
+



Finalmente, los momentos en C desconocidos se determinan de la siguiente manera:

b) Un caso que puede producirse es el de estructuras con apoyos exteriores isostáticos, es decir, que con sólo las ecuaciones de equilibrio pueden determinarse las reacciones de apoyos. Pero con estos valores, no pueden determinarse los momentos en los extremos de todos los tramos, pero sí en algunos de ellos. Lo veremos a través de algunos ejemplos:

Tema 10

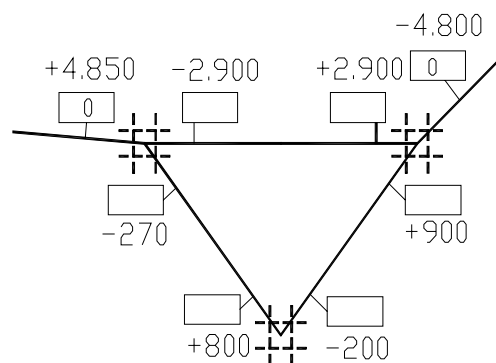


Por procedimientos conocidos ($M_A=0$ para media estructura) puede hallarse la resultante derecha en B: H_B

Una vez determinada H_B puede hallarse el momento en E del tramo EB. También se determinan los momentos: D del volado CD, y los momentos freno de los tramos DE, DA, y AE.

De esta manera, quedan determinados los momentos iniciales del 1er Cross, de acuerdo a lo que se indica en el siguiente gráfico:

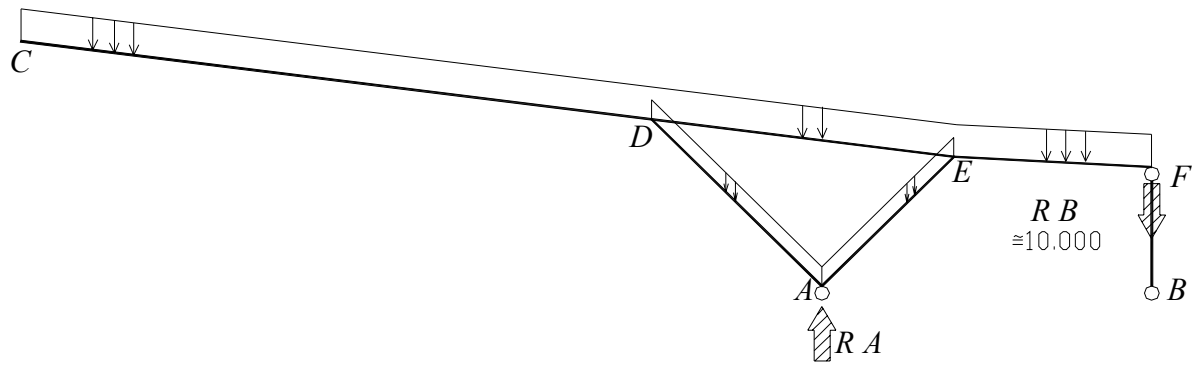
(el tramo EB será tratado como una ménsula, con su carga repartida y una carga concentrada H_B en B).



(los valores son aproximados)

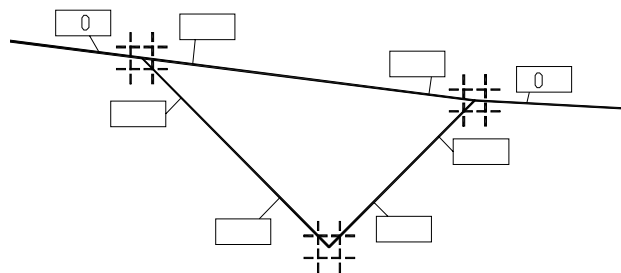
Una vez hallados los momentos finales, las descargas de tramo, las descargas de nudos, y las descomposiciones de las fuerzas en caminos materiales, en D y E aparecerán fuerzas con dirección del tramo DE, iguales y de sentidos contrarios.

Tema 3:



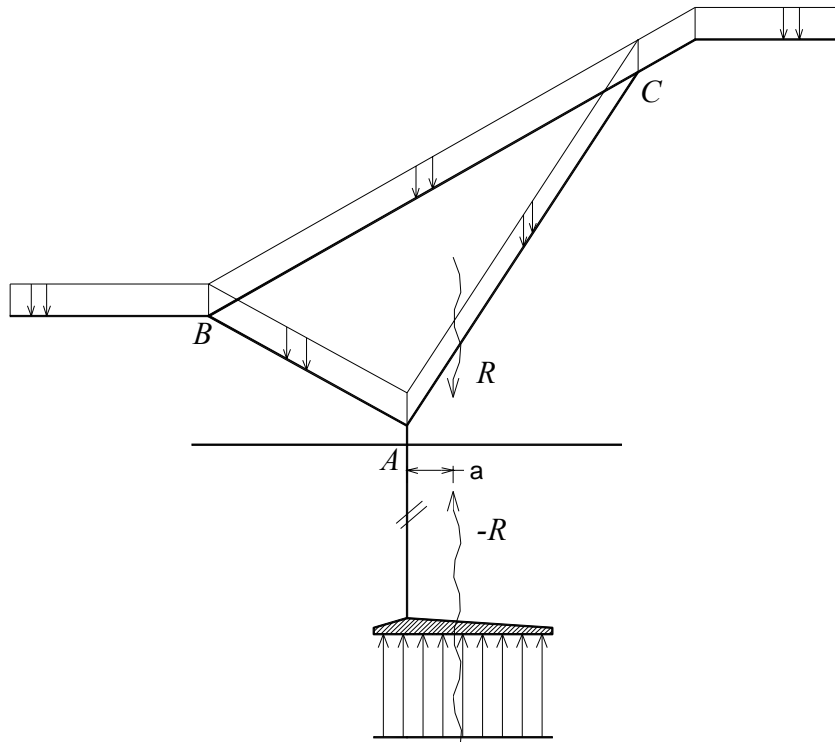
En esta estructura pueden determinarse R_A y R_B , y conocida ésta, puedo hallar el momento en E del tramo EF (este tramo se considera como una ménsula con sus cargas repartidas y R_B en el extremo).

De la misma manera que el tema anterior, la situación inicial para el 1er Cross se indica en la figura siguiente, y la etapa final de descomposición de las fuerzas en los nudos, debe existir equilibrio a través de la barra DE .

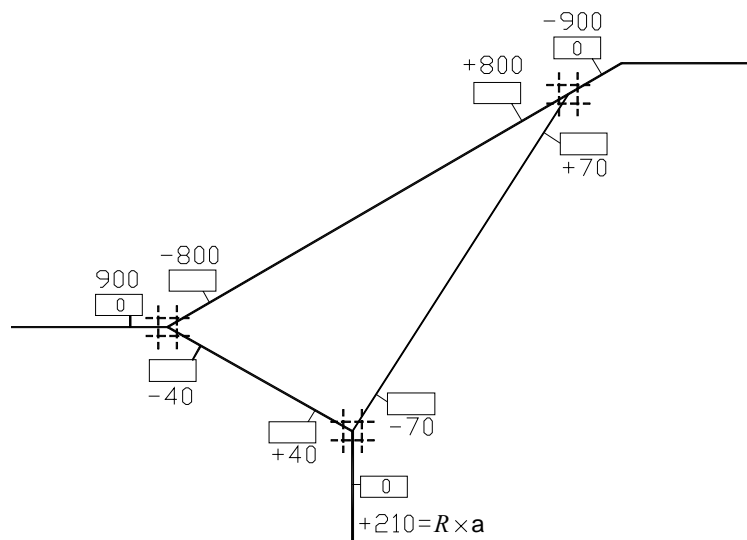


Tema 14:

Esta estructura tiene un solo apoyo; continuamos el mismo con su dispositivo de cimentación (supuesto un patín).



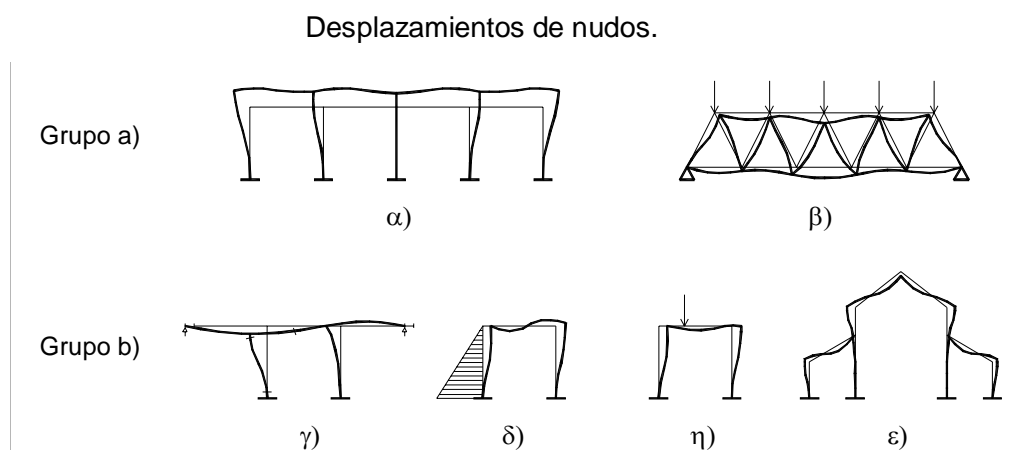
El dispositivo de cimentación, con la reacción del tramo (de resultante $-R$), se lo trata como una ménsula en el nudo A , y la situación de iniciación del 1er Cross sé gráfica a continuación:



(los valores son aproximados)

2 - ESTRUCTURAS CON NUDOS DESPLAZABLES.

a) El Ing. Español Carlos Fernández Casado establece las clases de desplazamientos de los nudos en los siguientes:



Se estudiarán los desplazamientos que pueden producirse en la estructura, considerándolos en dos grupos:

- a) Los que son consecuencia de la variación de longitud de ciertas barras.
- b) Los que corresponden a deformaciones transversales sin cambio de longitud de las barras.

Los primeros son debidos a las siguientes causas:

I) Variaciones termohigrométricas.

II) Esfuerzos longitudinales.

Y los del segundo grupo, a:

III) Asiento de los apoyos.

IV) Fuerzas exteriores (viento, empuje de tierra, etc.)

V) Disimetría en las características de la estructura o en la sollicitación.

VI) Empuje de las barras curvas o poligonales.

En otra parte del texto, indica:

Los desplazamientos pueden ser de cinco clases:

1) Desplazamientos conocidos, como los debidos a dilataciones o contracciones de las barras por variaciones de temperatura o retracción de fraguado, asiento de los apoyos, etc.

2) Desconocidos, pero dependiendo directamente de las fuerzas exteriores; por ejemplo, los desplazamientos laterales de una estructura elevada sometida a la acción del viento.

3) Desconocidos, pero dependiendo directamente de los esfuerzos canalizados por la estructura; es decir, consecuencia de los acortamientos y alargamientos producidos por los esfuerzos longitudinales.

4) Originados por desplazamiento lateral de la estructura al existir disimetría sus características geométricas o elásticas o en la distribución de las fuerzas.

5) Originadas por los empujes correspondientes a barras curvas o combinaciones de barras rectas equivalentes a un arco.

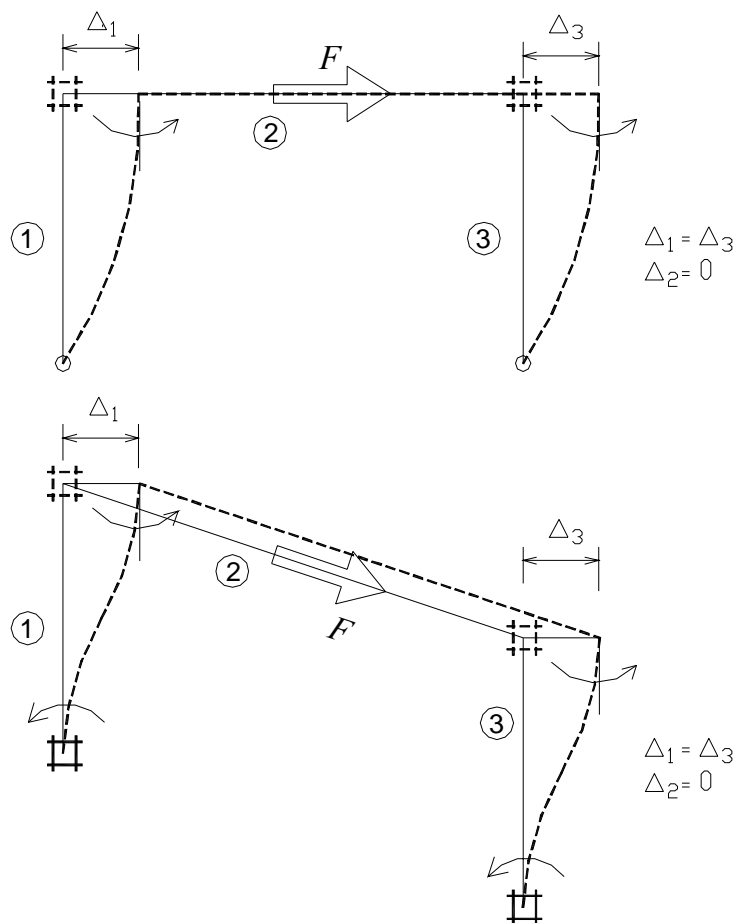
De esta última clasificación, podemos hacer una nueva reagrupación:

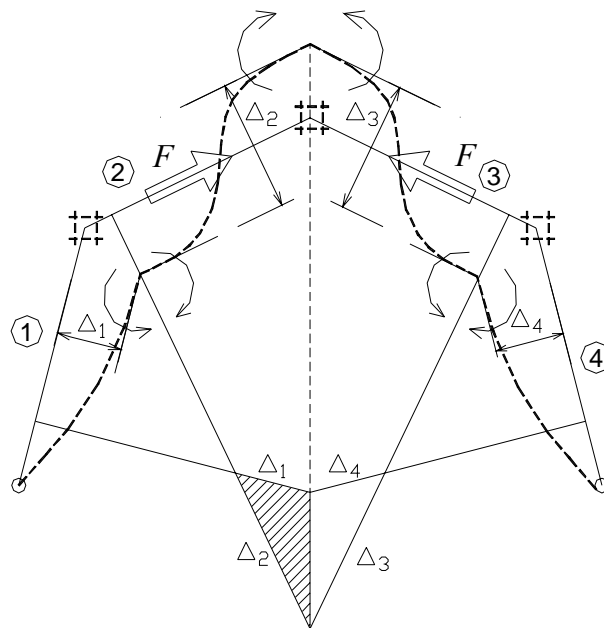
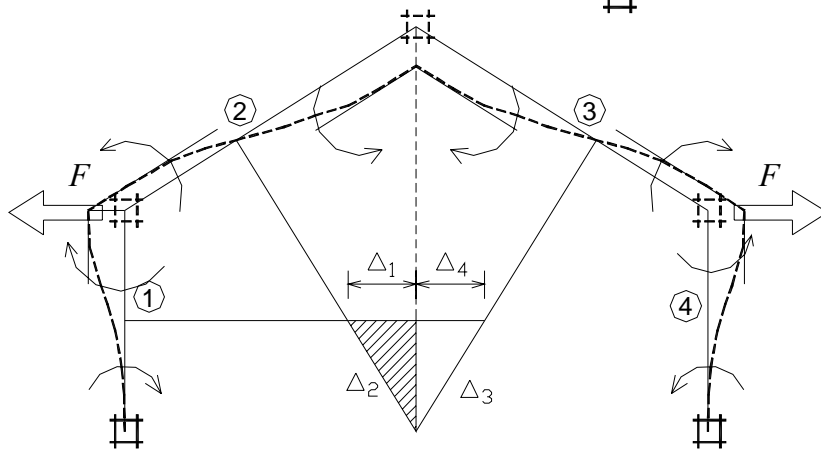
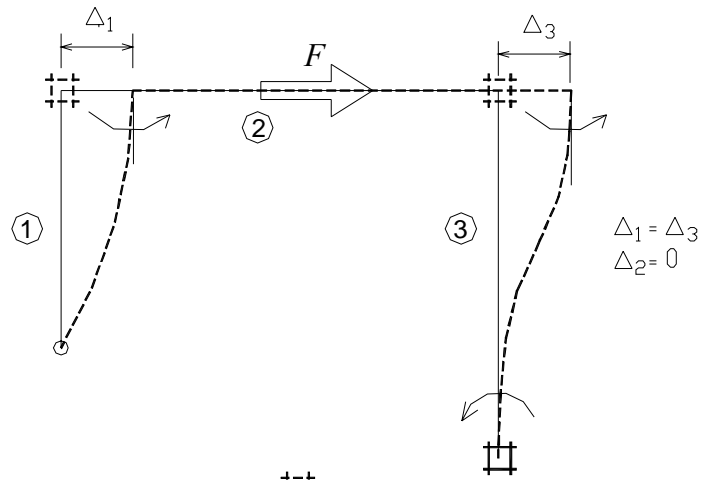
2), 4), 5), son los casos comunes ya vistos y desarrollados hasta el momento;

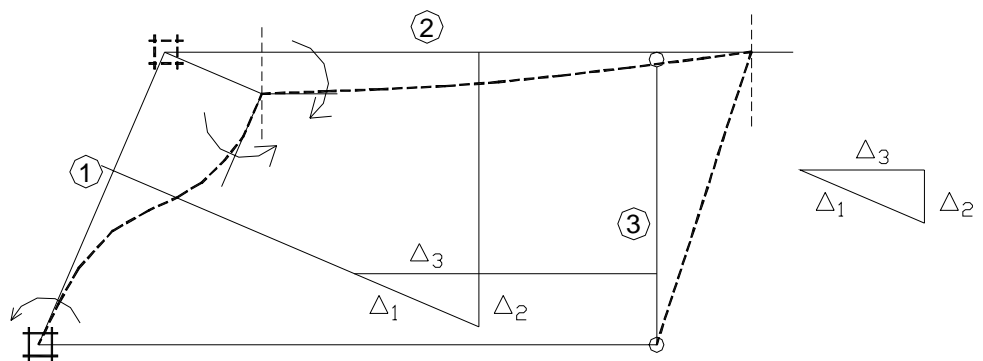
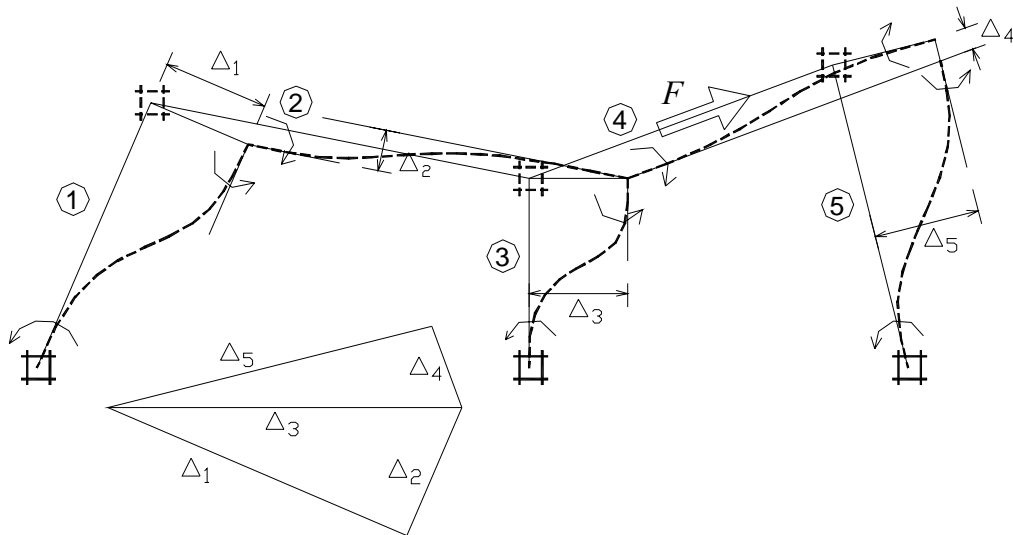
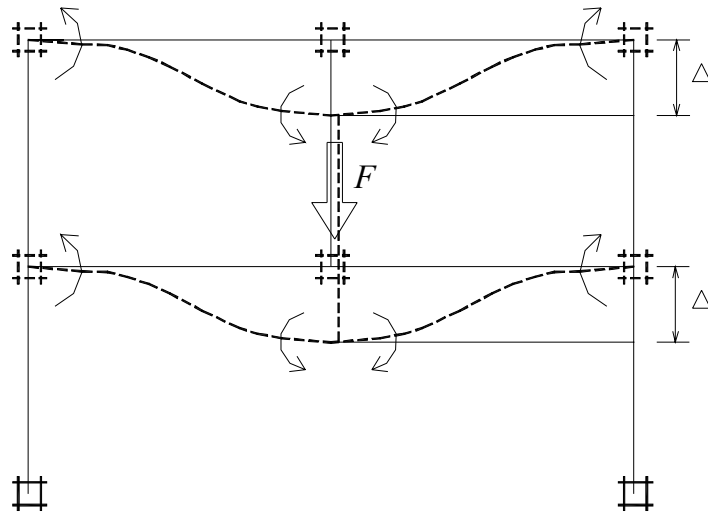
3) estos desplazamientos no se consideran, pudiéndose desprestigiar, según ya hemos visto, por lo menos en un cálculo manual; se consideran en cálculo matricial con computadoras;

1) para estas situaciones, al ser los desplazamientos conocidos (aunque muy difícil de cuantificar) los momentos de 2do Cross serán los verdaderos, no necesitándose corrección a través del coeficiente α .

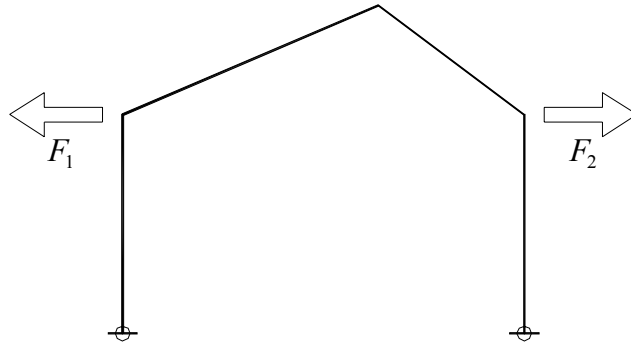
b) Veremos, a continuación, una serie de ejemplos con casos de estructuras de nudos desplazables. Se esquematizará el esquema de la estructura y se indicará a trazos gruesos la figura deformada con los nudos frenados, es decir, la iniciación correspondiente al 2do Cross. Se particularizará para casos de una fuerza de desviación (o para el caso de dos, cuando son iguales).







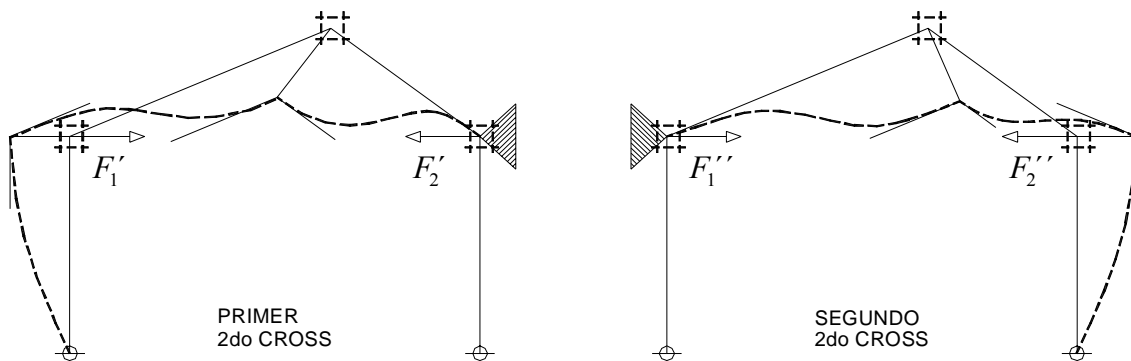
c) Vamos a analizar, brevemente, cuando al terminar el 1er Cross tenemos más de una fuerza de desviación distintas. Lo estudiaremos, genéricamente, para dos ejemplos:



Al terminar el 1er Cross se obtienen dos fuerzas de desviación: F_1 y F_2 .

Debe procederse en dos etapas para el proceso del 2do Cross, pues la relación entre F_1 y F_2 no se mantiene en un solo 2do Cross.

Se realiza superposición, permitiendo un desplazamiento y luego el otro (se dibujan las deformaciones con los nudos frenados, y las fuerzas de desviación finales, luego de terminado cada 2do Cross.) (los sentidos de las fuerzas son arbitrarios):



Se plantean dos ecuaciones de equilibrio:

$$F_1 - \alpha \times F'_1 - \beta \times F''_1 = 0$$

$$F_2 - \alpha \times F'_2 - \beta \times F''_2 = 0$$

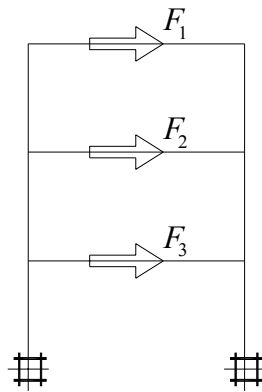
Signos algebraicos coherentes con los sentidos de los gráficos.

Resuelto el sistema de ecuaciones, se hallan los coeficientes α y β de corrección de momentos.

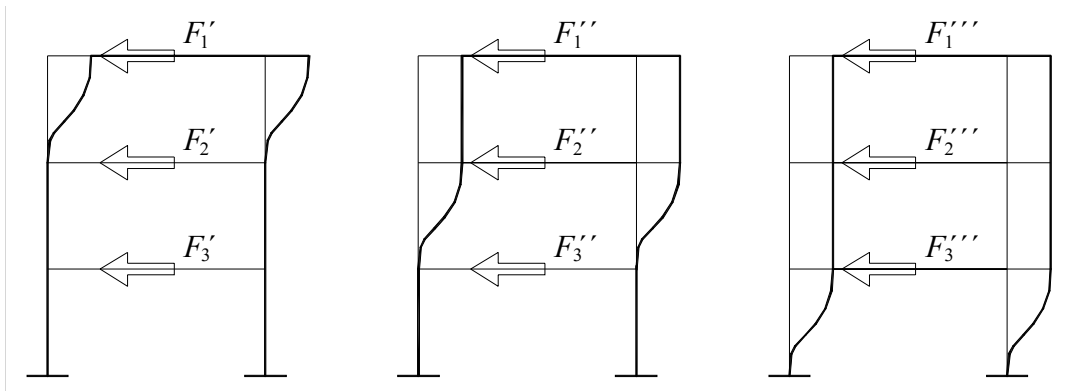
Los momentos finales en los extremos de los tramos son:

$$M.FINALES = M.1erCROSS + \alpha \times M.primer\ 2do\ Cross + \beta \times M.segundo\ 2do\ Cross.$$

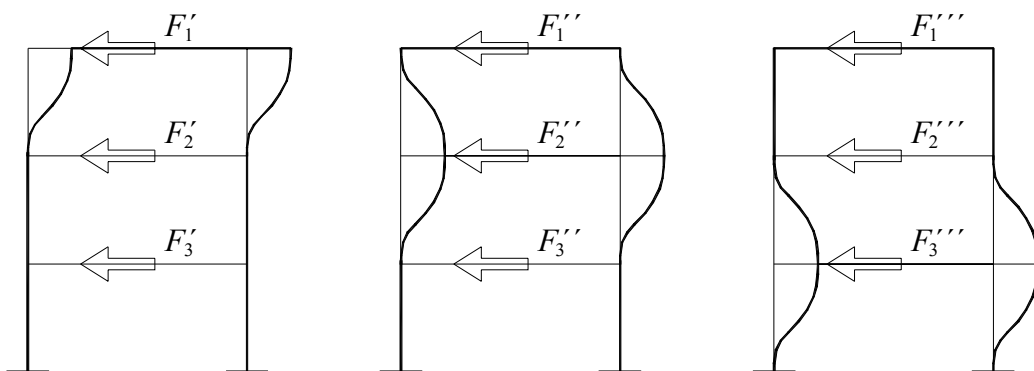
2)



Se indican las fuerzas de desviación, al terminar el 1er Cross. (En los gráficos, los sentidos de las fuerzas se han fijado arbitrariamente).



Como variante puede operarse, también de la siguiente manera:



El sistema de ecuaciones es:

$$F_1 - \alpha x F'_1 - \beta x F''_1 - \gamma x F'''_1 = 0$$

$$F_2 - \alpha x F'_2 - \beta x F''_2 - \gamma x F'''_2 = 0$$

$$F_3 - \alpha x F'_3 - \beta x F''_3 - \gamma x F'''_3 = 0$$

(signos algebraicos coherentes con los sentidos de las fuerzas en los gráficos).

Resuelto, es decir, hallando α , β y γ se procede para hallar los momentos finales, del mismo modo que en el caso anterior.

3 - RELACION FORMA-SOLICITACIONES. **PARCIALIZACION DEL TODO ESTRUCTURAL.(1)**

a) En ejemplos sencillos se observará la relación forma- solicitaciones:

I) En la página siguiente se muestra una estructura simple de esquema, y en los cinco casos se varía la relación de inercias de los tramos horizontales respecto a los verticales.

Se observa para cada uno de ellos la variación de los diagramas de flectores; tenemos dos casos extremos:

* tramo horizontal biempotrado, para inercia del mismo pequeña respecto a los tramos verticales;

* tramo horizontal biarticulado, cuando el dintel es mucho más rígido que los tramos verticales.

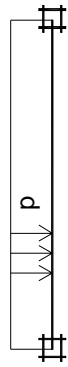
II) En la otra página se distinguen los dos diagramas de flectores correspondientes a dos tipos de vínculos en A y B .

Para empotramientos en A y B se observa que los momentos en los apoyos son mayores, en tanto que para articulaciones en A y B aumentan los momentos de tramo.

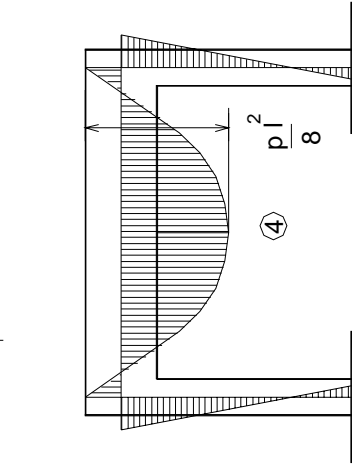
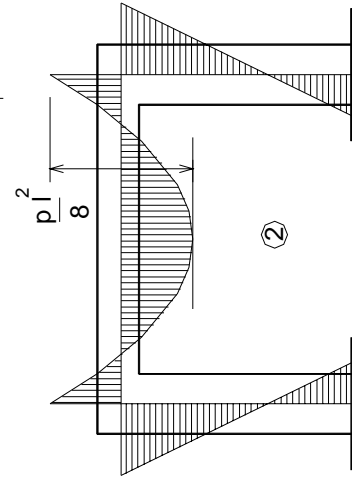
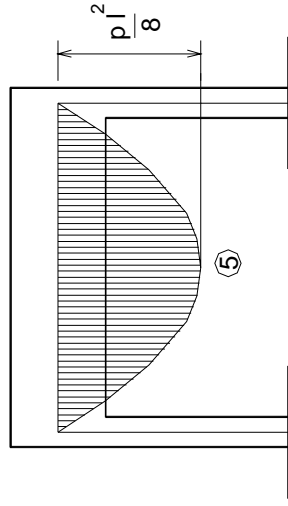
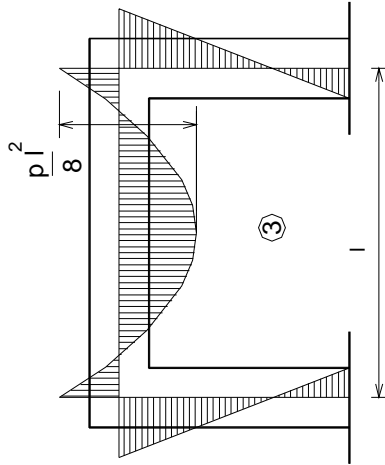
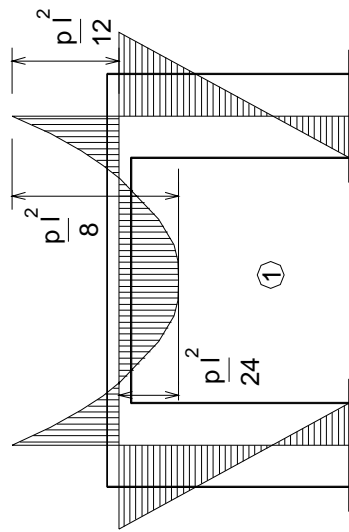
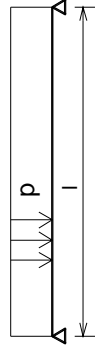
III) Al final se indican casos de inercia variable, en donde en la 1era situación se observa aumento de momentos en C y D , zonas donde se ha aumentado la forma (acartelamiento).

En el caso extremo de variación de la forma, hemos disminuido la altura en A , B y E de tal modo que al no resistir flectores, podemos esquematizar con articulaciones en esas secciones. Se llegó entonces a una estructura isostática, cuyos diagramas de flectores son familiares.

LÍMITE TEÓRICO:

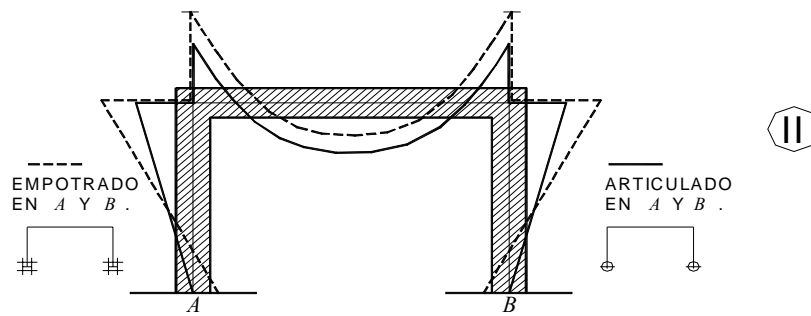


LÍMITE TEÓRICO:

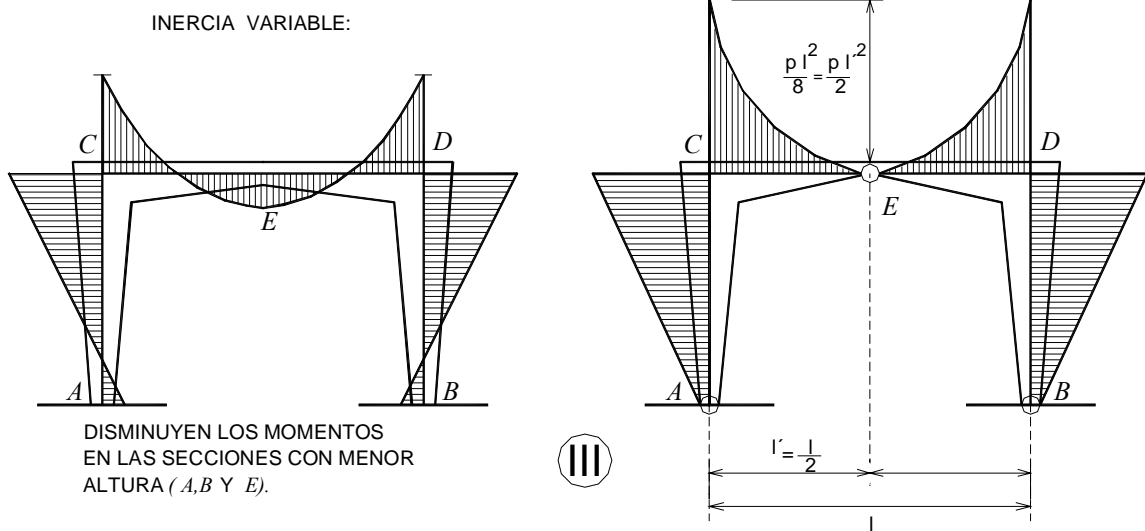


I

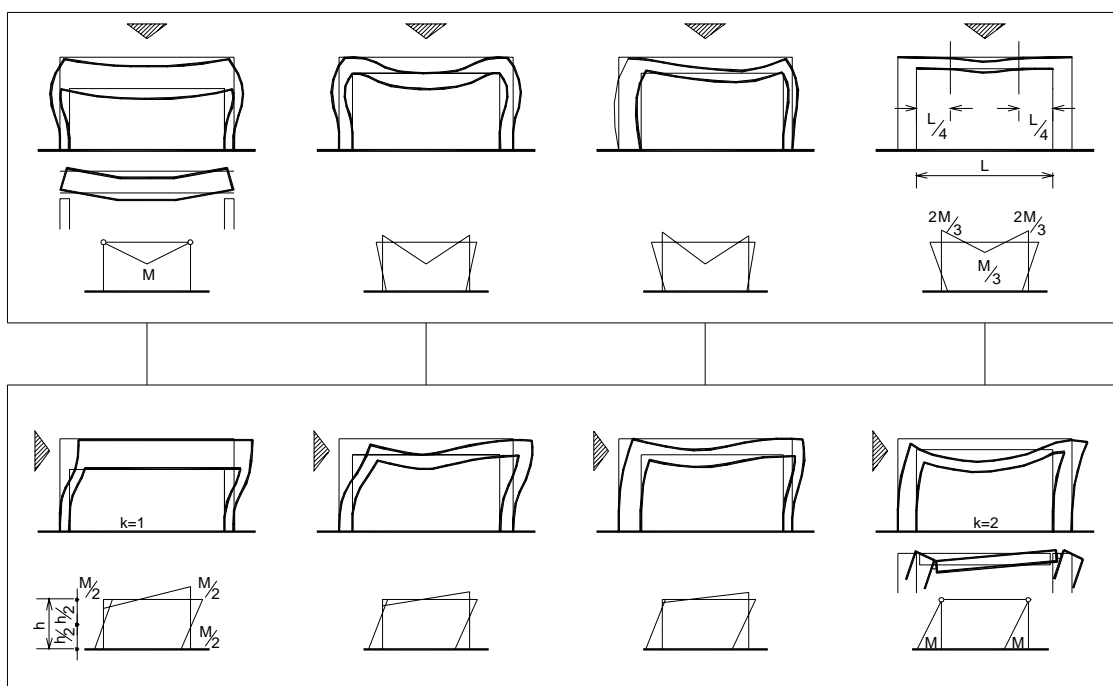
VARIACIÓN DE TIPOS DE APOYOS EN A Y EN B.



ESTRUCTURA ISOSTÁTICA DE 3 ARTICULACIONES:



b) Complementamos los estudios anteriores con los gráficos extraídos de una publicación del autor SCHUELLER; la observación atenta de las figuras permite extraer las conclusiones correspondientes, que complementan lo ya dicho anteriormente.



COMPORTAMIENTO DE UN PORTICO EN FUNCIÓN DE LA RIGIDEZ RELATIVA DE LAS VIGAS Y COLUMNAS

c) Conocer las relaciones entre las formas (y las dimensiones) de las secciones de los tramos que concurren a un nudo, y las solicitaciones, es de gran importancia en muchos aspectos, principalmente para la adopción de hipótesis que, a veces, simplifican notablemente la parte operativa en el análisis estructural. Por ejemplo, transcribimos parte de la anterior norma Argentina (PRAEH), y que se refiere a los casos de estudio de estructuras corrientes de edificación:

v) Vigas continuas.

v.1) Cálculo elástico.

v.1.1) Condiciones para el cálculo como vigas continuas.

v.1.1.1) Se permite calcular las vigas continuas sin tomar en cuenta los pilares o columnas, o sea como vigas continuas sobre apoyos simples en los casos en que se cumplan las siguientes condiciones:

i) De vínculo.

1) Los nudos no sufran traslaciones, lo que estará asegurado por la presencia de elementos de arriostramiento, estructurales o de cierre.

2) Cuando en cada nudo se verifique que $\frac{\sum (J_v / L_v)}{\sum (J_p / L_p)} \geq 2$ siendo J_v / L_v

la relación entre momento de inercia y longitud de las vigas y J_p / L_p la misma relación para los pilares. (rigideces de vigas mayores que los de los pilares).

ii) De cargas.

1) Que ningún tramo supuesto simplemente apoyado tenga un momento máximo que supere al triple del momento de tramo adyacente, supuesto en igual condición, si son de igual signo, o igual al mismo si son de signos opuestos.

v.1.1.2) En los nudos en que la condición de vínculo v.1.1.1 i) 2) de valores:

$$\frac{\sum (J_v / L_v)}{\sum (J_p / L_p)} < 1 \quad (\text{rigideces de vigas pequeñas en relación a la de los pilares) caso que}$$

podrá presentarse en la parte baja de esqueletos elevados, en que las columnas son muy rígidas, deberá considerarse empotramientos perfectos en los extremos de las vigas, no permitiéndose su cálculo como vigas continuas sobre apoyos simples.

v.1.1.3) En los casos en que los momentos correspondientes a los tramos supuestos simplemente apoyados no cumplan la condición de cargas v.1.1.1.ii. (casos que se presentan cuando hay grandes diferencias de cargas y/o luces en tramos sucesivos), sólo podrá

calcularse las vigas como vigas continuas sobre apoyos simples sí: $\frac{\sum (J_v / L_v)}{\sum (J_p / L_p)} \geq 10$

(rigideces de vigas mucho mayores que la de pilares).

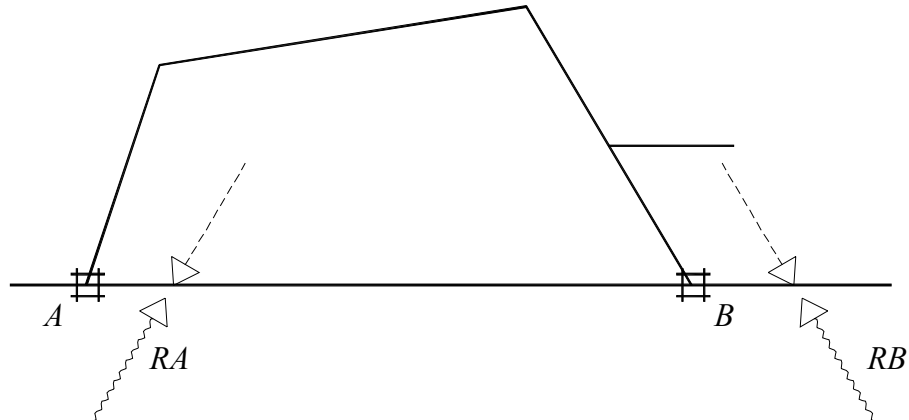
En los otros casos deberá resolverse la estructura aporticada indesplazable.

v.1.1.4) Los pilares extremos de apoyo de las vigas continuas, estando asegurada la indesplazabilidad del sistema, serán considerados como un tramo más a cada lado y calculados como tales.

4 - PROBLEMA DE LOS APOYOS. **PARCIALIZACION DEL TODO ESTRUCTURAL (2).**

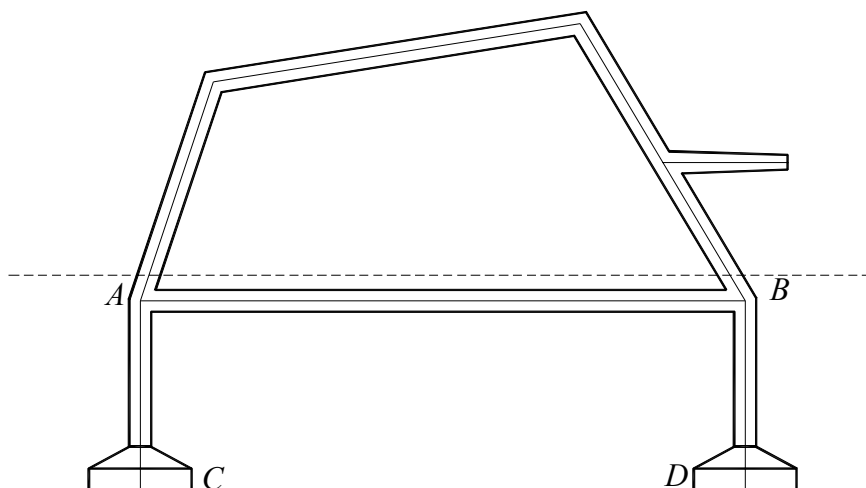
El tema resuelto en la publicación se hizo considerando una parte de la estructura, hasta las secciones A y B , y aquí se dispusieron vínculos teóricos que más se aproximen a la realidad.

El esquema adoptado fue suponer imposibilidad de giro en A y B :



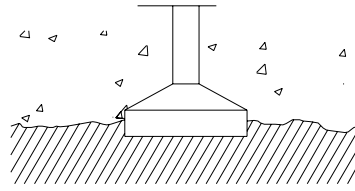
Parcializar en partes la estructura es un recurso muy frecuente en la etapa de anteproyectos (y algunas veces, en la etapa de proyecto), y, debe ser realizada con sumo cuidado, siendo necesario, no solo experiencia, sino conocimiento del comportamiento del todo estructural.

El esquema simplificado anterior puede corresponder, por ejemplo, a la siguiente realidad (caso de dispositivos de cimentación en base a patines):

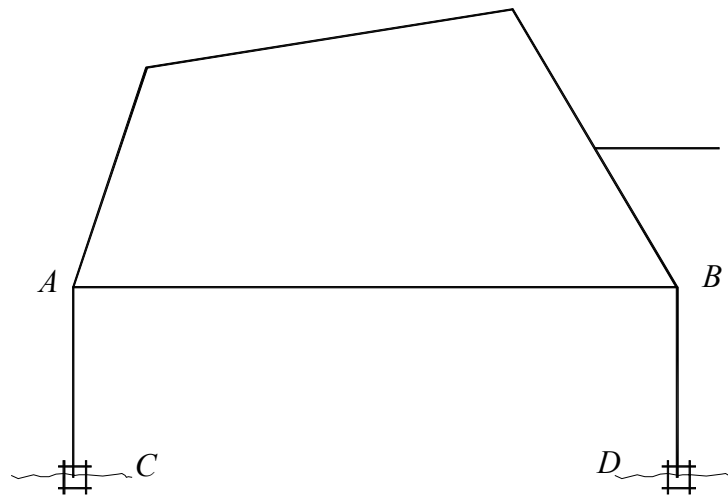


Nuevamente se plantea qué tipo de vínculos (en C y D) teóricos son los que más concuerdan con la realidad; y aquí debemos considerar el tipo de suelo sobre el cual se apoyan los patines.

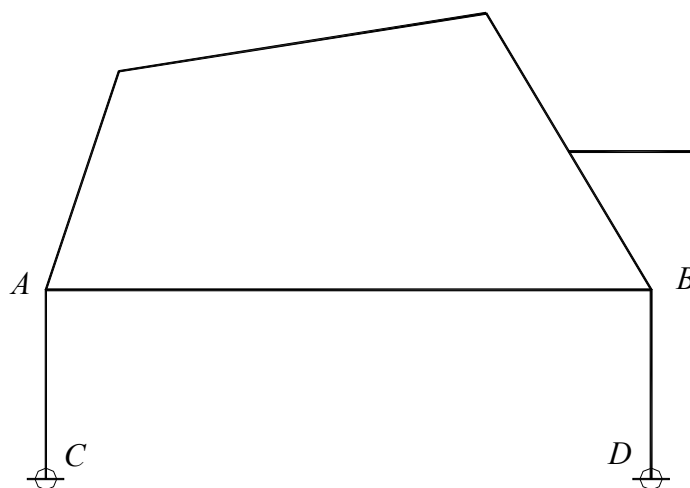
Si el apoyo es sobre roca:



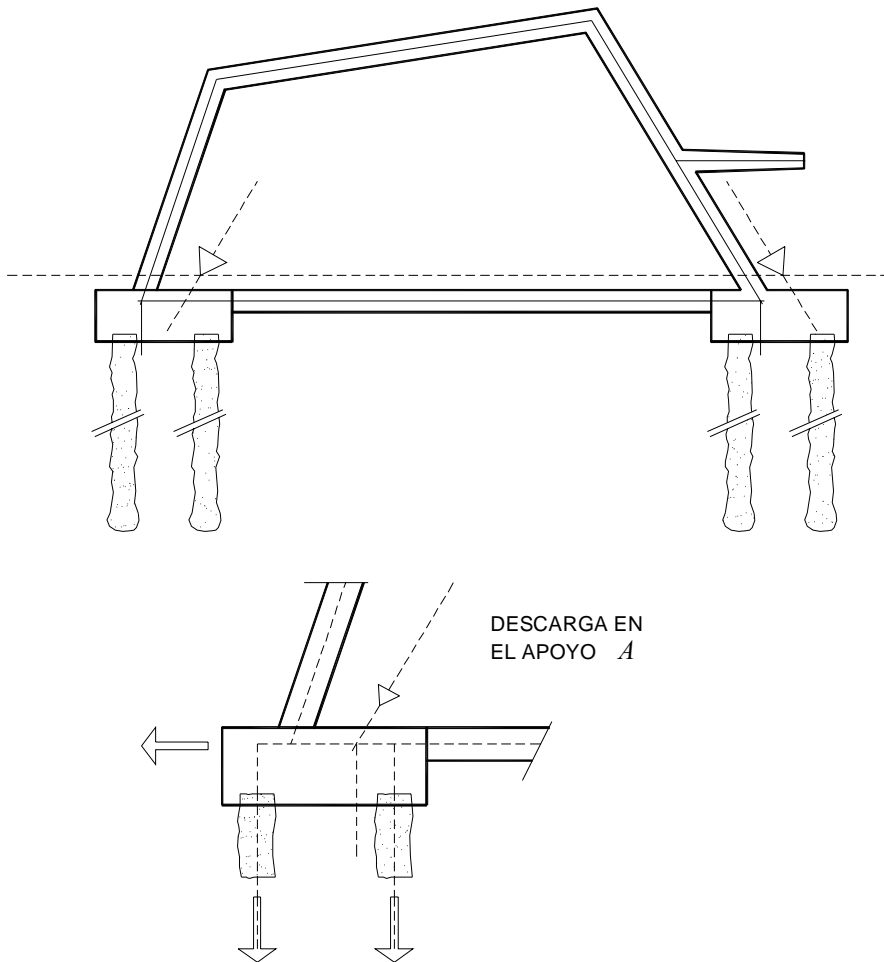
el esquema más adecuado es el nudo frenado (giro nulo) en C y D .



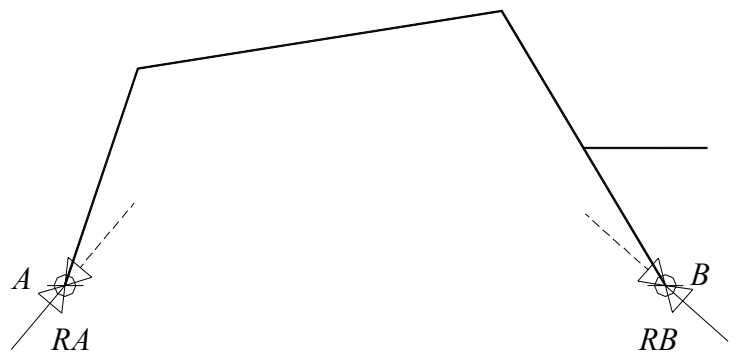
En caso de patines sobre arcilla (y de acuerdo al tipo de suelo), el tipo de vínculo adecuado sea una situación intermedia entre el caso anterior y el que corresponde a articulaciones en C y D :



Para el esquema inicial (empotramiento en A y B) y cimentación con pilotes, la realidad correspondiente puede ser:

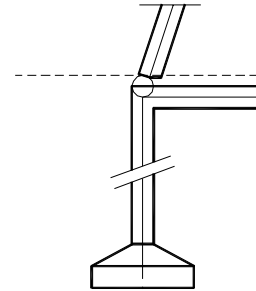


La otra posibilidad de diseño para los apoyos en A y B , es articulación en ellos. El esquema sería:

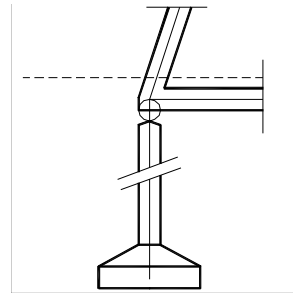


La realidad, para el caso de cimentación con patines, puede ser una de las dos situaciones siguientes:

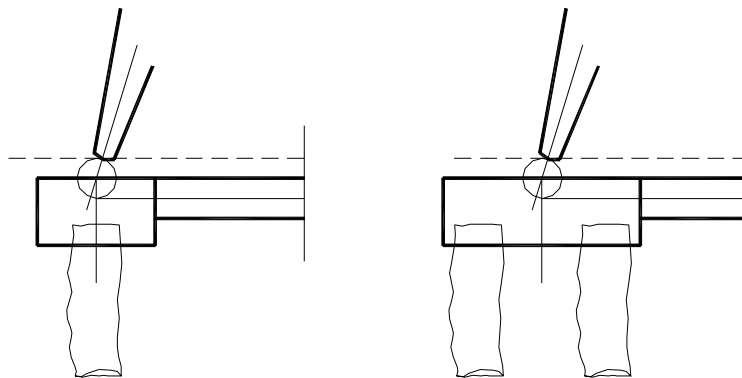
La articulación resiste una fuerza horizontal y otra vertical; puede ser vista pues está sobre piso terminado.



La articulación resiste solamente una fuerza vertical; hay más dificultades constructivas (pues está bajo suelo)



Para el caso de cimentación con pilotes, y de acuerdo a la entidad de las cargas, principalmente, pueden producirse las siguientes situaciones:



Dijimos anteriormente: en general, que la estructura resistente sea hiperestática o isostática no era una determinante previa, a la hora de proyectar (o anteproyectar) la misma.

En realidad, eso no es tan así. El tipo de suelo puede aportar determinantes que, a veces, nos dan la pauta del tipo estructural que, al momento del análisis, resultará hiperestática o isostática.

Determinados tipos de terreno pueden provocar asientos diferenciales (o mejor, movimientos diferenciales, hacia arriba o hacia abajo, de los apoyos, y de cierta entidad), que alteran las solicitaciones. Esto, en sí, no es de temer; el hecho es que ese fenómeno es difícil de prever y de cuantificar.

Para estas situaciones es aconsejable proyectar estructuras que se vean afectadas en poco grado, o en ninguno, en el trazado de las solicitaciones. Esto se logra con estructuras isostáticas o hiperestáticas de poco grado.

Respecto a este tema, transcribimos las indicaciones que dan los autores: A. GUERRIN, R. C. LAVAUUR y PH. LECROQ:

Según la naturaleza de los apoyos, los apoyos sobre el suelo pueden ser articulados o empotrado; las dos soluciones son posibles, viniendo la elección condicionada por consideraciones sobre la naturaleza del terreno; el empotramiento de un pilar en la cimentación sólo puede concebirse si el suelo es indeformable. En el caso contrario, el empotramiento en la base del pilar impondrá al terreno solicitaciones variables, que introducirán al terreno deformaciones variables entre uno y otro extremo de la zapata; ésta, pues, tendrá que girar, lo que hará disminuir los momentos en la base del pilar; esto, bajo el punto de vista del empotramiento del pilar, no supone ningún inconveniente, pero, por el contrario, sí que puede serlo para el resto de la estructura, donde se incrementarán las solicitaciones. Sólo sobre excelentes terrenos: rocas, margas secas o gravas arenosas, deben suponerse que se consigue un empotramiento perfecto de la base de los pilares. En los pórticos con dos pilares, si sólo se prevén articulaciones en las bases de los pilares, el sistema resulta hiperestático; para conseguir una construcción isostática, habrá que añadir otra articulación en un punto cualquiera de la estructura. El problema se centra aquí en la elección del tipo que resulte de más interés. Las consideraciones sobre el tipo de terreno van a jugar un importante papel. En un mal terreno de cimentación, los asientos son de temer, pues, si se producen bajo las cargas de servicio, producirán una redistribución de las leyes de momentos, si la estructura es hiperestática, con riesgo de formación de fisuras y de desorganización general grave. Como consecuencia, un sistema con tres articulaciones se impondrá en el caso de terrenos de cimentación malos. En los otros casos es mejor adoptar una construcción hiperestática: es ligeramente más económica desde el punto de vista de las cuantías de materiales y evita también articulaciones relativamente costosas.

También relacionado con el tema que estamos tratando, WAYNE-C.TENG indica:

El giro de un patín, sometido a un momento o a una carga excéntrica, no puede ser más que estimado por medio de cálculos simples basados en una buena experiencia.

Por ejemplo, un patín de pequeñas dimensiones, apoyado a poca profundidad sobre arena, tiende a girar pues la arena "se escapa" fácilmente bajo los bordes del patín.

Si la profundidad es mayor, la arena está sometida a una presión debido al peso de las partes adyacentes.

La importancia relativa de la influencia de los bordes disminuye cuando las dimensiones del patín aumentan.

No se puede, pues, considerar como sin giro la base de un pilar que se apoya en un patín de pequeñas dimensiones, a poca profundidad, en un terreno pulvurulento (arena).

Al contrario que las arenas, las arcillas y materiales arcillosos, se aproximan a un material elástico y son capaces de resistir tensiones mayores en los bordes.

Además, una gran parte del asentamiento de patines apoyados sobre arcilla se prolongan en un largo período (consolidación), los momentos flectores que actúan durante períodos cortos, no provocan más que rotaciones sin importancia.

5 - DETERMINACION DE ESFUERZOS AXILES.

Veremos de qué modo el Ing. Español Carlos Fernández Casado (“Cálculo de estructuras reticulares”) expone los fundamentos del método para obtener solicitaciones (en particular, axiles) que nosotros denominamos método tramo por tramo:

La hipótesis de partida en el método de Cross es la de empotramiento perfecto en los nudos, llegando a la situación real (empotramiento elástico) de las barras en la estructura, por la aplicación sucesiva de pares que van reduciendo (es decir, variando) los de empotramiento perfecto. También podríamos partir de la hipótesis contraria, es decir, de articulación en todos los nudos, a los cuales se aplicarían pares sucesivos hasta llegar a la situación real.

Esta segunda hipótesis no conviene para el cálculo de momentos, pero sí es valiosísima, en ciertos casos, para el cálculo de los esfuerzos longitudinales y transversales, pues las condiciones de la estructura no se alteran al introducir articulación en los nudos que sean precisos, siempre que pasen a ser acciones exteriores los pares de empotramiento (los momentos en los extremos) correspondientes. Estos pares dan lugar a reacciones hiperestáticas, que, combinadas con las isostáticas (las obtenidas suponiendo el tramo biarticulado) y sumadas en cada nudo, proporcionan las fuerzas que es preciso descomponer según las direcciones de las barras que concurren a él.

Más adelante indica:

Cálculo de los esfuerzos longitudinales. El problema es clásico cuando se suponen nudos articulados y fuerzas actuando en ellos. (Se refiere al caso de estructuras trianguladas, cerchas, a las que se aplica cremona).

Se suman en cada nudo las acciones en dicho extremo de todas las barras que en él se juntan, obteniendo así la fuerza que actúa en el nudo, la cual se descompone en las direcciones de dichas barras para obtener los esfuerzos longitudinales en las mismas. Si los nudos no están articulados y las fuerzas actúan sobre las barras, podemos reducir el caso al anterior, determinando también las acciones en los nudos, que ahora constan de términos isostáticos (tramo biarticulado sin momentos en apoyos) e hiperestáticos (biarticulado y sólo con momentos en apoyos) (éstos igualan a la suma de los pares de empotramiento correspondientes a la barra, divididos por la luz).

El procedimiento operatorio se reduce a ir efectuando las descomposiciones de las fuerzas de nudos, empezando por uno de segundo orden (es decir, que las fuerzas en el nudo se descomponen en 2 direcciones) y continuando en los siguientes, a los que se llevan ya conocidos los esfuerzos de las barras que proceden de los anteriores nudos.

La parte operativa del método, y un ejemplo, se indica en la parte SOLICITACIONES. (Repartido en las primeras clases).

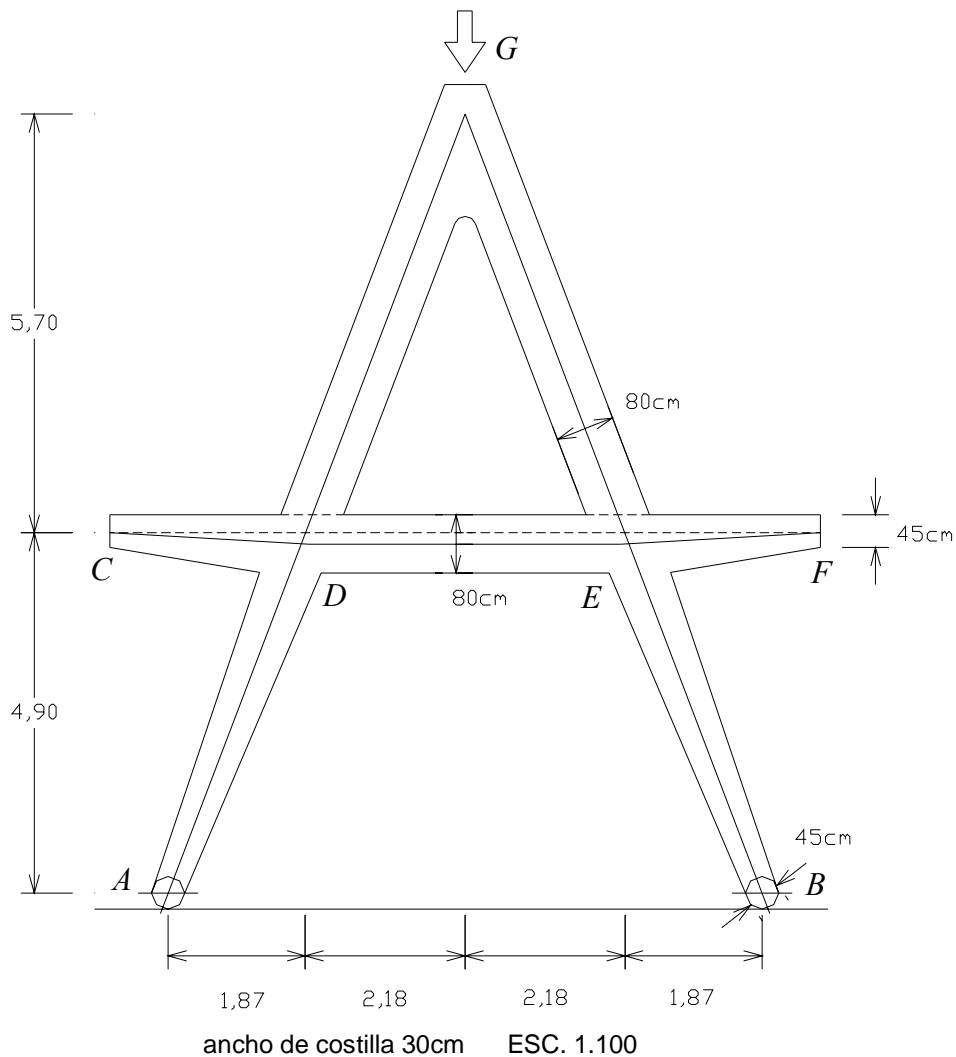
6 -TEMAS PRÁCTICOS.

Se presenta a continuación una serie de ejercicios que abarcan aplicaciones varias y que tienen como objetivo completar la asimilación del tema.

Para algunos de ellos se complementa la presentación adjuntando documentos a partir de los cuales se propusieron los temas, que se simplificaron a los afectos de posibilitar su aplicación práctica en el curso.

1) Hall de Exposición de La Tokio Internacional Trade Center Corporation, Tokio, Japón.

Documento: Bauen in Stahl 2, Pág.107.



Se estudiará una de las costillas de hormigón armado que, ubicadas a distancias iguales, sostienen el entrepiso para público y el techo metálico.

El entrepiso está formado por una losa nervada de doble carpeta (5 cm c/u), cuyos moldes llegan hasta la costilla y descarga, en total, 8.000 daN/m.

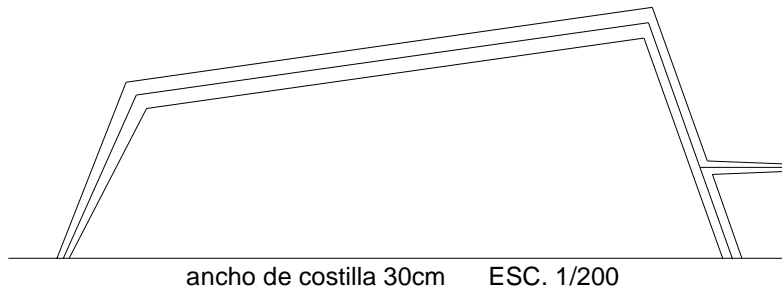
El techo descarga una acción concentrada, en G, de 130.000 daN.

Estudio de solicitaciones con diagramado de flectores, axil, cortante e indicación de zonas de tracciones provocadas por el momento flector.

Verificar la sección que se considere más comprometida y propuesta de ajuste si se cree conveniente.

2) Pista cubierta para patinaje en hielo y otros deportes en Boulogne.

Documento: L'architecture d'aujourd'hui N°. 64, pág.82.



Descarga total de los cierres sobre todos los tramos es de 500 daN/m. lineal de tramo.

Diagramas de solicitaciones y de tracciones provocadas por el flector. Descargas y reacciones en los apoyos. Estudio de secciones de interés (críticas) y propuesta de ajuste, en caso de ser necesario.

3) Tribuna en la zona cubierta de Estadio en Zagreb, Yugoslavia.

Documento: L'architecture d'aujourd'hui N°. 64. pág, 15.

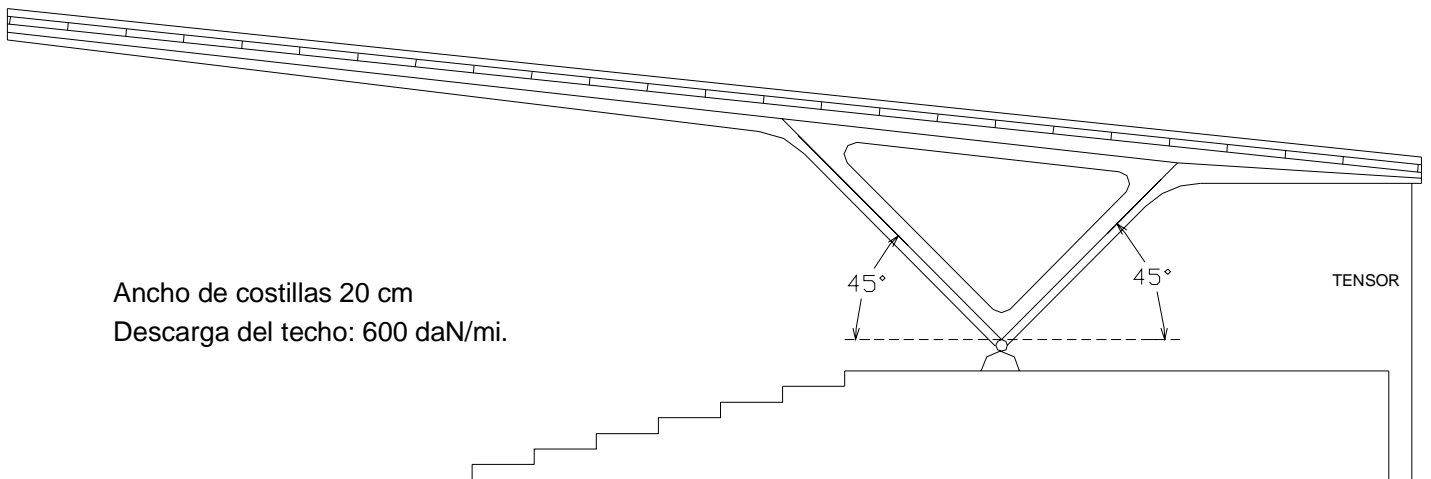
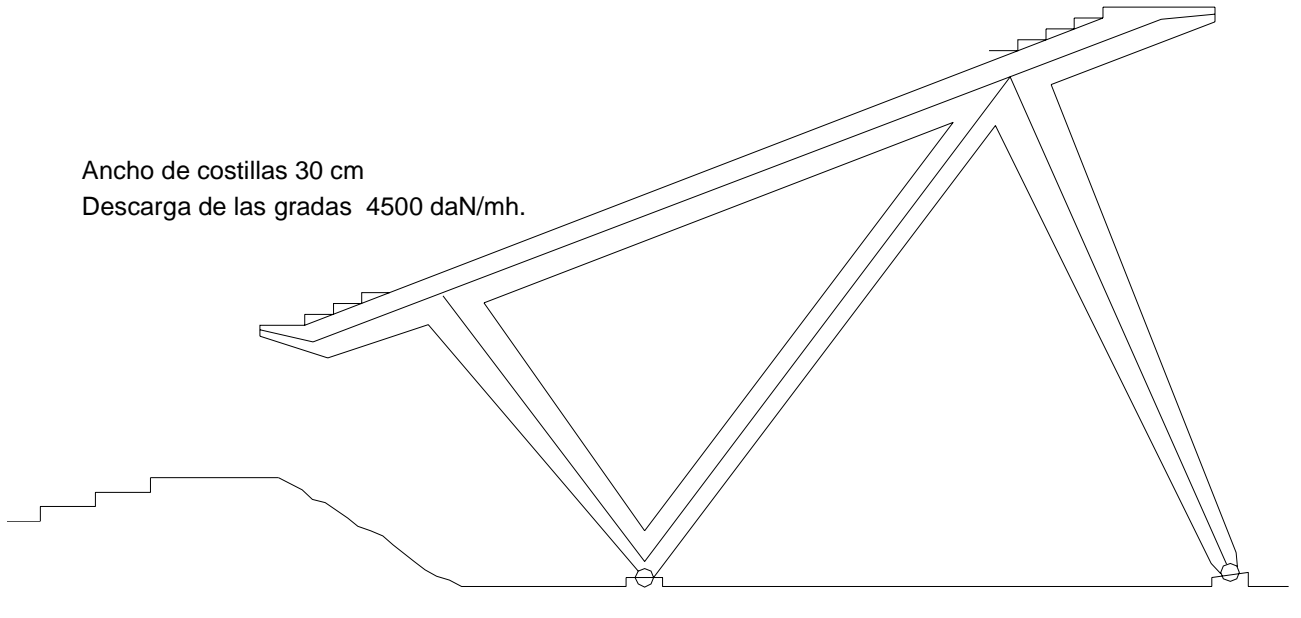


Diagrama de solicitaciones, y de tracciones provocadas por el flector. Descargas y reacciones en los apoyos. Estudio de secciones de interés (críticas) y propuesta, de ajuste, en caso de ser necesario.

4) Tribuna descubierta del Estadio en Zagreb, Yugoslavia.

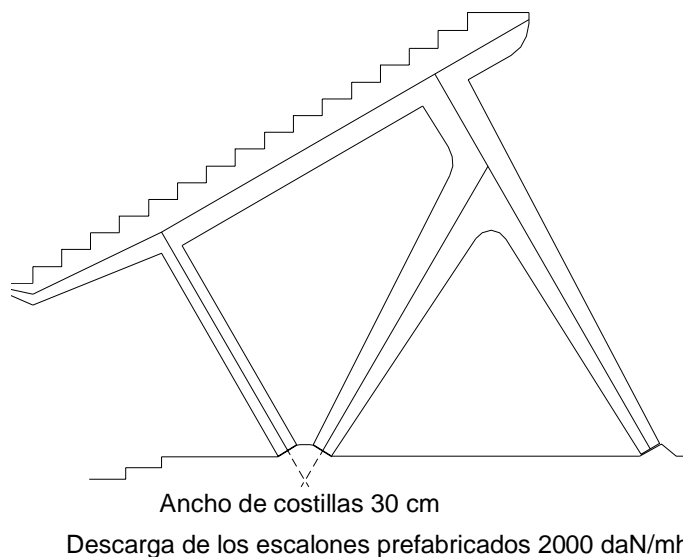
Documento: L'architecture d'aujourd'hui N°. 64. pág, 15.



Diagramas de solicitaciones. Descargas y reacciones en los apoyos. Estudio de secciones de interés (críticas) y propuesta de ajuste en caso de ser necesario.

5) Tribuna descubierta del estadio de Pescara, Italia.

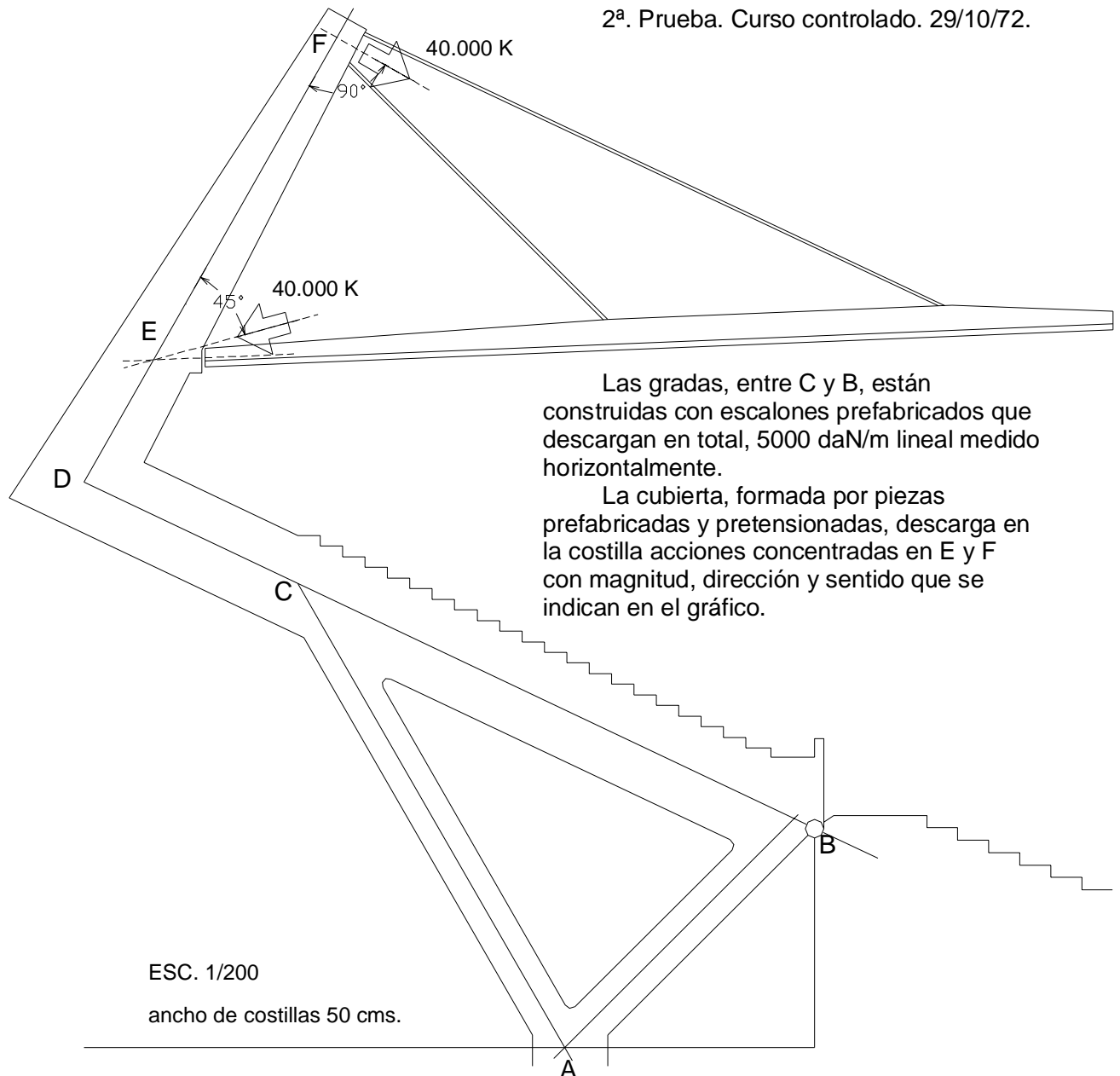
Documento: L'architecture d'aujourd'hui N°. 76. pág, 6.



Diagramas de solicitaciones y tracciones provocadas por el flector. Descargas y reacciones en los apoyos. Estudio de secciones de interés (críticas) y propuesta de ajuste en caso de ser necesario.

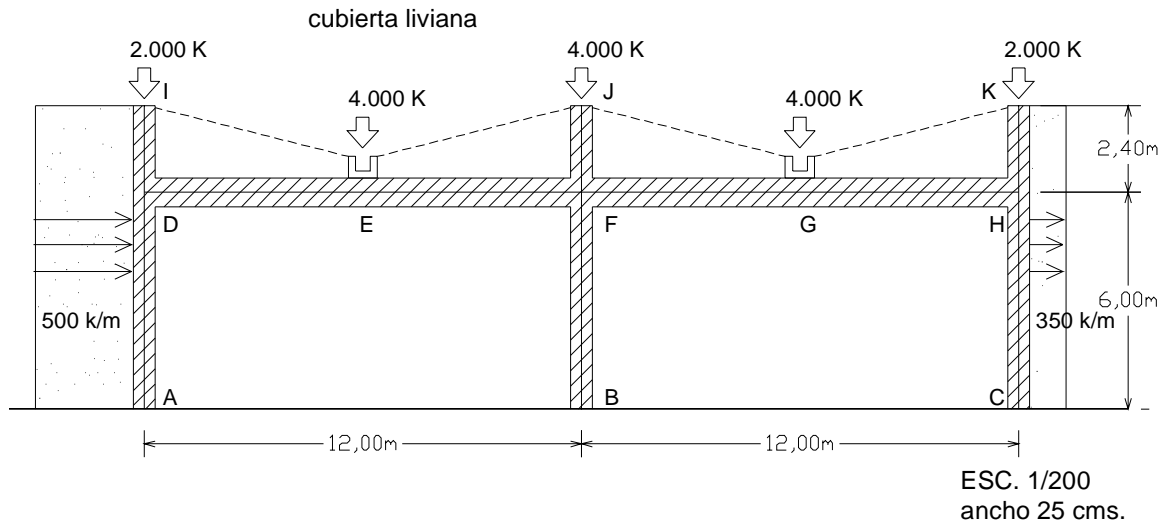
6) Tribuna cubierta del Estadio Deportivo de la ciudad de Dusseldorf (Alemania), para el Mundial de 1974.

Documento: Boletín del Cemento Portland Argentino. Año V. N.º. 24. Setiembre- octubre de 1971. pág. 2 y 3.



Se pide diagramas de solicitaciones y de tracciones (provocadas por el momento flector) solamente en los tramos DC y CB, realizando todas las operaciones previas necesarias a tal fin. En esos tramos, estudiar la sección que se entienda más crítica y ajustar la forma en caso de ser conveniente.

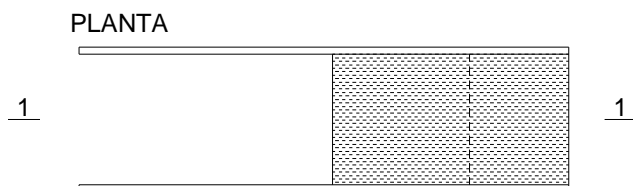
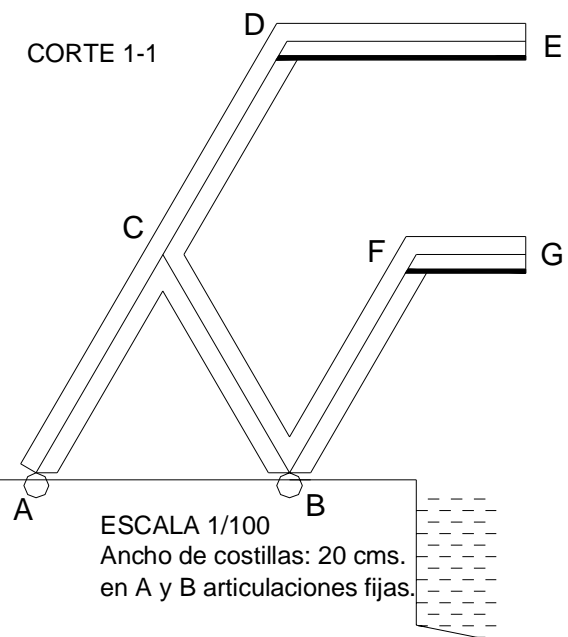
7) Parte escrita del examen del 28/8/86. Tema basado en un pabellón dentro del predio para exposiciones ganaderas (Prado)



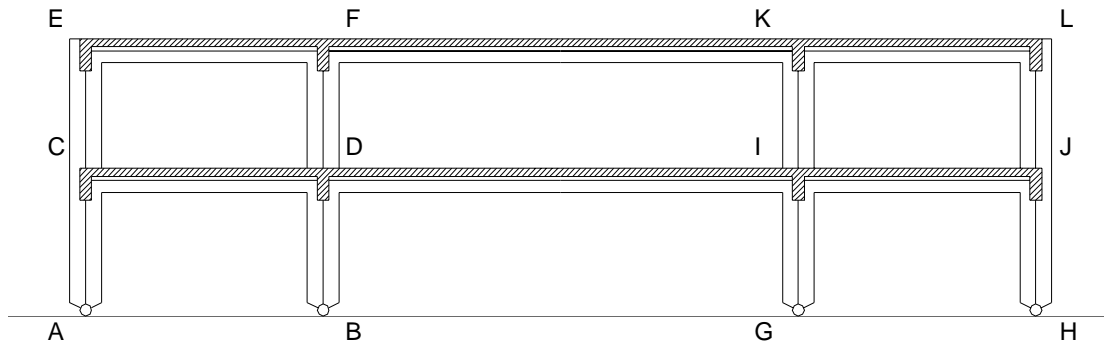
Se pide: *Diagramas de solicitaciones en todas las barras y diagramas de tracciones provocadas por el flector.
 *Reacciones de apoyos.
 *Verificación de secciones críticas, con propuesta de ajuste en los casos en que no fueran viables.

8) Prueba escrita 4to. período ordinario del 14/11/72.

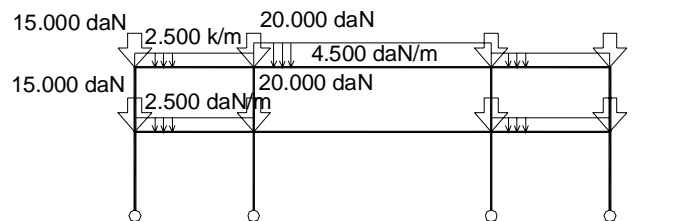
Se indica la estructura de trampolín armado, pulida y pintada al epoxi, que conforma un trampolín el borde de una piscina de dos plataformas de espesor 10 cm y que soportan una sobrecarga de 300 daN/m².



9) Curso controlado 1987: 1ª prueba parcial, 6/9/87.



Ancho 20 cm



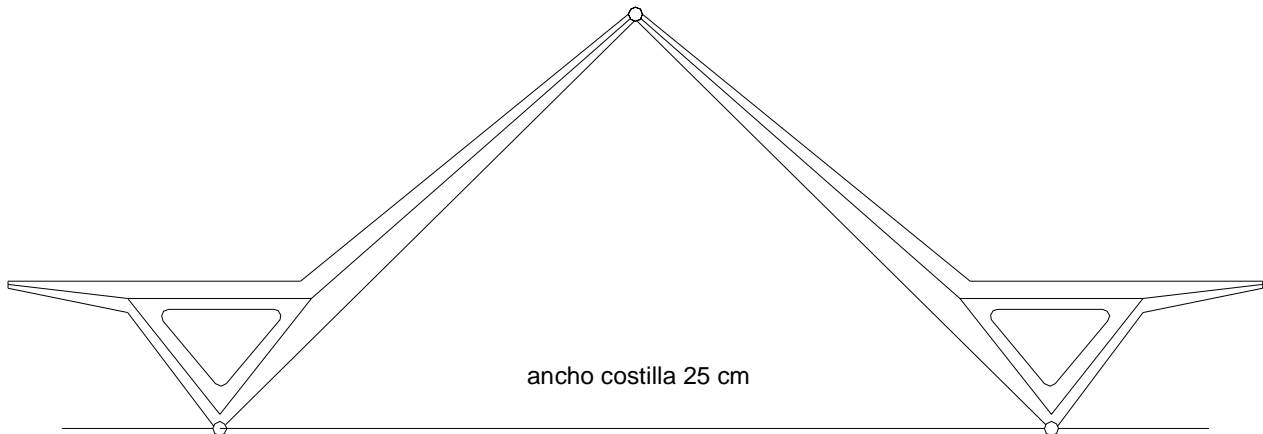
Estructura continua de hormigón armado, basado en el anteproyecto para un Liceo en Montevideo, cubriendo la parte central el SUM.

Las losas (macizas y de 15 cm de espesor) y las vigas transversales descargan sobre la costilla según el esquema que se indica.

Diagramas de solicitaciones en todos los tramos, y de tracciones provocadas por el flector. Determinar reacciones de apoyo.

Estudio de secciones comprometidas, y ajuste de forma en caso de ser necesario

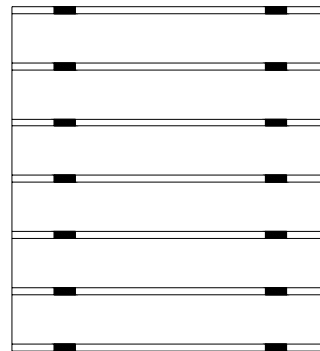
10) Edificio para alojamiento de los animales en el predio de una exposición- feria ganadera. Zona boxes.



Se indica una de las costillas que, en H.A. y ubicadas a distancias iguales, definen el volumen y soportan el techo formado por tirantería de madera y cubierta de chapa acanalada de aluminio.

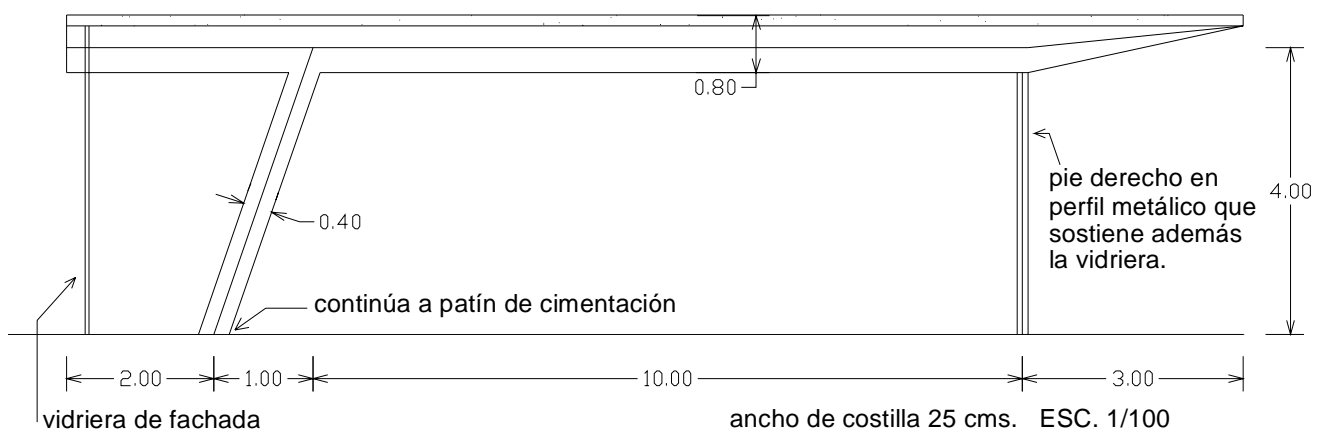
La descarga de este techo sobre cada costilla es de 600 daN/ml. Según la dirección de cada parte.

Diagrama de solicitaciones, y de tracciones provocadas por el flector. Descargas y reacciones en los apoyos. Estudio de secciones de interés (crítica) y propuesta de ajuste en caso de ser necesario.



planta

11) Pabellón de una exposición indicado en corte transversal.



Se muestra una de las costillas que, ubicadas cada 5 mts. Soporta la lámina de techo construida en losa "Doublex" cuyos moldes llegan hasta la costilla.

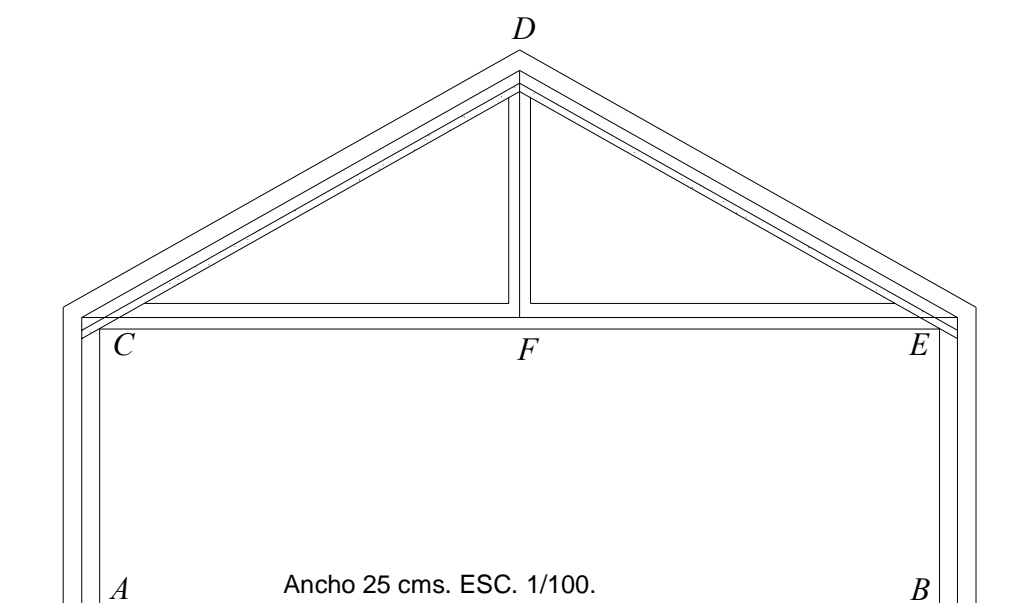
El techo descarga en total, 2.000 daN/ml.

Diagrama de solicitaciones, y de tracciones provocadas por el flector.

Descargas y reacciones en los apoyos.

Estudio de secciones de interés (críticas) y propuesta de ajuste, en caso de ser necesario.

12) Examen, parte escrita , del 16/12/75.



Una serie de costillas de hormigón armado con la forma indicada en el corte adjunto, soportan un techo formado por una losa maciza de 10 cm de espesor, definiendo el conjunto un galpón para depósito.

El techo descarga 1.800 daN/ml. inclinado de tramo en la costilla.

Diagramas de solicitaciones en todos los tramos, y diagrama de tracciones provocadas por el flector.

Determinar descargas y reacciones en los apoyos *A* y *B*.

Verificar secciones críticas y propuesta de ajuste si se cree conveniente.

13) Estructura continua de hormigón armado que sostiene techo y entrepiso.

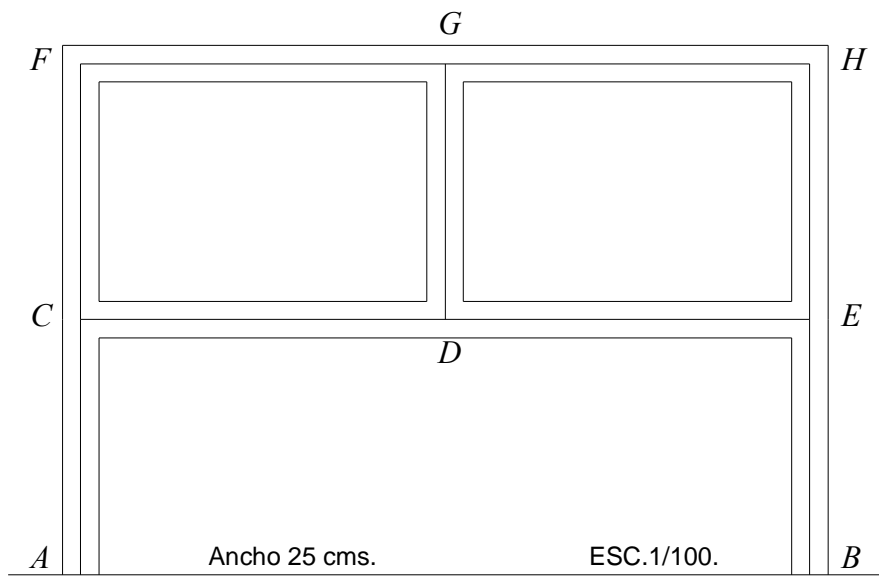
Descarga del techo: 3.000 daN/m en *F-G-H*.

Descarga del entrepiso. 5.000 daN/m en *C-D-E*.

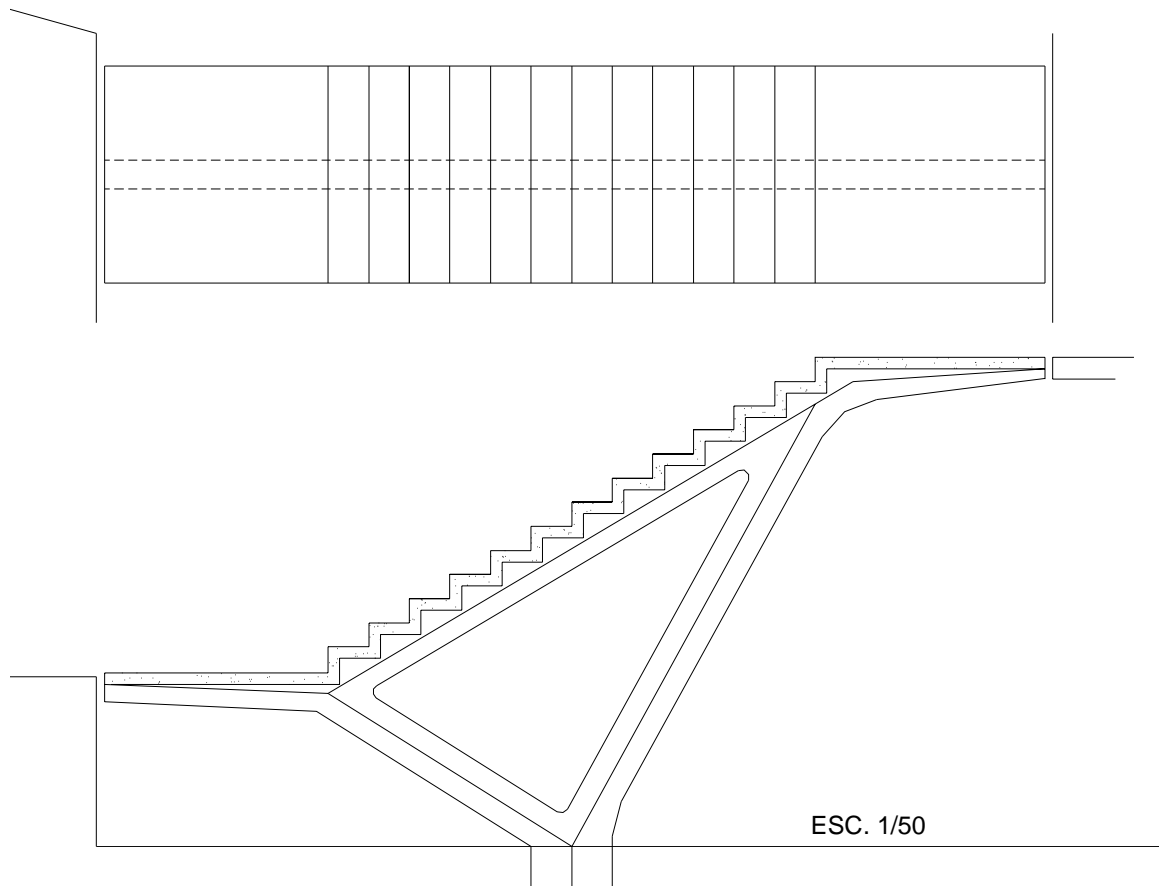
Diagramas de solicitaciones (flector, axíl y cortante) en todos los tramos y diagrama de tracciones provocadas por el flector.

Descargas y reacciones en los apoyos.

Verificación de secciones críticas y propuesta de ajuste si se entiende necesario.



14) Tramo de escalera para salvar un desnivel en una galería comercial.



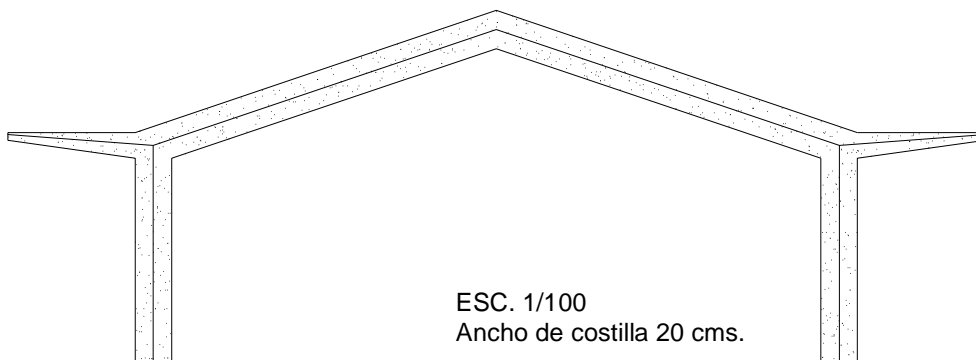
Se construye totalmente en hormigón armado revestido de alfombra de polivinilo para pavimento, y se encuentra independizada de los entrepisos por juntas de construcción.

Diagramas de solicitaciones. Descargas y reacciones en los apoyos. Estudio de secciones de interés (críticas) y propuesta de ajuste, en caso de ser necesario.

15) Preau, con vinculación bilateral con los espacios exteriores, en una escuela de enseñanza primaria.

El techo descarga 500 daN/m. lineal de tramo.

Diagramas de solicitaciones y de tracciones provocadas por el flector. Descargas y reacciones en los apoyos. Estudio de secciones de interés (críticas) y propuesta de ajuste, en caso de ser necesario.



8 –TABLAS Y ABACOS

Las tablas se pueden descargar de la página web de Estabilidad 2, siguiendo el siguiente camino:

Material de Apoyo

↳ Tablas y otras herramientas a utilizar en el práctico

↳ Tema / Método de Cross