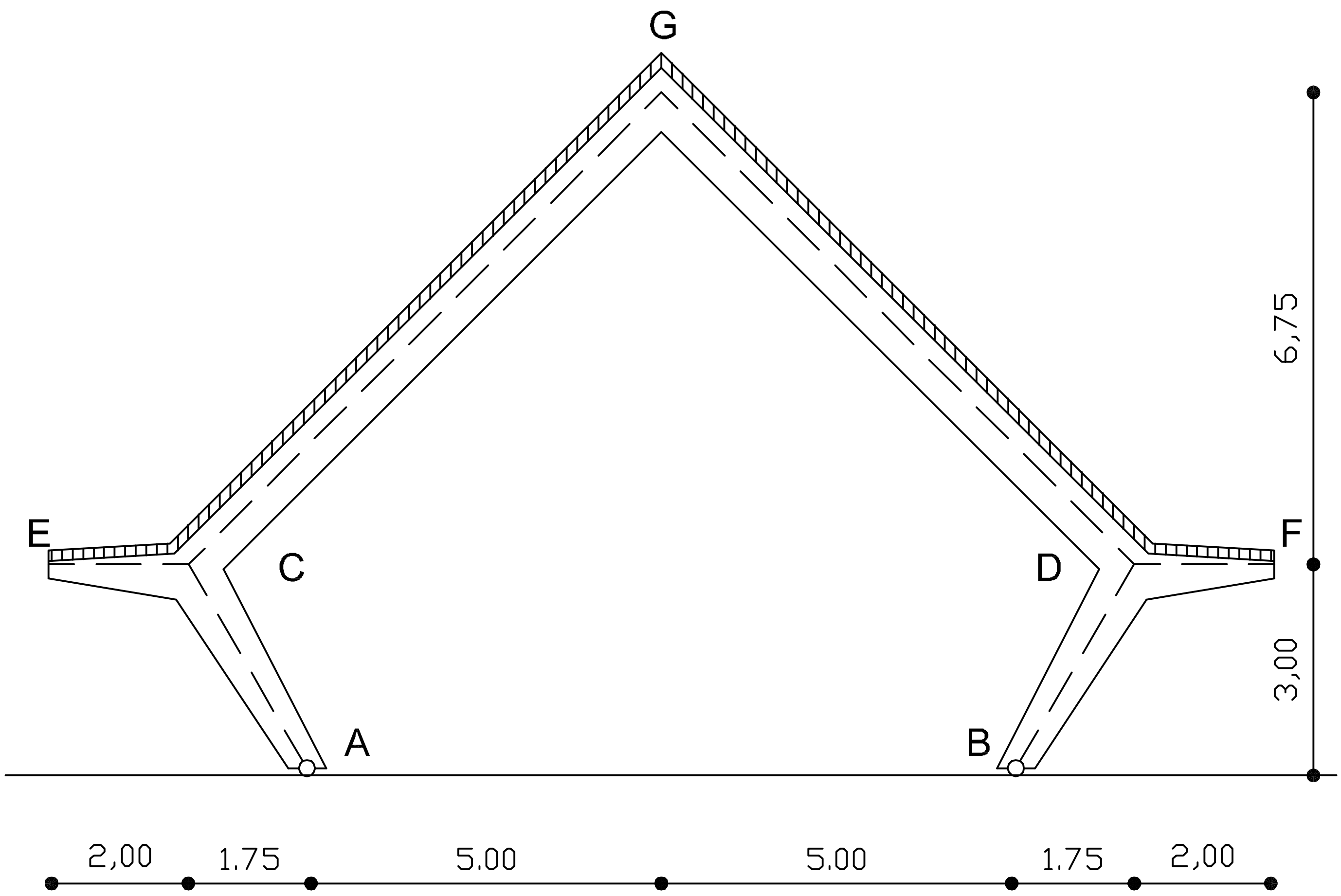
ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES II



Estudiar las solicitaciones de la estructura que se indica por el Método de Cross.
Los tramos AC y BD tienen, en su apoyo articulado, una sección de 20 x 47 cm, y en el otro extremo, de 20 x 80 cm. Los tramos CG y GD son de sección constante, de 20 x 80 cm. Las ménsulas EC y DF tienen una sección de 20 x 40 cm en sus extremos libres y de 20 x 60 cm en los empotramientos.
Sobre los tramos EC, CG, GD y DF una losa maciza de 15 cm de espesor descarga 2000 daN/m.t.

Se pide trazar los diagramas de solicitaciones de todas las barras e indicar las reacciones en los apoyos.

Observación de la Estructura:
- Costilla de Hormigón Armado cuyos apoyos en A y B son articulaciones:
- Los tramos EC, CG, GD y DF reciben descargas de losa maciza, por lo que dichos tramos tendrán una sección T mientras que AC y BD tienen sección rectangular.
- Por forma, carga y vínculos es una estructura simétrica, donde el eje de simetría pasa por un nudo.

Determinación de Cargas:
Se determinarán los pesos propios de cada barra más sus descargas.

LONGITUD: AC $\sqrt{1{,}75^2 + 3^2} = 3{,}47$

CG $\sqrt{6{,}75^2 + 6{,}75^2} = 9{,}55$

CARGAS: AC $p.p. = 0{,}20 \times \dfrac{(0{,}47 + 0{,}80)}{2} \times 2500 = 317{,}5 \text{ daN/m}$

EC $p.p. = 0{,}20 \times \dfrac{(0{,}25 + 0{,}45)}{2} \times 2500 = 175 \text{ daN/m}$

descarga de la losa = 2000 daN/m

2175 daN/m

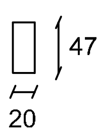
CG $p.p. = 0{,}20 \times (0{,}80 - 0{,}15) \times 2500 = 325 \text{ daN/m}$

descarga de la losa = 2000 daN/m

2325 daN/m

Relación de Inercias:
Para el cálculo de las inercias relativas, se toma la menor de las inercias de los tramos que intervienen con sus rigideces. No se consideran las barras en cuyos extremos conocemos los momentos finales, como es el caso de las ménsulas.
Relacionamos la menor inercia del tramo considerado con la menor de las inercias de la estructura.
Determinamos primero las dimensiones de la sección:

Barras AC y BD: menor sección del tramo en apoyos A y D.

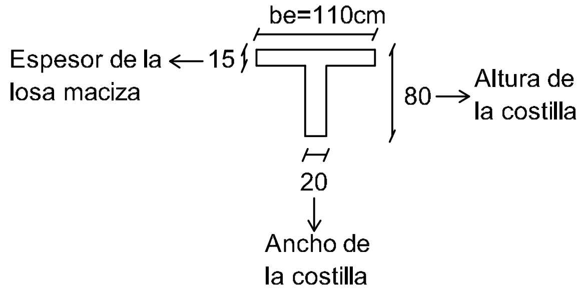


$$I = \frac{b.h^3}{12}$$

$$I = \frac{20.47^3}{12} = 173038$$

Como es la menor sección de toda la estructura, la vamos a tomar como 1 y relacionamos las inercias de las demás barras con ésta.

Barras CG y GD: sección "T"



be = 6 hf+bw = 6x15+20 = 110 cm

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{bw}{be} = \dfrac{20}{110} = 0{,}182 \\ \dfrac{hf}{h} = \dfrac{15}{80} = 0{,}188 \end{array}\right\} \psi = 0{,}36$$

$$I = \frac{0{,}36 \times 110 \times 80^3}{12} = 1689600$$

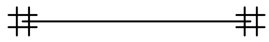
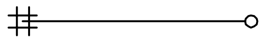
Relación: Barra CG y GD $\dfrac{I_T}{I_0} = \dfrac{1689600}{173038} = 9{,}76$

Barra AC = BD $I_r = 1$

Determinación de Coeficientes (rigidez, α, β, I_r)

Coeficientes α y β

Para Inercia Constante:

	α	β
	1	0,5
	0,75	0

Para Inercia Variable:
Debemos utilizar las tablas 5.2.1, 5.2.2 y 5.2.3; en ellas se indican 3 casos de variación de inercia:

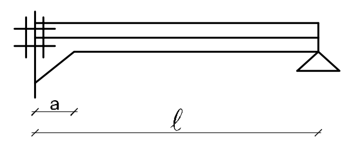
Empotrado - Empotrado

variación de forma simétrica

Empotrado - Empotrado

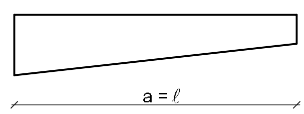
variación de forma asimétrica

Empotrado - Articulado



variación de forma asimétrica

En nuestro caso: Barra AC = BD



Se ingresa con la relación $\frac{a}{\ell} \Rightarrow \frac{a}{\ell} = 1$

Otros valores que obtenemos:

- Coeficientes m y $\overline{m}$ para determinar M.E.P.
- Coeficiente α
- Coeficiente β de transmisión, que en este caso no hay porque no hay transmisión hacia la articulación

Para hallar cada uno de estos coeficientes, la otra entrada es la relación de inercias del tramo:

$$\frac{I_m}{I_o} = \frac{I\ \text{mínima}}{I\ \text{máxima}} \quad \text{del tramo}$$

$$\frac{I_m}{I_o} = \left(\frac{47}{80}\right)^3 = 0{,}203 \quad \text{(se simplifica b y el denominador 12)}$$

$$\frac{a}{\ell} = 1$$

K = 0,156

α = 0,2551

Rigidez χ

La rigidez es la mayor o menor capacidad de una barra a ser deformada por un giro.

$$\chi = \frac{I_r \cdot E}{\ell}$$

Barra AC $\Rightarrow$ $\chi = \frac{1}{3{,}47} = 0{,}288$

Barra CG $\Rightarrow$ $\chi = \frac{9{,}76}{9{,}55} = 1{,}022$

Se simplifica E porque es el mismo en todas las barras

Confeccionamos una tabla reuniendo todos los datos:

BARRA	I	Ir	β	α	ℓ	χ	$\alpha\chi$
AC	173038	1	0	2,551	3,47	0,288	0,735
CG	1689600	9,76	0,5	1	9,55	1,022	1,022

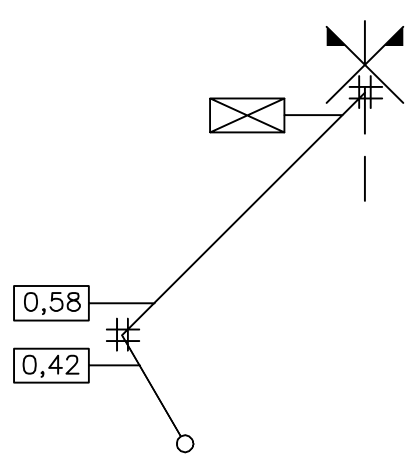
Coeficientes de Repartición:
El momento no equilibrado en un nudo se reparte entre los tramos concurrentes a ese mismo nudo, proporcionalmente a sus rigideces.
La suma de los coeficientes de repartición debe ser igual a 1.

$$r = \frac{\alpha.\chi}{\Sigma\alpha.\chi}$$

Nudo C: $\Sigma\alpha.\chi = 1,757$

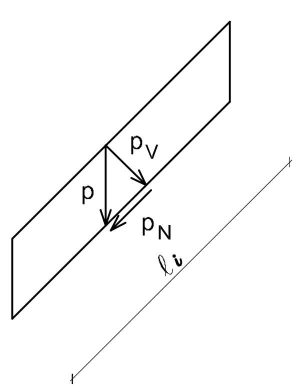
$$\left.\begin{array}{l} r_{CA} = \dfrac{0,735}{1,757} = 0,42 \\[2ex] r_{CG} = \dfrac{1,022}{1,757} = 0,58 \end{array}\right] \text{suman 1}$$

Nudo G:
Estamos en un caso de simetría por nudo: los momentos freno son iguales pero de sentido contrario. Por ser simétrica a cada lado del apoyo, llegarán momentos transmitidos desde el otro extremo de la barra, también iguales y de sentido contrario.
Trabajamos con media estructura, quedando el nudo central frenado y el momento en ese extremo será el inicial (M.E.P.) más los transmitidos.



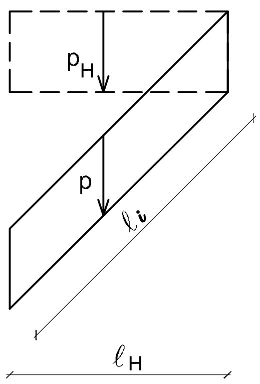
Momentos de Empotramiento Perfecto (M.E.P.):
Son momentos producidos por fuerzas (o cargas) normales al eje de la barra.
En el caso de barras inclinadas hay 2 procedimientos:

1º) Descomponemos la carga según direcciones perpendiculares y paralelas al eje de la barra.
Tomamos el valor de la carga perpendicular al eje y la luz real (inclinada) de la barra.



$$M = \frac{p_V \cdot \ell i^2}{12}$$

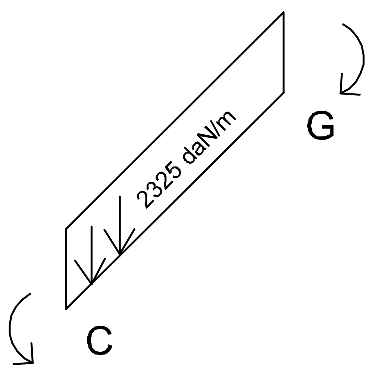
2º) "Horizontalizamos" la carga distribuyéndola en la proyección horizontal de la luz (ℓ_H)



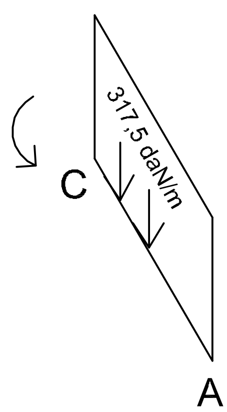
$$p_H = \frac{p \cdot \ell_i}{\ell_H} \quad \text{y} \quad M = \frac{p_H \cdot \ell_H^2}{12}$$

Si sustituimos: $$\boxed{M = \frac{p \cdot \ell_i \cdot \ell_H}{12}}$$

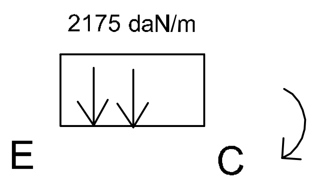
En nuestro ejemplo:



$$\text{M.E.P.} = \frac{p \cdot \ell_i \cdot \ell_H}{12} = \frac{2325x6{,}75x9{,}55}{12} = 12484 \text{ daNm}$$



$$\text{M.E.P.} = p \cdot \ell_H \cdot \ell_i \cdot K = 317{,}5x3{,}47x1{,}75x0{,}156 = 301 \text{ daNm}$$



$$\text{M.E.P.} = \frac{p \cdot \ell^2}{2} = \frac{2175x4}{2} = 4350 \text{ daNm}$$

Primer Cross:

Sólo tenemos reparticiones en el nudo C.

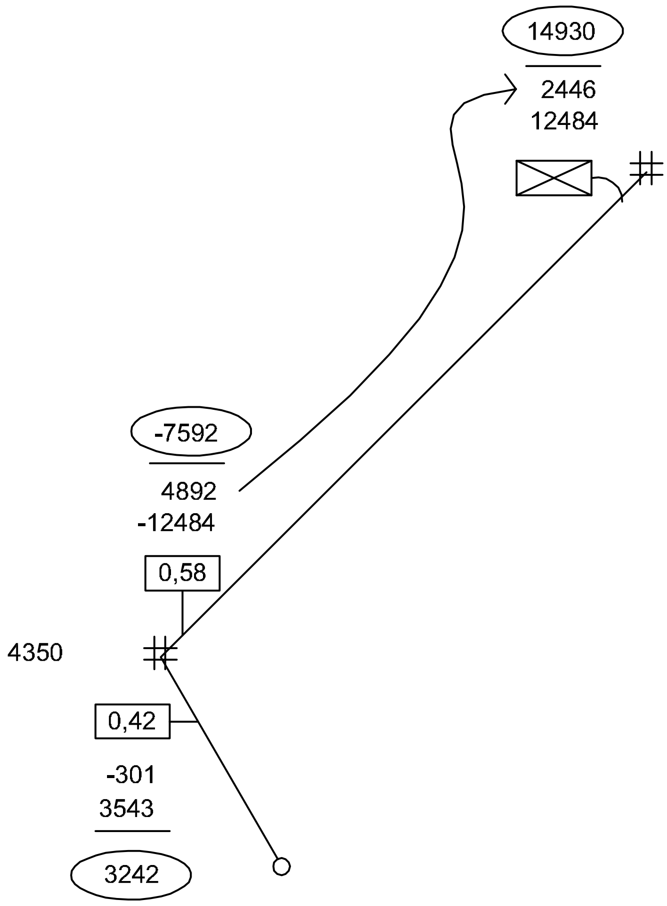
La sumatoria de momentos en el nudo es = -12484 - 301 + 4350 = - 8435

Al soltar el freno se produce un giro y aparece un momento de sentido contrario al de fijación que se reparte entre las barras que correspondan:

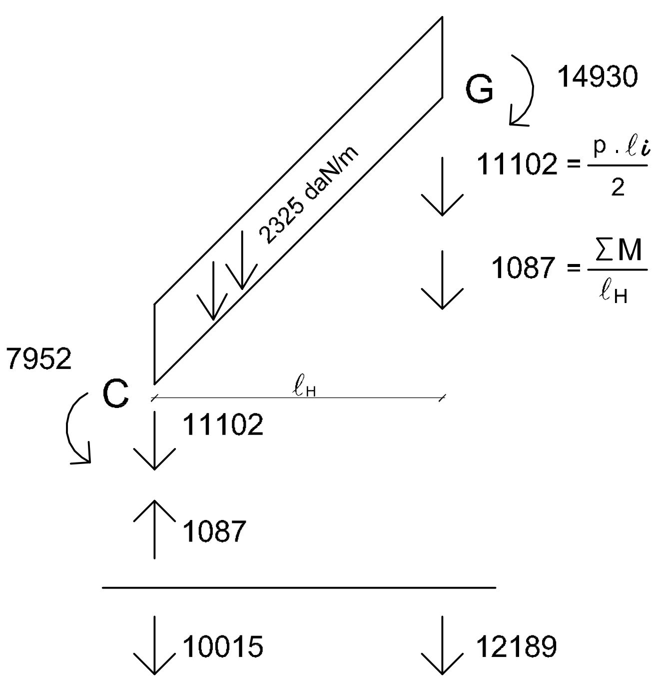
M_{CA} = 8435 x 0,42 = 3543

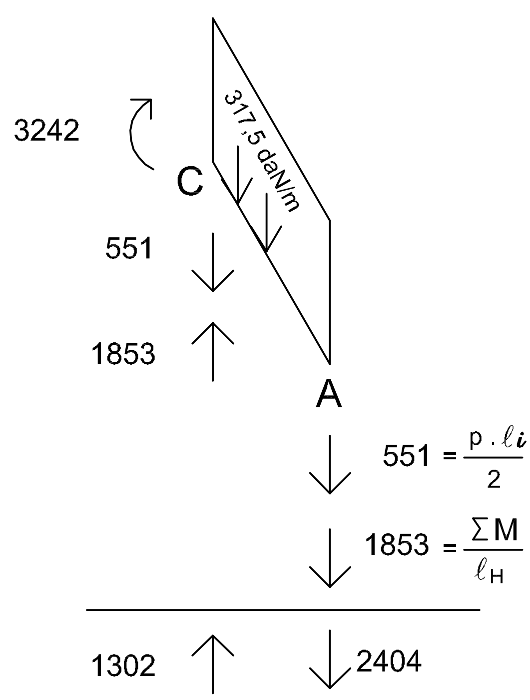
M_{CG} = 8435 x 0,58 = 4892

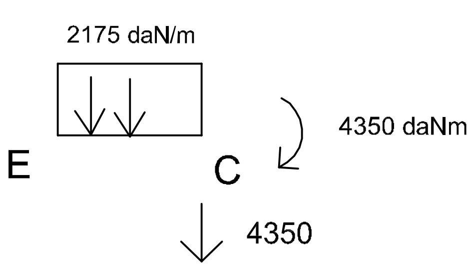
Al apoyo A no se transmite por ser articulación y al nudo G se transmite por β = 0,5



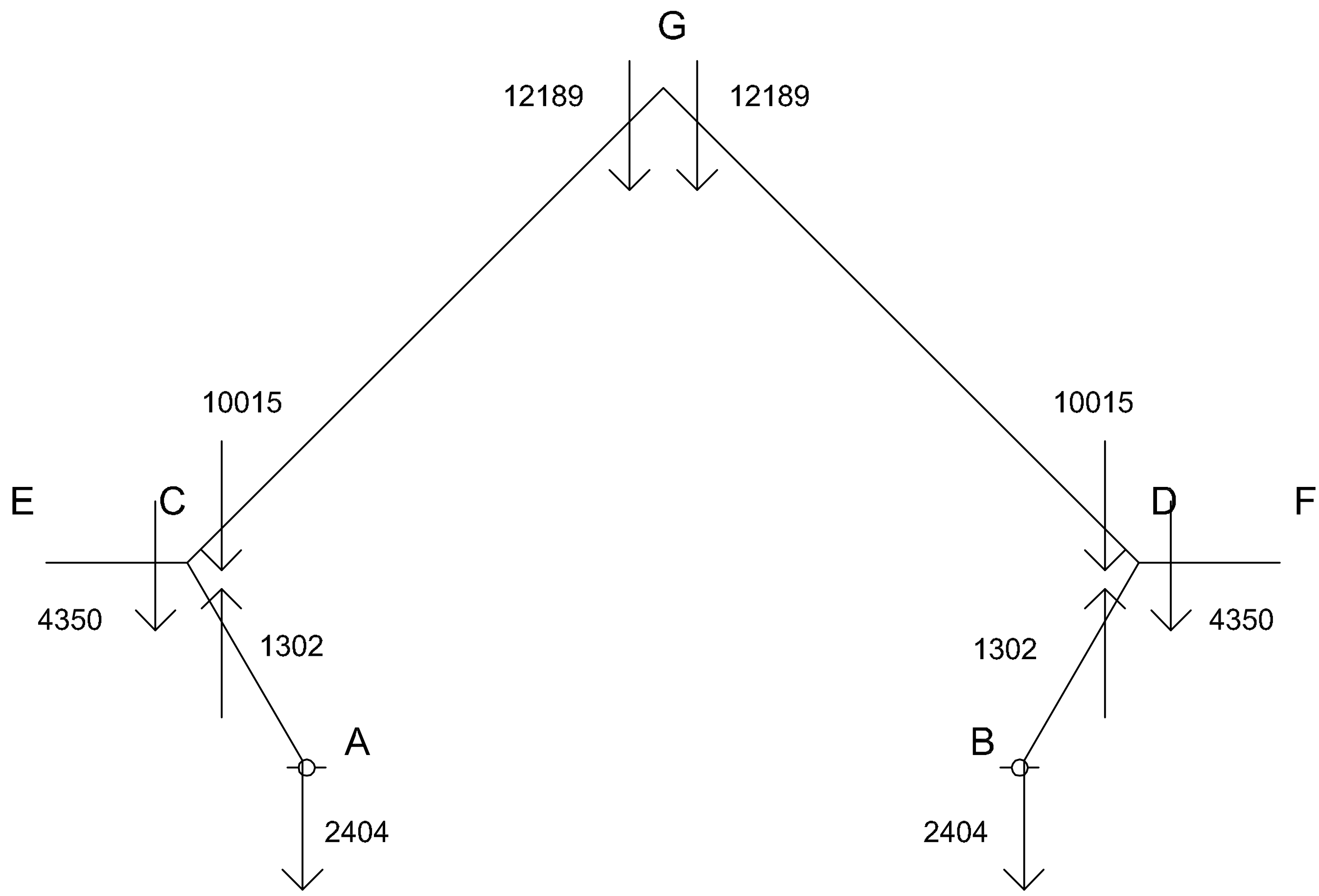
Descargas 1º Cross:
Aislamos cada barra y descargamos las cargas actuantes y los momentos obtenidos en el 1º Cross.

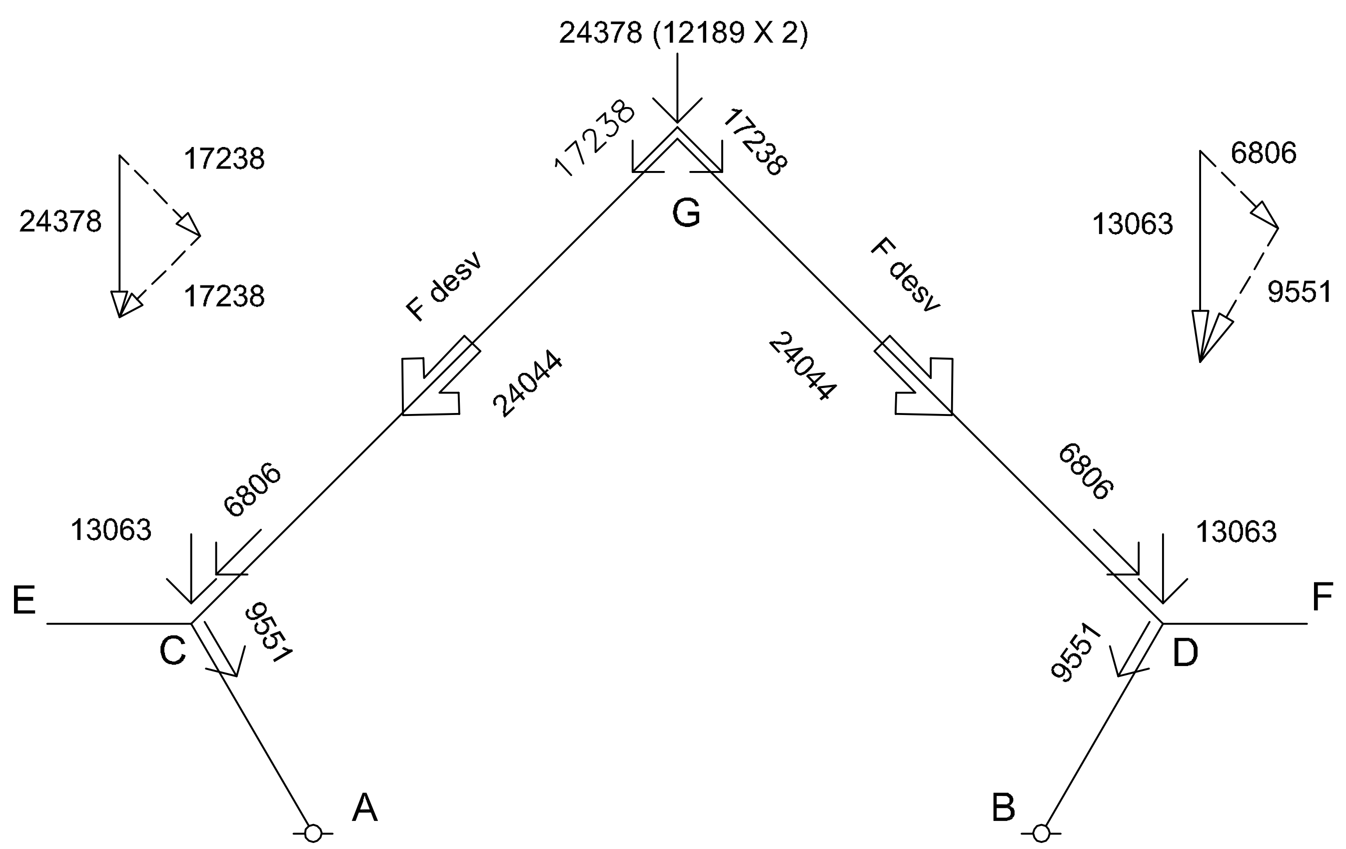






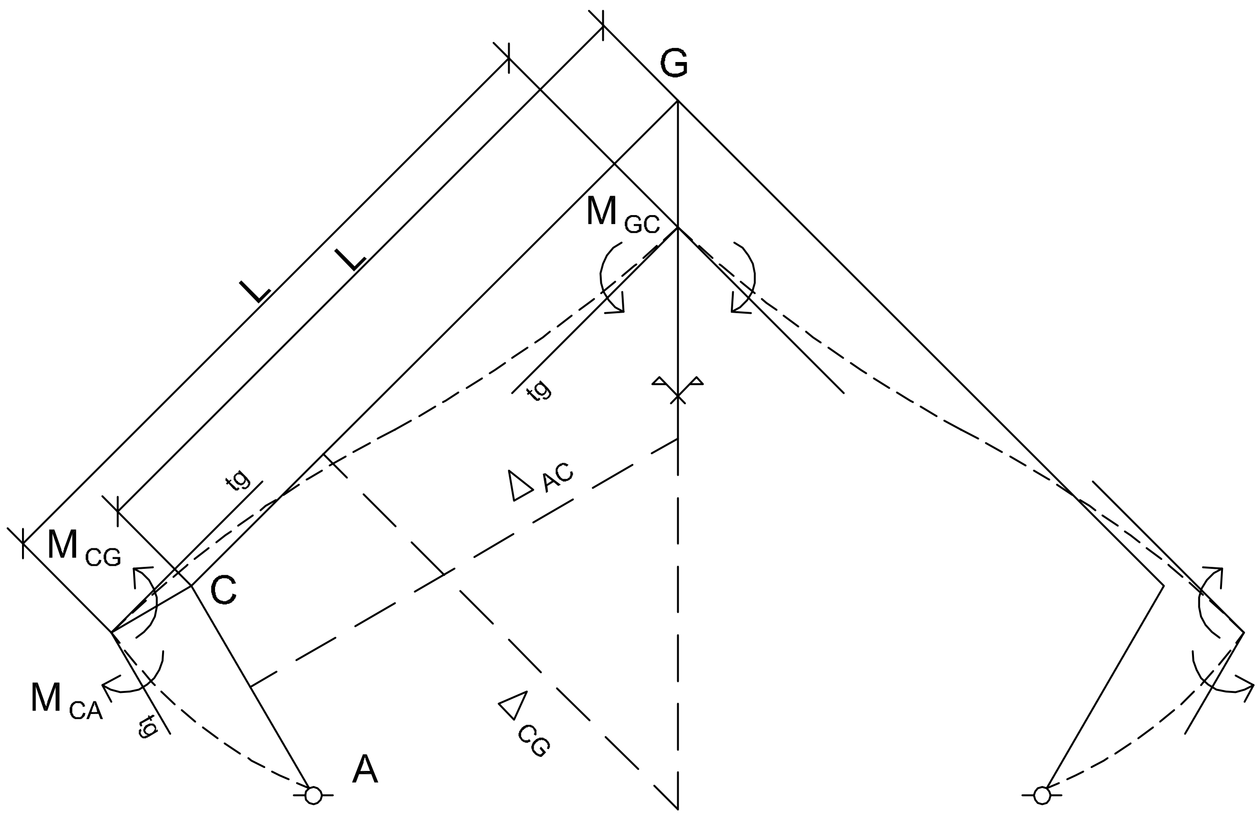
Conducción de Cargas por Caminos Materiales:
Una vez obtenidas las descargas barra por barra, se colocan en la estructura para analizar los caminos materiales que encuentran las fuerzas.





Aparece una fuerza de desviación en la barra CG y por ser estructura simétrica, también en GD.

Trazado de la Deformada:
Para el trazado de la deformada partimos por deformar primero las barra que tienen un extremo fijo (apoyos). Debemos respetar las reglas del trazado:
- Un nudo se desplaza perpendicularmente al eje del tramo.
- La proyección de la longitud del tramo sobre una paralela al eje del mismo es igual a la luz de la barra.
- La tangente a la deformada se mantiene paralela al eje de la barra.



Para medir los desplazamientos de los nudos de cada barra, trazamos perpendiculares a los ejes de cada tramo. Se forma un triángulo que nos permite obtener los valores de los desplazamientos proporcionales a los reales.

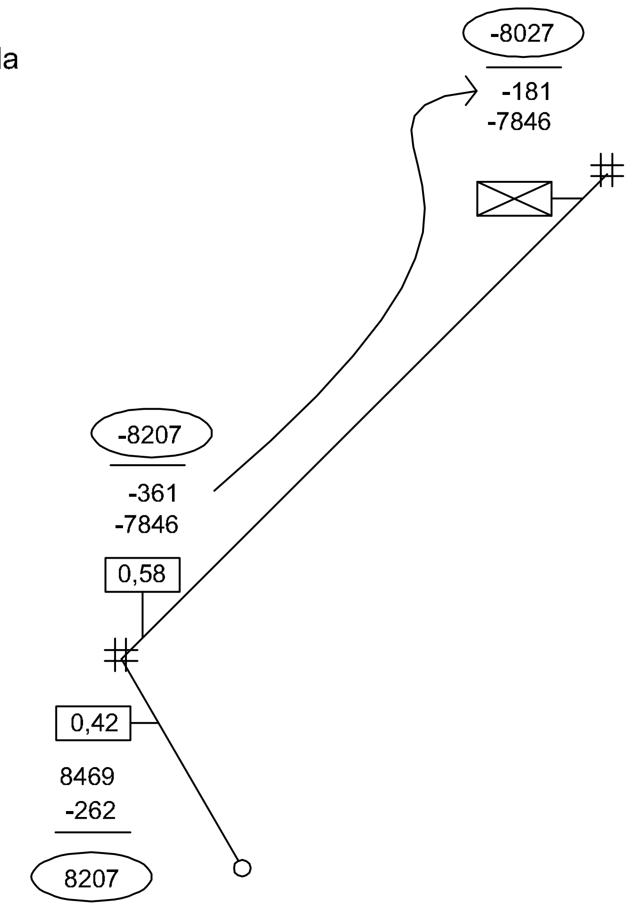
$\Delta_{AC} = 10$

$\Delta_{CG} = 12{,}22$

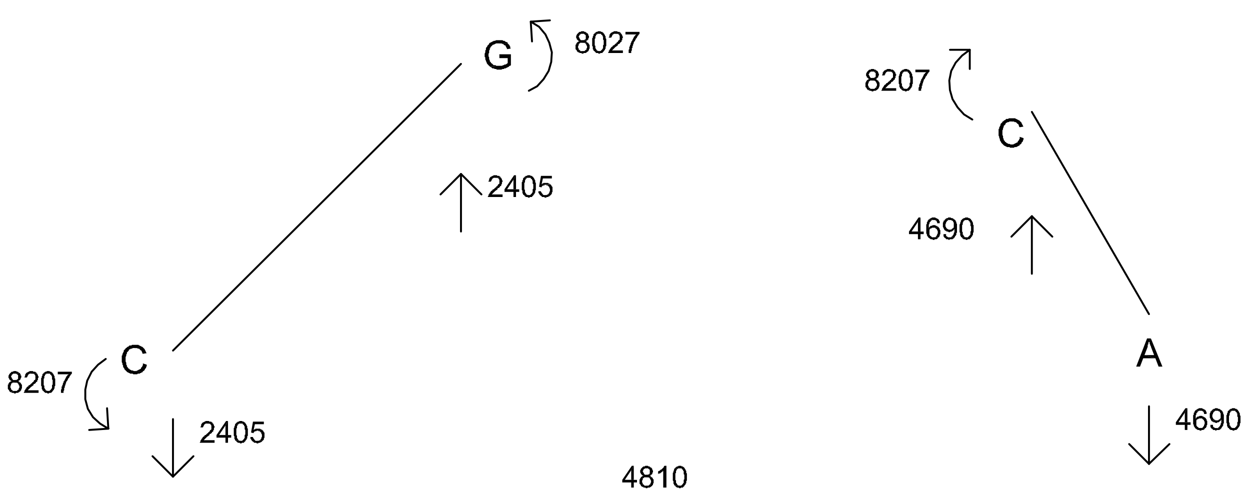
$M_{CA} = 4\ \alpha_{CA} \times \dfrac{\Delta}{L} = 4 \times 2{,}551 \times 0{,}288 \times \dfrac{10}{3{,}47} = 8{,}469$ daNm

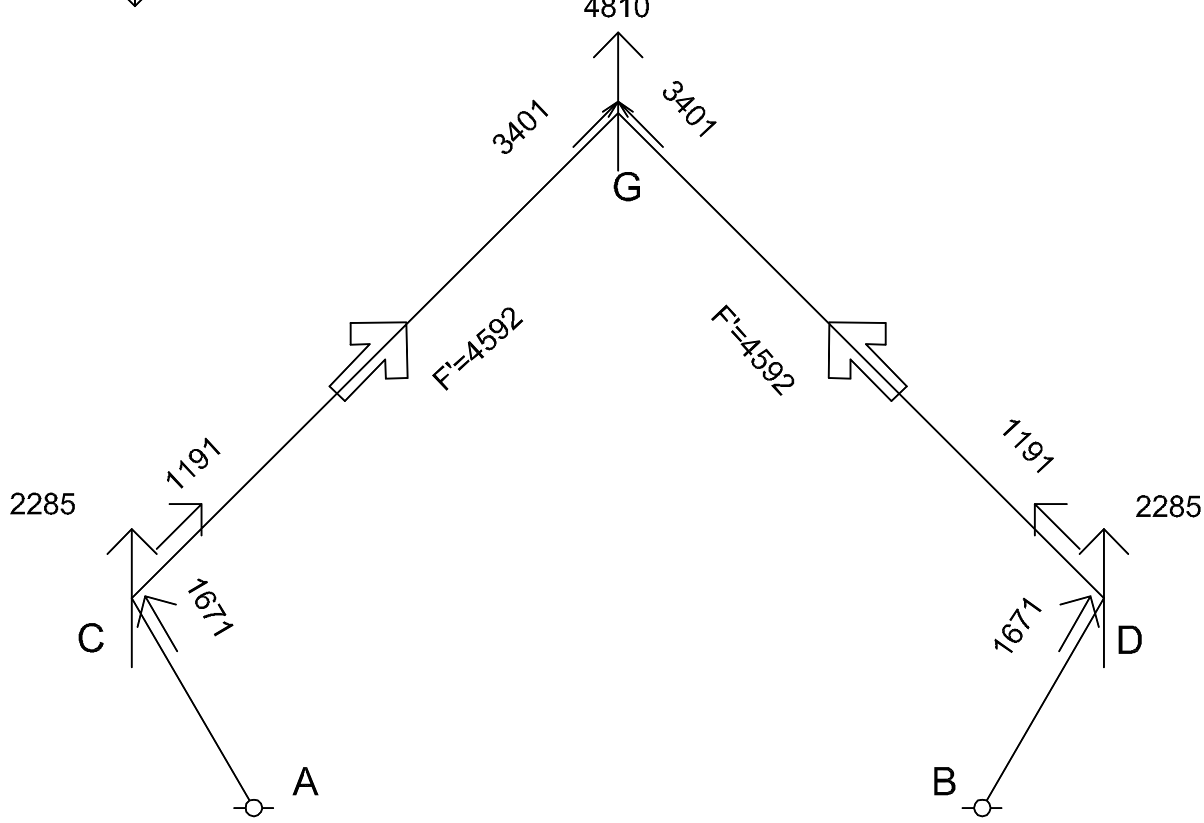
$M_{CG} = M_{GC} = 6 \times 1{,}022 \times \dfrac{12{,}22}{9{,}55} = 7{,}846$ daNm

Segundo Cross:
Se realiza el 2º Cross con los datos obtenidos de la deformada: barras que se deforman, dónde hay momentos y sentido de los momentos.



Descargas 2º Cross:
Sólo de descargan los momentos obtenidos en el 2º Cross.





Obtenemos una Fuerza de Desviación F´, de sentido contrario a F, pero no tiene el mismo valor ya que partimos de valores de Δ arbitrarios, por lo tanto debemos corregirla por un factor α para que quede igual y contraria a F.

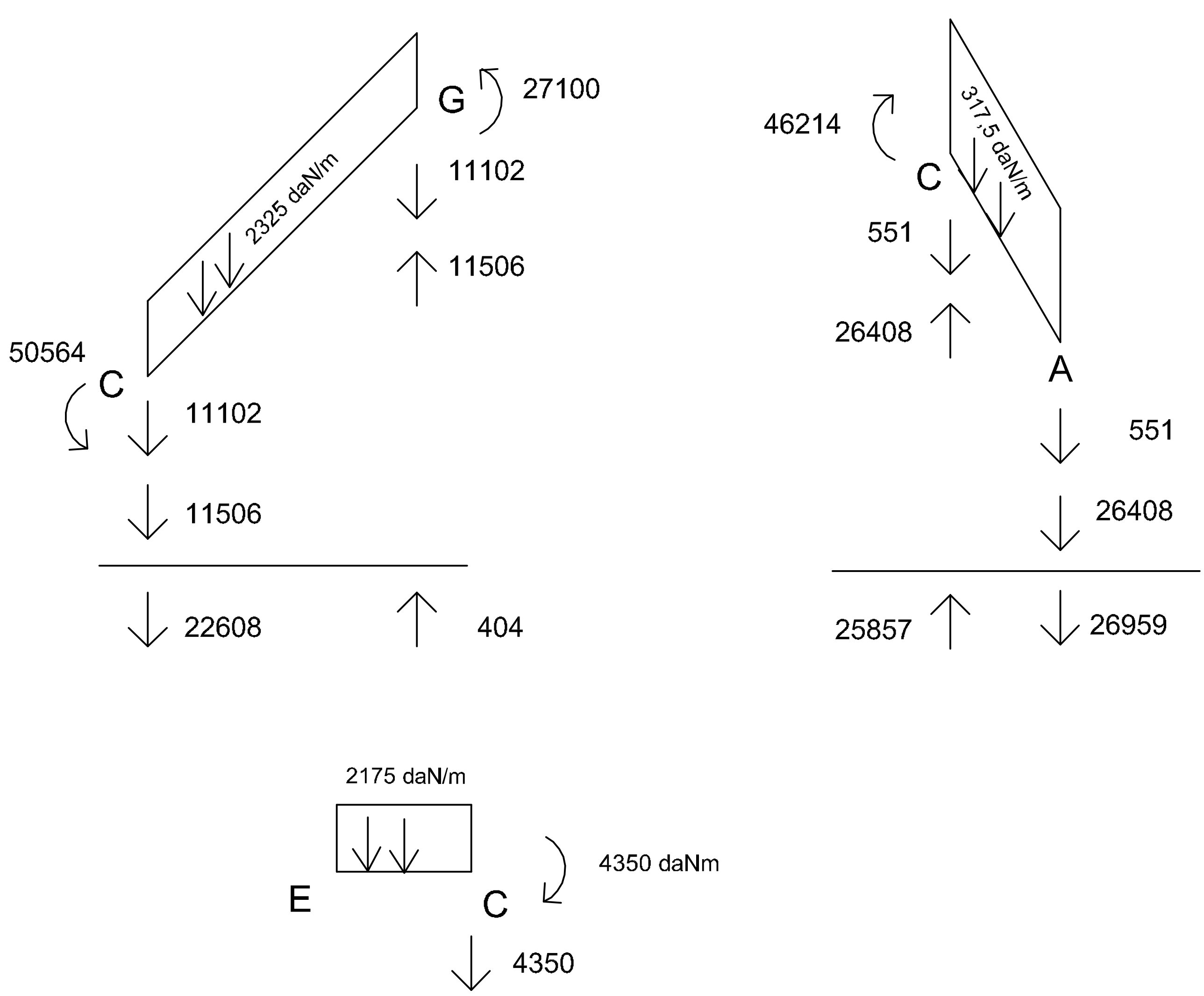
$$F = \alpha . F' \Rightarrow \alpha = \frac{F}{F'} \Rightarrow \alpha = \frac{24044}{4592} = 5{,}236062718$$

Momentos Finales:

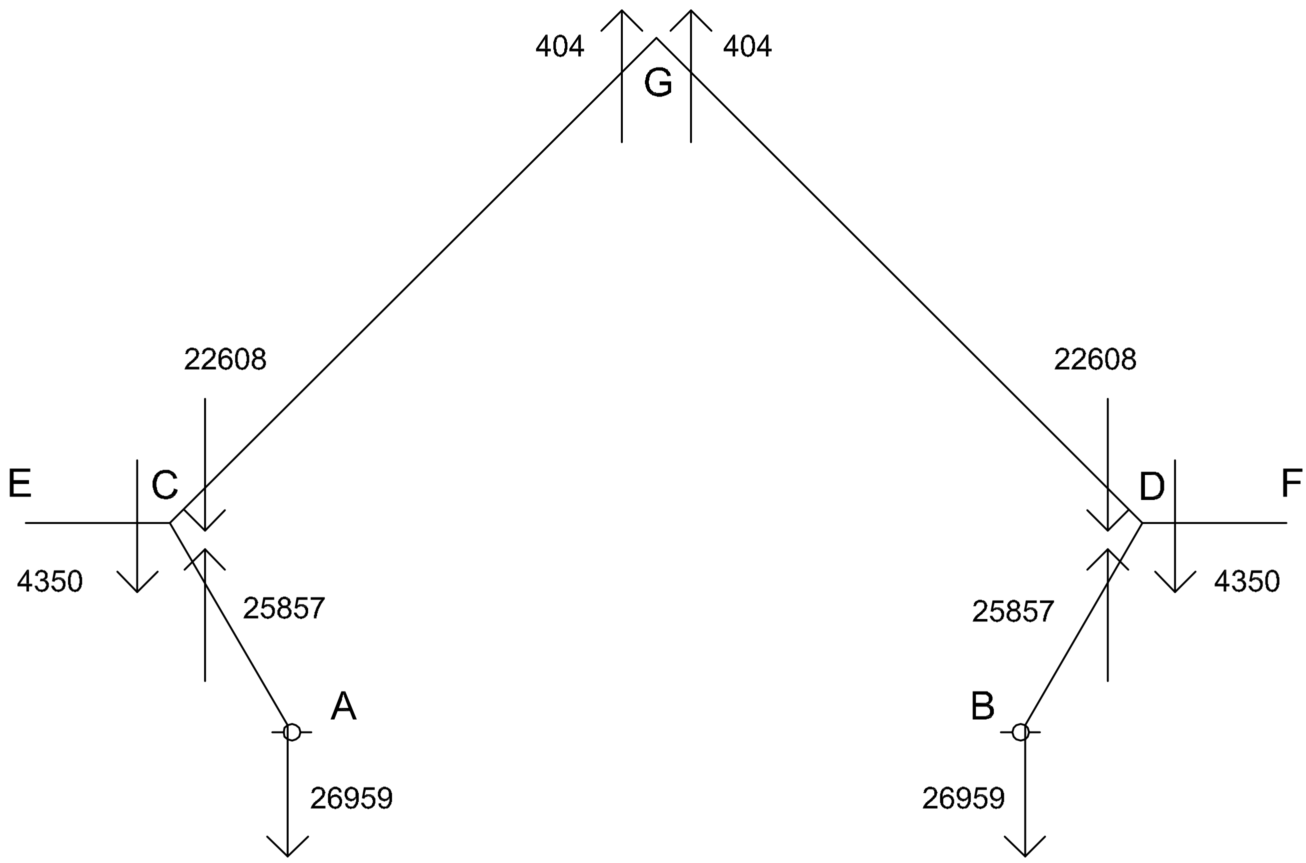
Momentos Finales = Momentos 1º Cross + Momentos 2º Cross x α

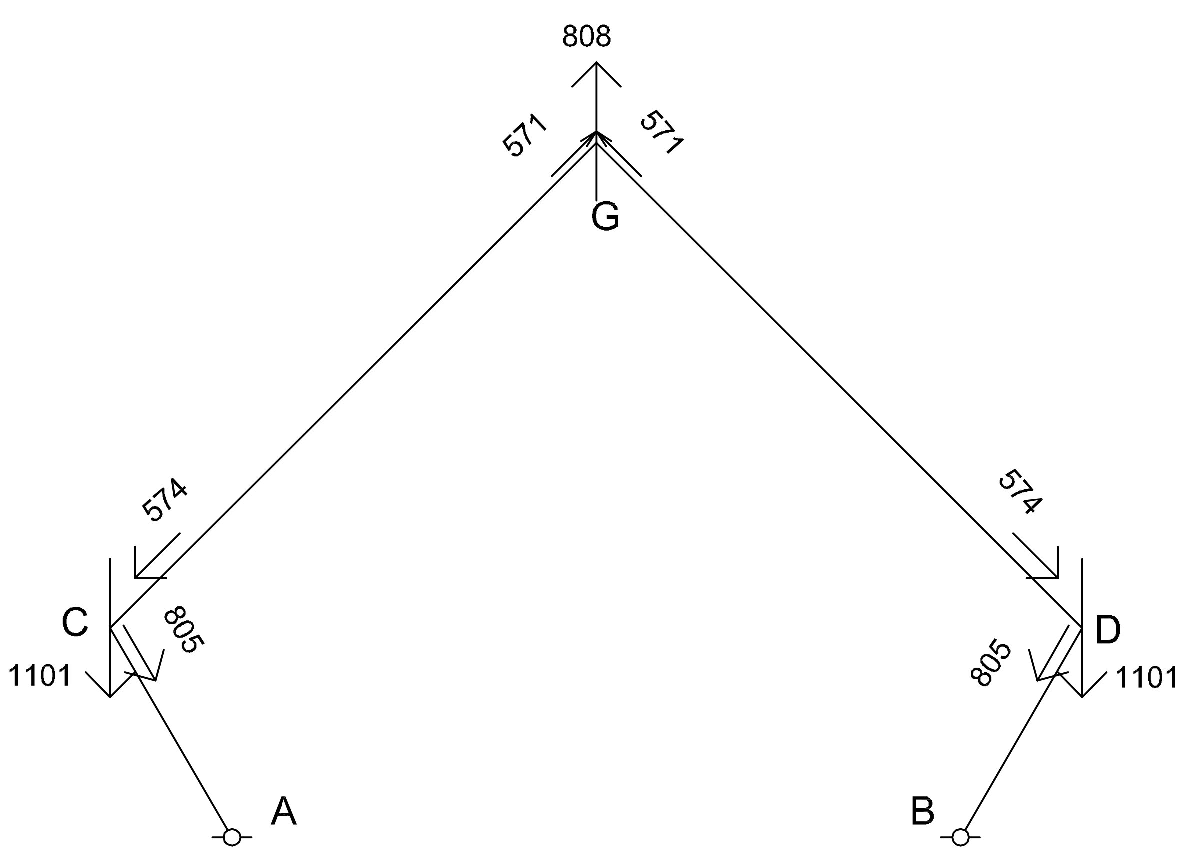
BARRA	Mom. 1º Cross	Mom. 2º Cross x α	Mom. finales
M_{CA}	3242	42972	46214
M_{CG}	-7592	-42972	-50564
M_{GC}	14930	-42030	-27100

Descargas Barra por Barra:
Una vez obtenidos los Momentos Finales hacemos las descargas barra por barra considerando las cargas actuantes y los momentos finales.



Componemos la estructura con todas las descargas para determinar los caminos materiales de las distintas fuerzas y verificar el equilibrio global.





Las fuerzas de la barra CG se equilibran.

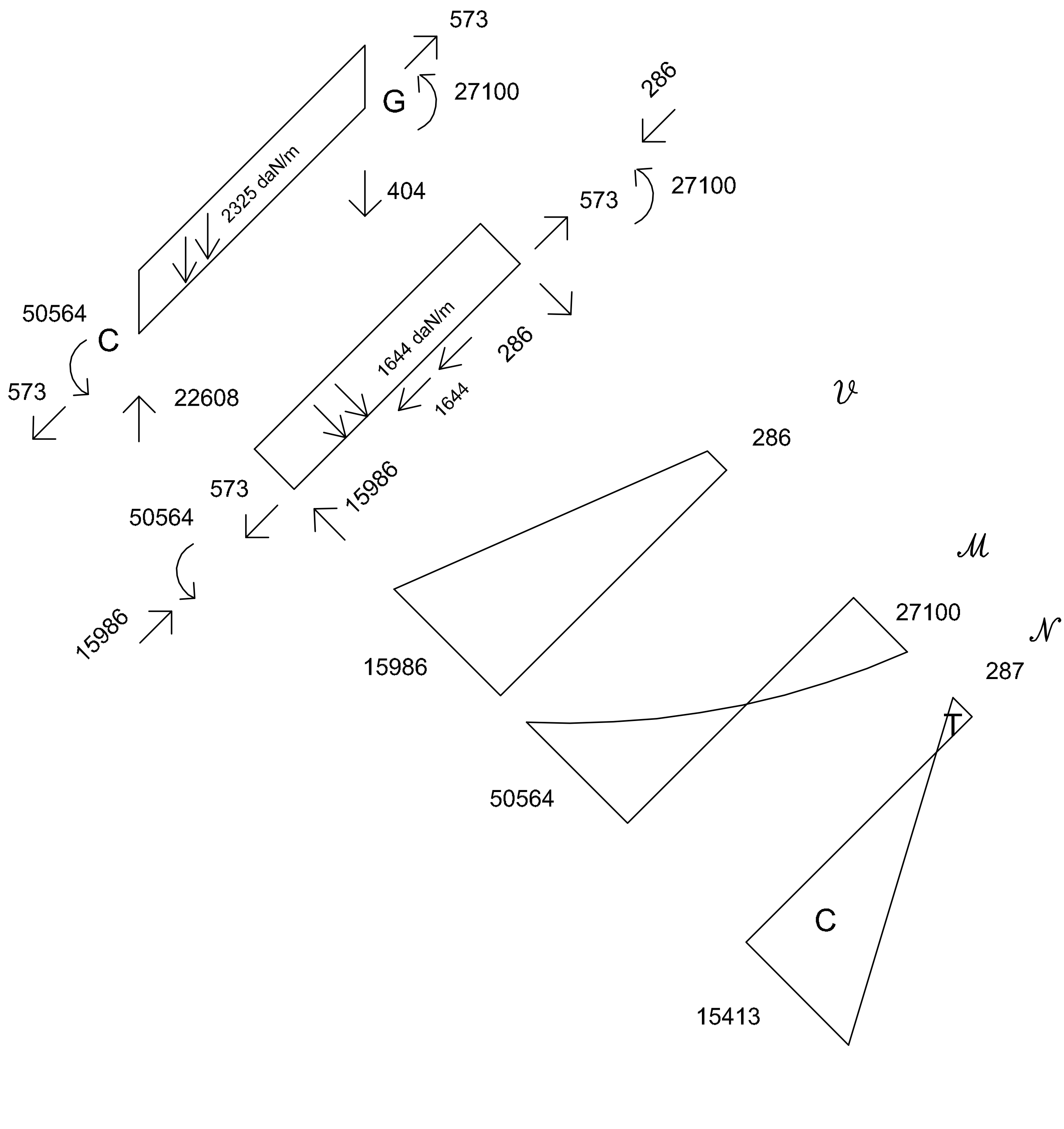
Diagrama de Solicitaciones:

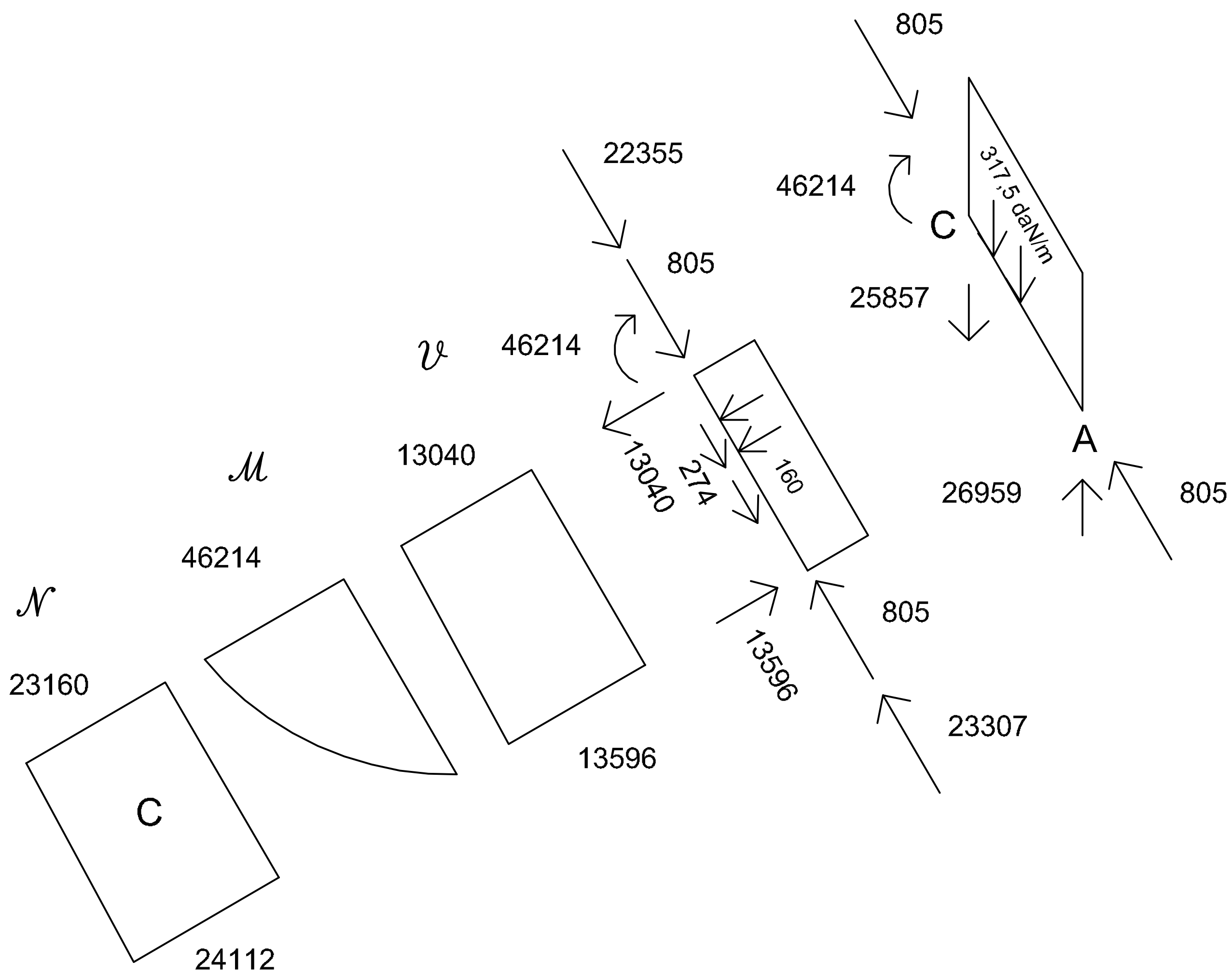
Aislamos cada barra para realizar los diagramas de solicitaciones.

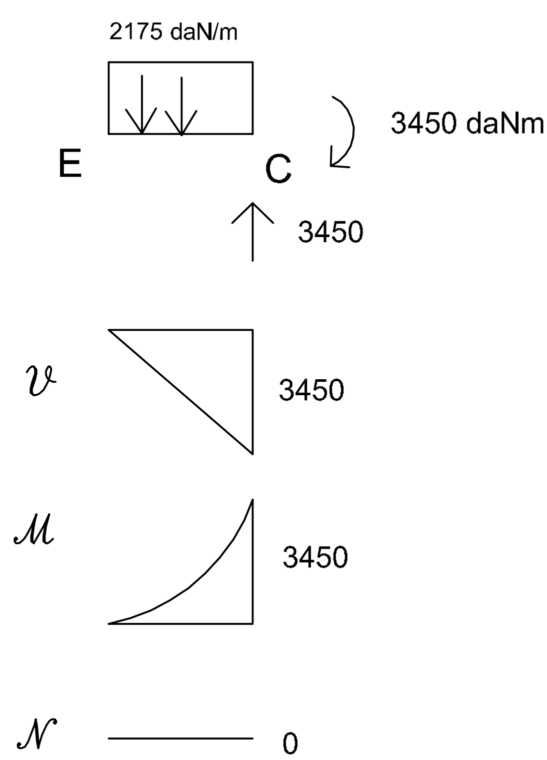
En cada barra tenemos:

- cargas propias del tramo
- momentos finales
- reacciones de tramo (iguales y contrarias a las descargas)
- axiles: los obtenemos de la observación de la estructura completa, vemos qué barras tienen axiles y de qué valor (componenetes sgún la dirección de la barra de las descargas de nudo).

Para realizar diagramas debemos descomponer las fuerzas en las direcciones perpendicular y paralela al eje de cada barra.




805
22355
46214
C
317,5 daN/m
805
25857
46214
𝒱
A
13040
𝓜
13040
274
160
26959
805
46214
𝒩
805
23160
13596
C
23307
13596
24112


2175 daN/m
E
C
3450 daNm
3450
𝒱
3450
𝓜
3450
𝒩
0

Reacciones:
Vemos qué fuerzas llegan a apoyos y las expresamos según componentes horizontales y verticales.