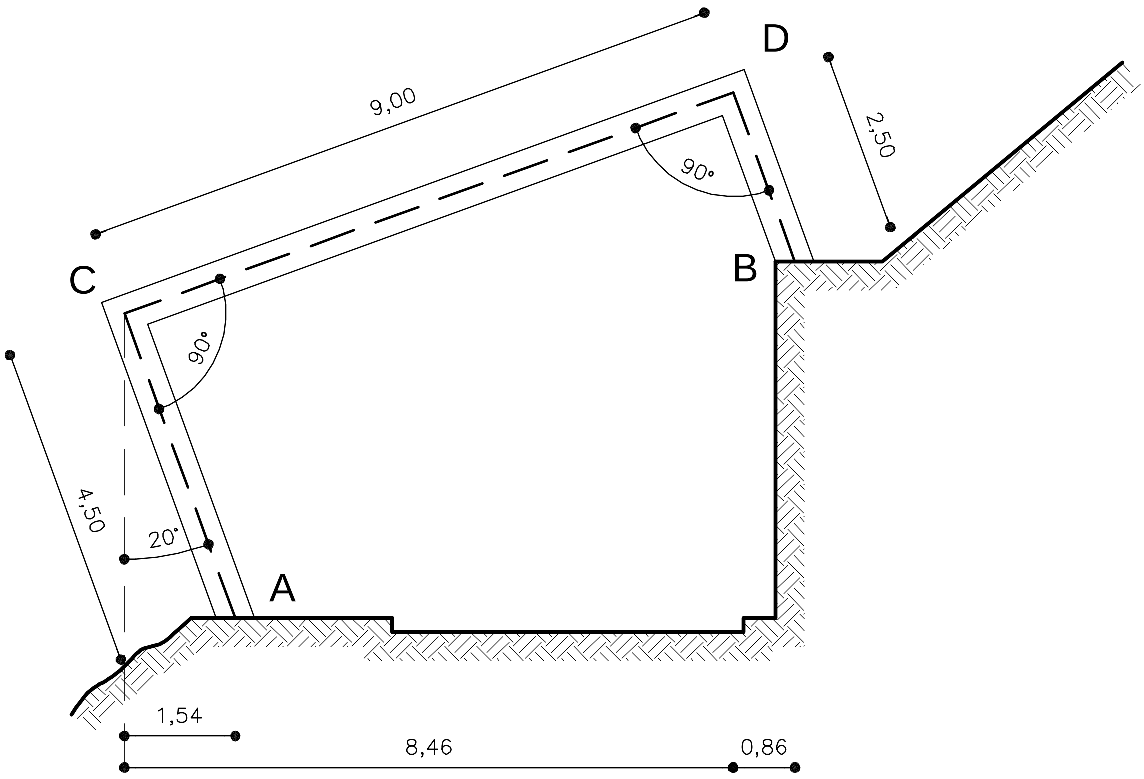
ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES II

Se plantea la siguiente estructura en Hormigón Armado:



Se trata de una costilla de tramos AC, CD y DB de sección constante de 20 x 50 cm y luces según gráfico. En los tramos CD y DB se considera una descarga de cubierta de 1800 daN/m de tramo.

Se pide:

a) Trazar Diagramas de Solicitaciones de todos los tramos.

b) Indicar reacciones en los apoyos.

El objetivo del método es la determinación de momentos en secciones convenientemente elegidas, a partir de los cuales pueden obtenerse las solicitaciones en todos los tramos, así como las descargas y reacciones en los apoyos. Para ello debe partirse de una definición formal de la estructura como dato de partida, ya sea en cuanto a esquema como a forma y dimensiones de todas las secciones.

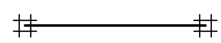
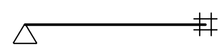
OBSERVACIÓN DE LA ESTRUCTURA:

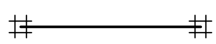
Costilla de hormigón armado cuyos apoyos A y B son empotrados.
Todas las barras tienen la misma sección y son de inercia constante.
Las barras CD y DB reciben la descarga de una cubierta de 1800 daN por metro de tramo.

DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES α y β :

Las expresiones de los valores de α (para determinar los coeficientes de repartición) y β (transmisión de momentos) dependen de los vínculos y de la variación de inercia.

Para inercia constante:

	α	β
	1	0,5
	0,75	0

En nuestro caso todas las barras son de inercia constante y biempotradas  , entonces α =1 y β =0,5.

DETERMINACIÓN DE LAS RIGIDECES DE LOS TRAMOS:

La rigidez es la mayor o menor capacidad de una barra a ser deformada por un giro.

$$\chi = \frac{Ir.E}{\ell}$$

χ ⟶ rigidez

Ir ⟶ inercia relativa: se debe comparar la inercia de cada barra con la menor de la estructura. En este caso todas las barras tienen la misma inercia, por lo que tomamos $Ir=1$.

E ⟶ módulo de elasticidad: al ser todas las barras del mismo material, simplificamos este factor.

ℓ ⟶ luz del tramo: interviene en forma inver– samente proporcional a la rigidez. Se toma la luz real del tramo.

$$\chi_{AC} = \frac{1}{4,5} = 0,222$$

$$\chi_{CD} = \frac{1}{9,0} = 0,111$$

$$\chi_{DB} = \frac{1}{2,5} = 0,4$$

Con los datos que hemos obtenido hacemos un cuadro que resuma todo:

rigidez flexional

BARRA	ℓ real	Ir	χ	α	β	$\alpha\chi$
AC	4,5	1	0,222	1	0,5	0,222
CD	9,0	1	0,111	1	0,5	0,111
DB	2,5	1	0,4	1	0,5	0,4

DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE REPARTICIÓN:

El momento no equilibrado en un nudo se distribuye entre los tramos concurrentes a ese nudo proporcionalmente a sus rigideces.
La suma de los coeficientes de repartición en un nudo debe ser 1.

$$r = \frac{\alpha\chi}{\Sigma\alpha\chi}$$

NUDO C

$$\Sigma\alpha\chi = 0{,}222 + 0{,}111 = 0{,}333$$

$$\left.\begin{aligned} r_{CA} &= \frac{0{,}222}{0{,}333} = 0{,}67 \\ r_{CD} &= \frac{0{,}111}{0{,}333} = 0{,}33 \end{aligned}\right\} \text{suman 1}$$

NUDO D

$$\Sigma\alpha\chi = 0{,}111 + 0{,}4 = 0{,}511$$

$$\left.\begin{aligned} r_{DC} &= \frac{0{,}111}{0{,}511} = 0{,}22 \\ r_{DB} &= \frac{0{,}4}{0{,}511} = 0{,}78 \end{aligned}\right\} \text{suman 1}$$

DETERMINACIÓN DE CARGAS:

Se determinan los pesos propios de cada barra más la descarga de la cubierta sobre los tramos que corresponden.

Sección de todas las barras= 20x50 cm

Tramo AC p.p.=0,2x0,50x2500=250 daN/m

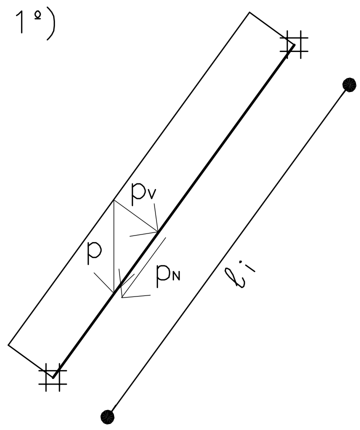
Tramo CD
p.p.= 250 daN/m
desc. cubierta=1800 daN/m
p=2050 daN/m

Tramo DB
p.p.= 250 daN/m
desc. cubierta=1800 daN/m
p=2050 daN/m

MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO:

Son los momentos producidos por cargas normales al eje de la barra. Para estos momentos de fijación; acción del nudo sobre la barra, se adoptará convencionalmente el signo (+) para el sentido horario y (−) para el sentido antihorario.
En el caso de barras inclinadas hay dos procedimientos:

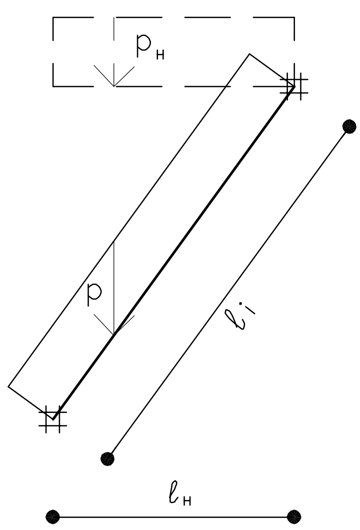
1º)



Descomponemos la carga según direcciones perpendicular (p_V) y paralela (p_N) al eje de la barra. Tomamos el valor de la carga perpendicular al eje y la luz (inclinada) de la barra.

$$M.E.P. = \frac{p_V . \ell_i^2}{12}$$

2º)



"Horizontalizamos" la carga distribuyéndola en la luz que corresponde a la proyección horizontal de la barra.

$$p_H = \frac{p . \ell_i}{\ell_H}$$

$$M.E.P. = \frac{p_H . \ell_H^2}{12}$$

Sustituyendo:

$$M.E.P. = \frac{p . \ell_i . \ell_H}{12}$$

En nuestro ejemplo:

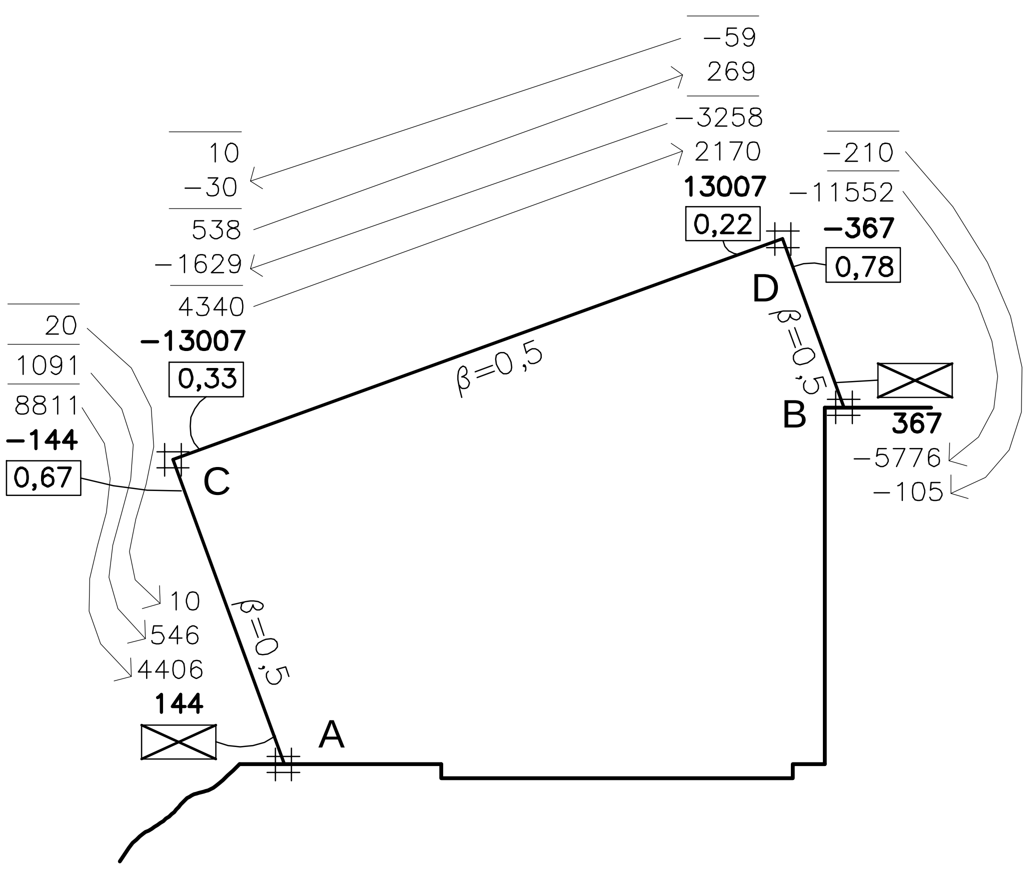
AC $M.E.P. = \dfrac{p . l_h . l_i}{12} = \dfrac{250 x 4{,}5 x 1{,}54}{12} = 144$ daNm

CD $M.E.P. = \dfrac{p . l_h . l_i}{12} = \dfrac{2050 x 9 x 8{,}46}{12} = 13007$ daNm

DB $M.E.P. = \dfrac{p . l_h . l_i}{12} = \dfrac{2050 x 0{,}86 x 2{,}5}{12} = 367$ daNm

ARTIFICIO DE CROSS:

Esta etapa consiste en partir de una situación ficticia, pero conocida, de los nudos. Se colocarán aparatos fijadores que les impidan girar y desplazarse, situación que sólo se impondrá a aquellos nudos a los cuales concurran barras con momentos desconocidos en sus extremos:



Se procede a quitar los aparatos fijadores, es decir, se les permite girar a cada nudo por vez, en cierto orden.

Comenzamos por el nudo más desequilibrado: el nudo C.

Aparece un momento desequilibrante de sentido contrario al de fijación, que se equilibra repartiéndolo entre las barras que llegan al nudo cuando corresponda.

El momento a repartir es el opuesto a la suma algebraica de los momentos de fijación que hay en el nudo.

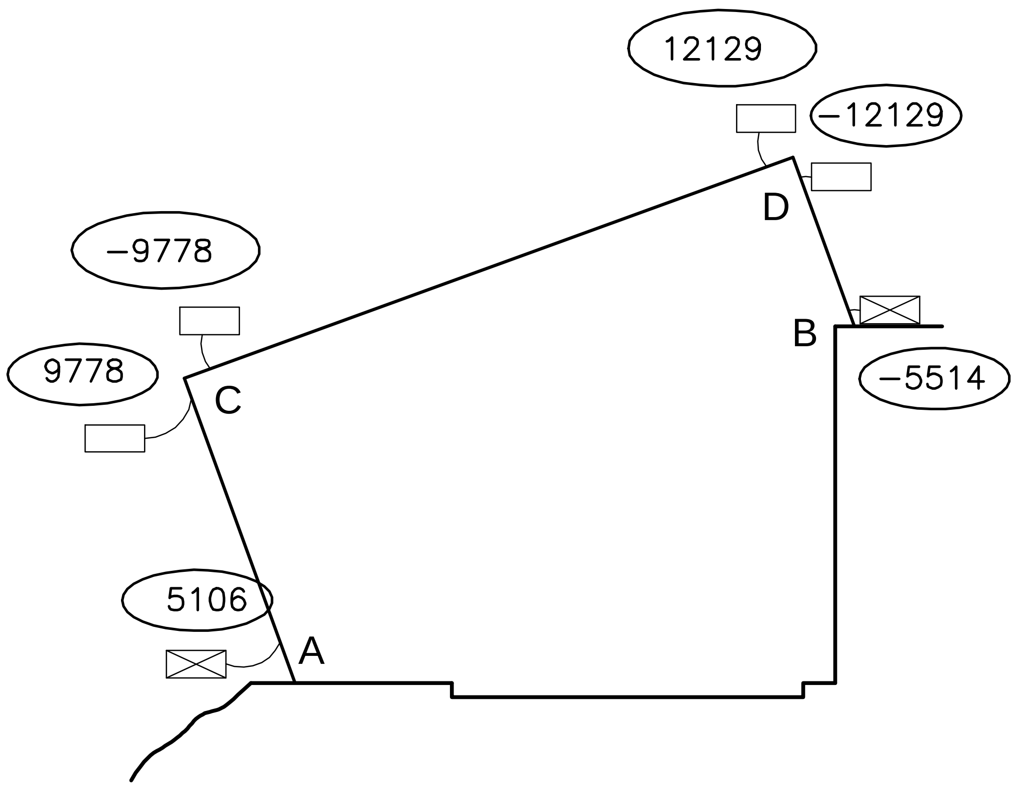
$\sum$ M.E.P.= −13007−144 =−13151

$$\Delta M\ 13151 \begin{array}{l} \longrightarrow x0{,}33=4340 \\ \longrightarrow x0{,}67=8811 \end{array}$$

Una vez hecha la repartición el nudo queda en equilibrio; se vuelve a colocar el aparato fijador y debemos transmitir éstos momentos repartidos hacia el otro extremo de cada barra multiplicándolos por el coeficiente β de transmisión.

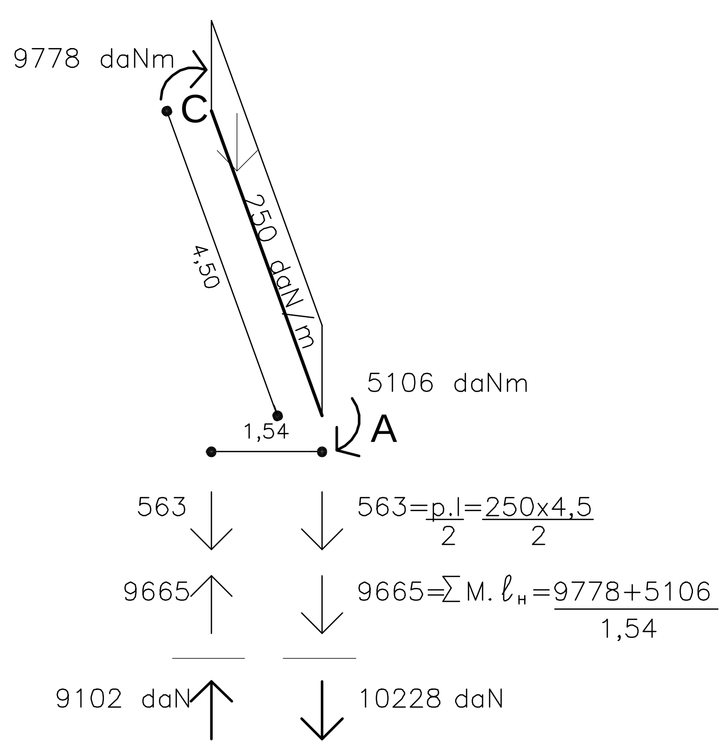
Pasamos a repetir el procedimiento con el nudo D. En este nudo tenemos: el momento de empotramiento perfecto de la barra CD, el momento de la barra DB y el momento transmitido desde el nudo C.
Es la sumatoria de todos estos momentos la que debemos repartir (con el signo contrario al obtenido) entre las barras y luego hacer las transmisiones.
Repetimos el procedimiento hasta obtener valores de momentos cuya diferencia con el del mismo en la vuelta anterior se considere despreciable. No debe terminarse el proceso con una transmisión.

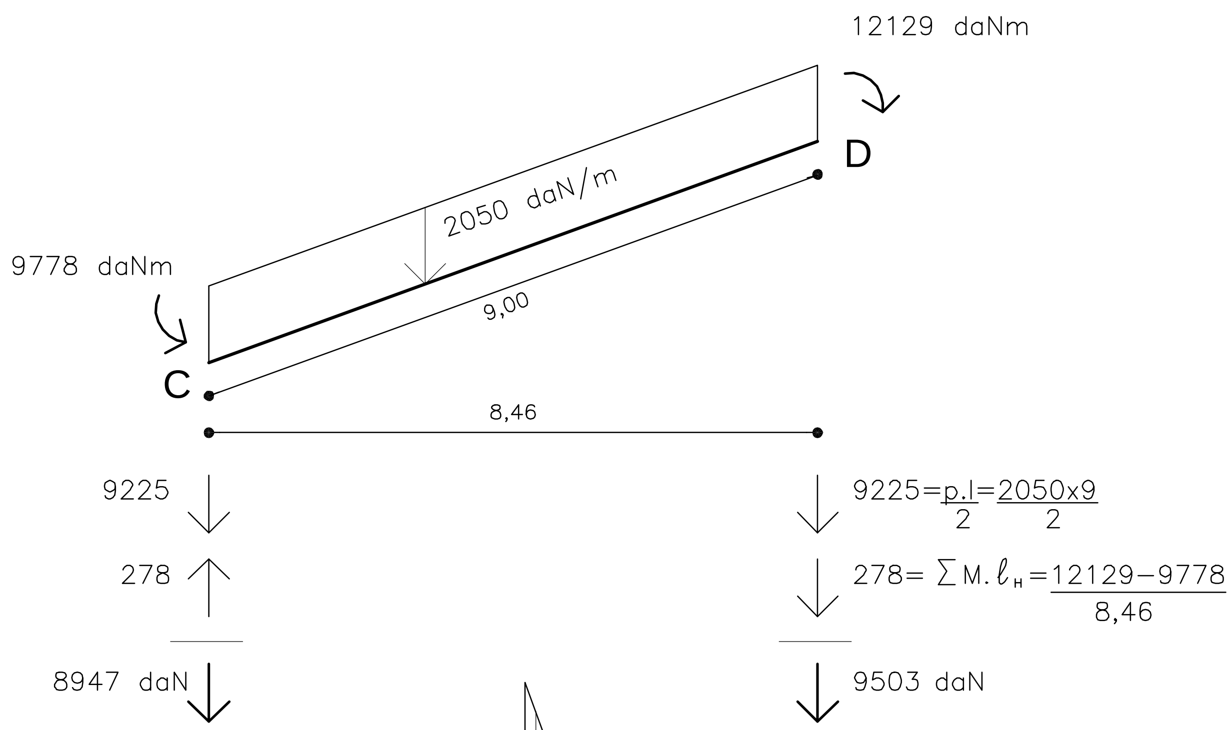
Terminado el proceso se suman los momentos en los extremos de cada barra, incluyendo los de fijación iniciales, debiendo existir equilibrio en cada nudo.

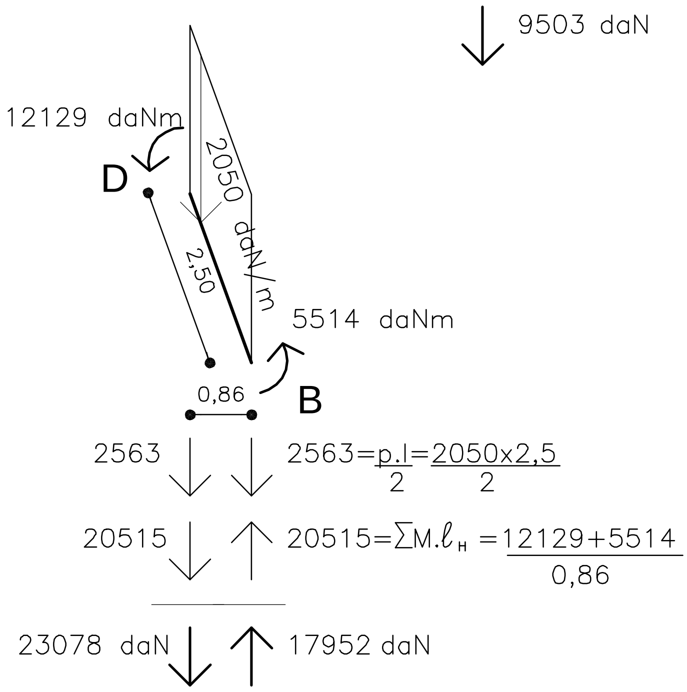


DESCARGAS BARRA POR BARRA:

Aislamos cada barra y descargamos las cargas actuantes y los momentos obtenidos en el Cross.

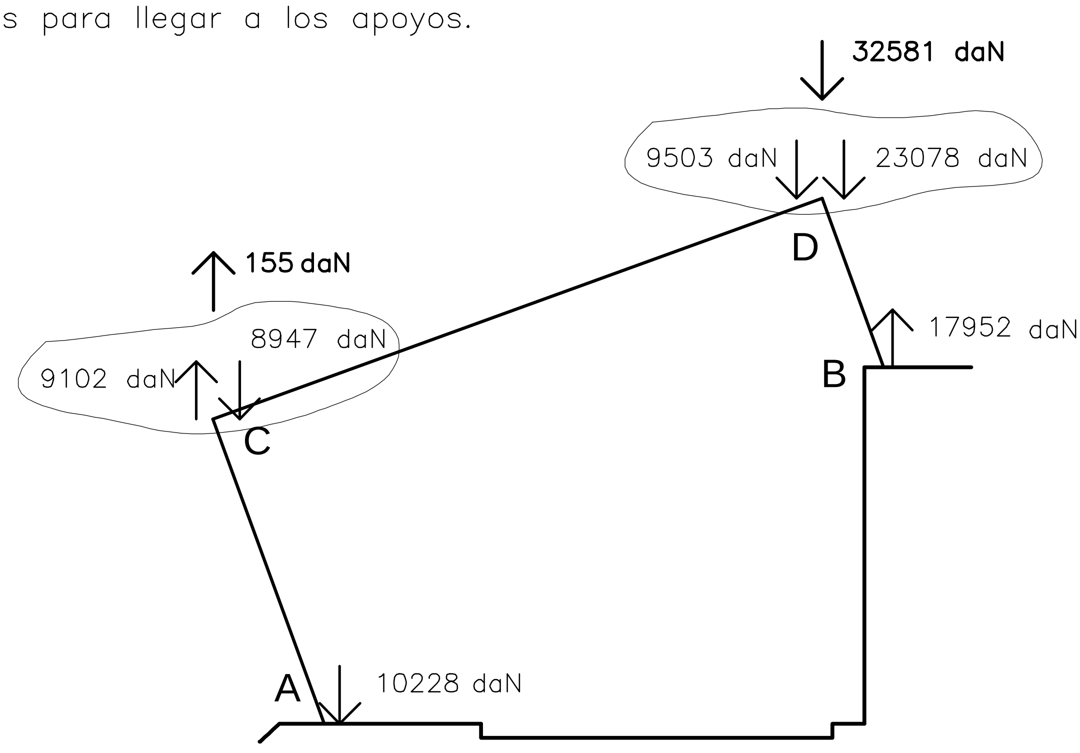




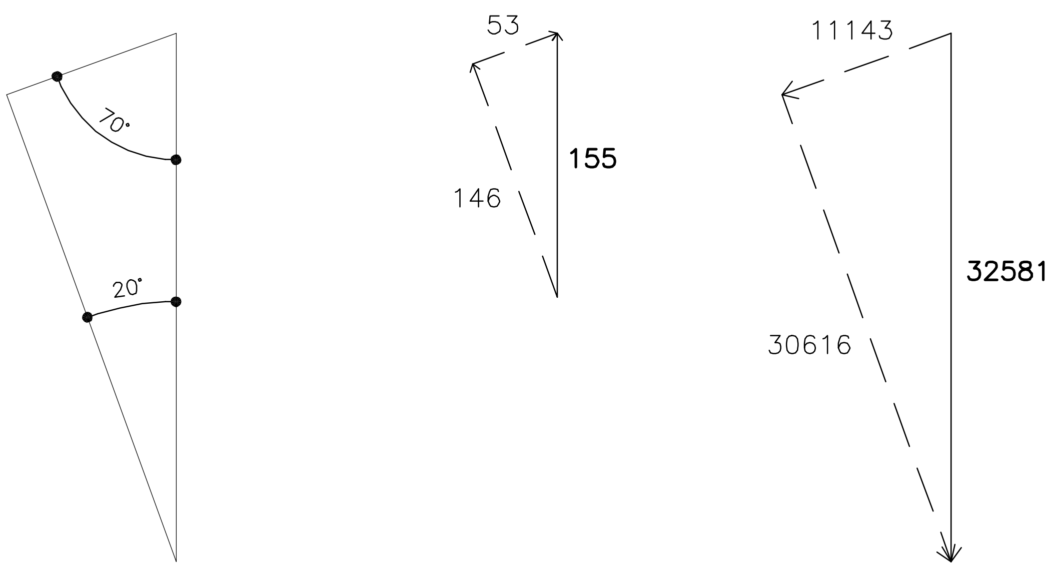


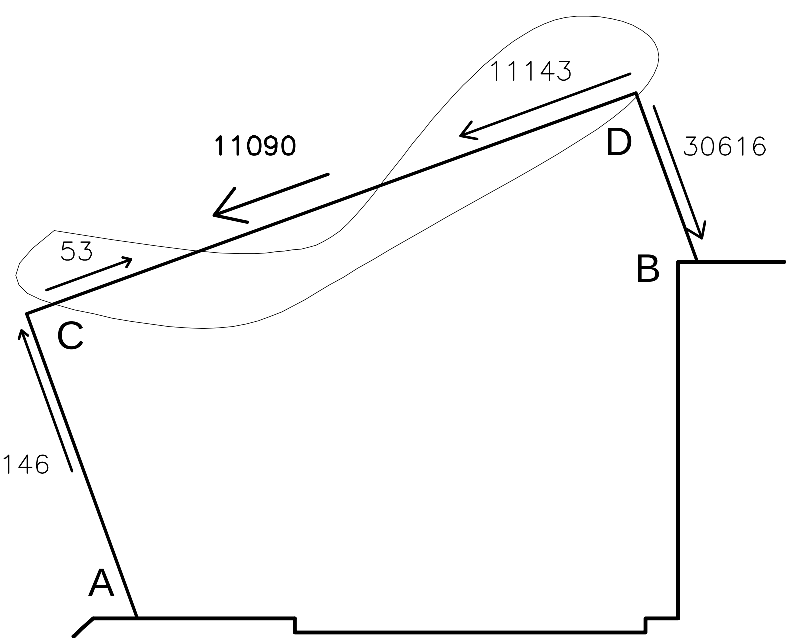
CONDUCCIÓN DE CARGAS POR CAMINOS MATERIALES:

Una vez determinadas las descargas barra por barra, se colocan en la estructura para analizar los caminos materiales que encuentran las fuerzas para llegar a los apoyos.



Descomponemos las fuerzas verticales en las direcciones de las barras que concurren a esos nudos.



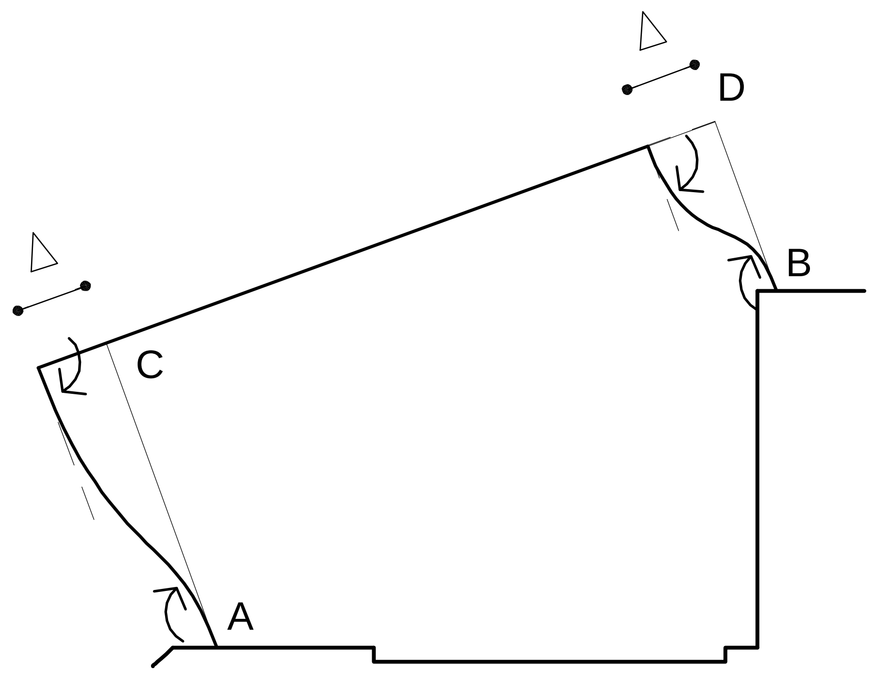


Hay una fuerza que no encuentra un camino material por el cual llegar a los apoyos. Es una fuerza de desviación F=11090 daN.

DEFORMADA:

Los nudos se desplazan frenados, no giran.
Comenzamos el trazado de la deformada por barras que tengan un estremo fijo (apoyos).
Debemos considerar:

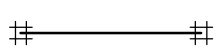
- El nudo se desplaza perpendicular al eje, y Δ se mide proyectando los extremos de la barra sobre una perpendicular al eje de la misma.
- La proyección de los extremos de la barra deformada sobre una paralela al eje, mantiene la luz de la barra.
- La tangente de la deformada es paralela al eje de la barra.



El trazado de la deformada nos da información sobre:

- Qué barras se deforman
- Dónde se producen momentos
- Cuál es el sentido de esos momentos.

El valor de los momentos para inercia constante:



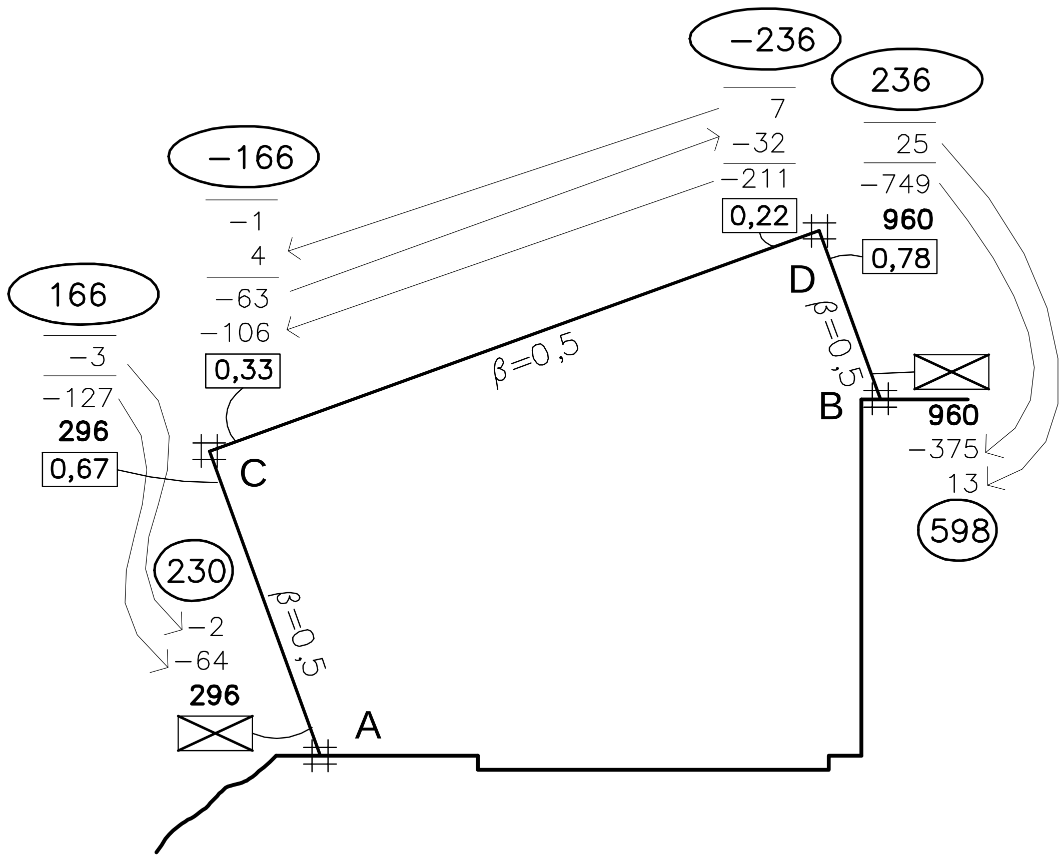
$$M=\frac{6\chi\Delta}{\ell}$$

$$M_{AC} = M_{CA} = \frac{6.0{,}222.1000}{4{,}5} = 296 \text{ daNm}$$

$$M_{DB} = M_{BD} = \frac{6.0{,}4.1000}{2{,}5} = 960 \text{ daNm}$$

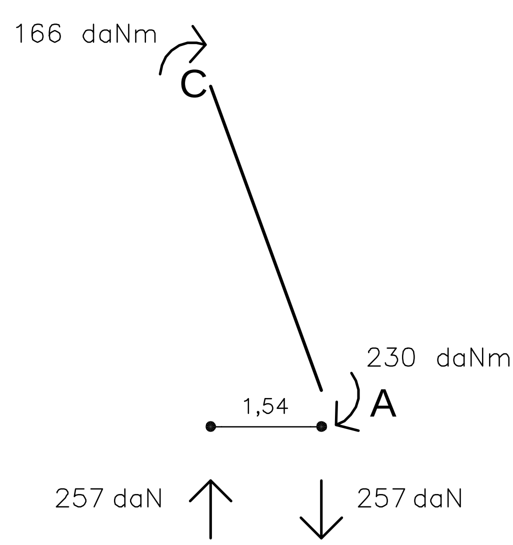
ARTIFICIO 2ª CROSS:

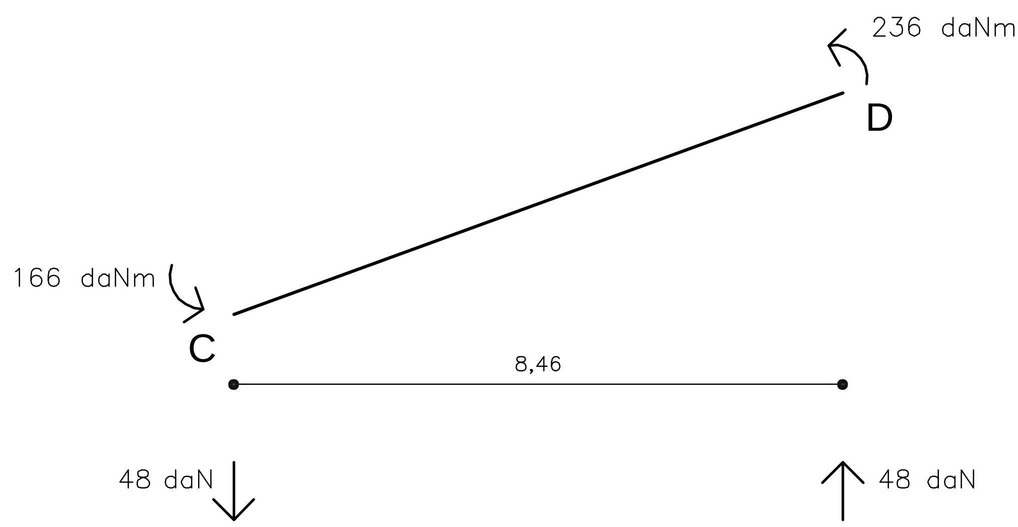
Con los momentos hallados al trazar la deformada y con los mismos coeficientes de repartición, repetimos el Artificio de Cross.

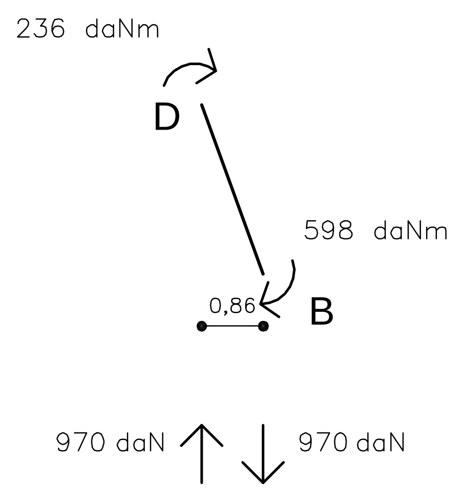


DESCARGA DE MOMENTOS DEL 2ª CROSS:

Aislamos cada barra y hallamos las descargas de los momentos obtenidos en el 2ª Cross.

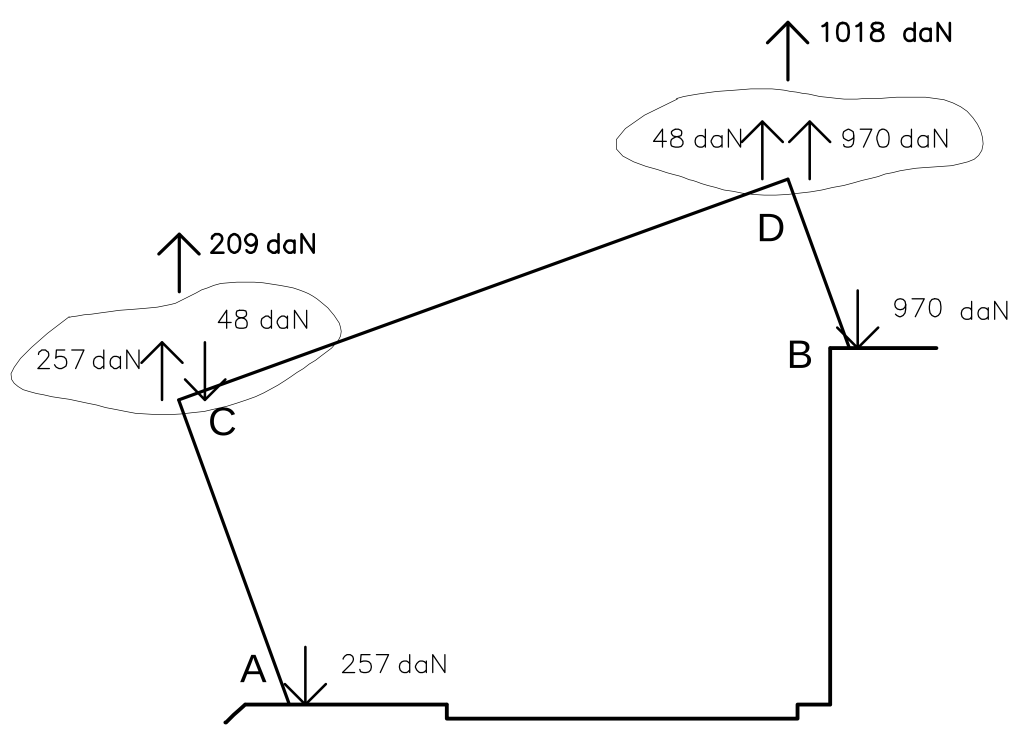


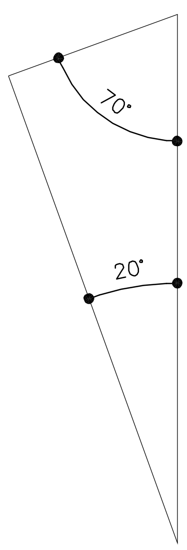


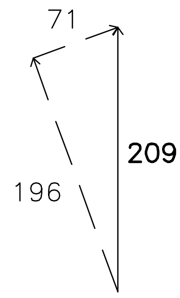


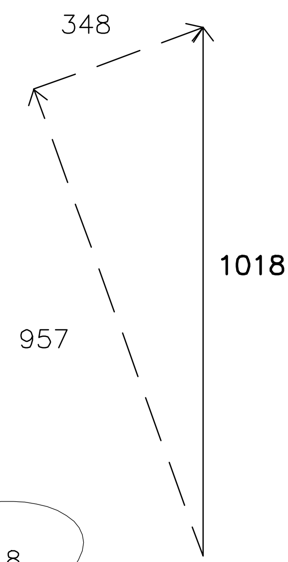
CAMINOS MATERIALES:

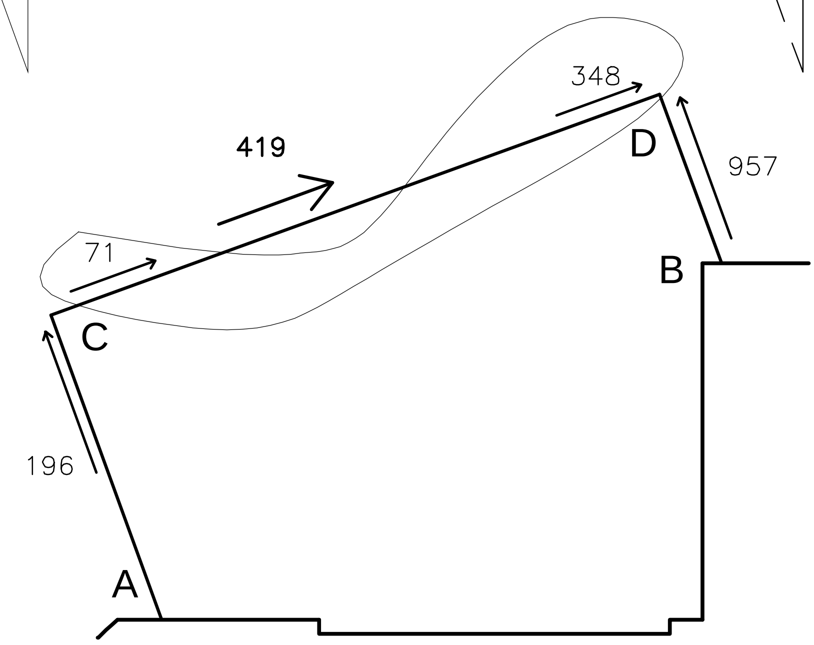
Volvemos a componer la estructura para determinar los caminos materiales de las fuerzas obtenidas.











Deberíamos obtener una fuerza F' igual en valor pero de sentido contrario a F para equilibrar la estructura.

Llegamos a una fuerza de desviación F' cuyo valor no es igual a F, porque partimos de valores de $\triangle$ proporcionales, pero sí tiene la misma dirección y sentido contrario a F.

Para que se anule con F la debemos corregir multiplicándola por un coeficiente el que:

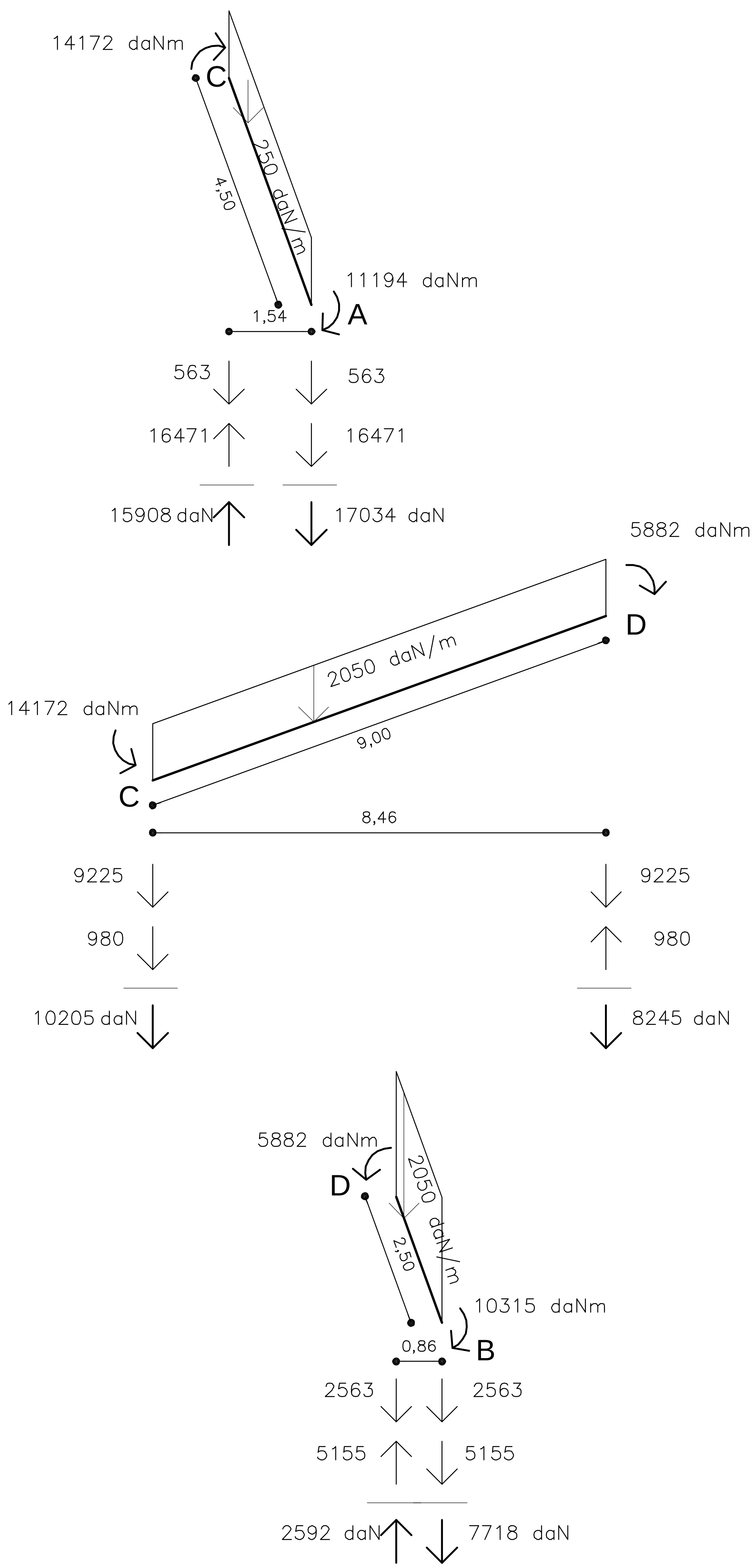
$$\alpha=\frac{F}{F'}=\frac{11090}{419}= 26,47$$

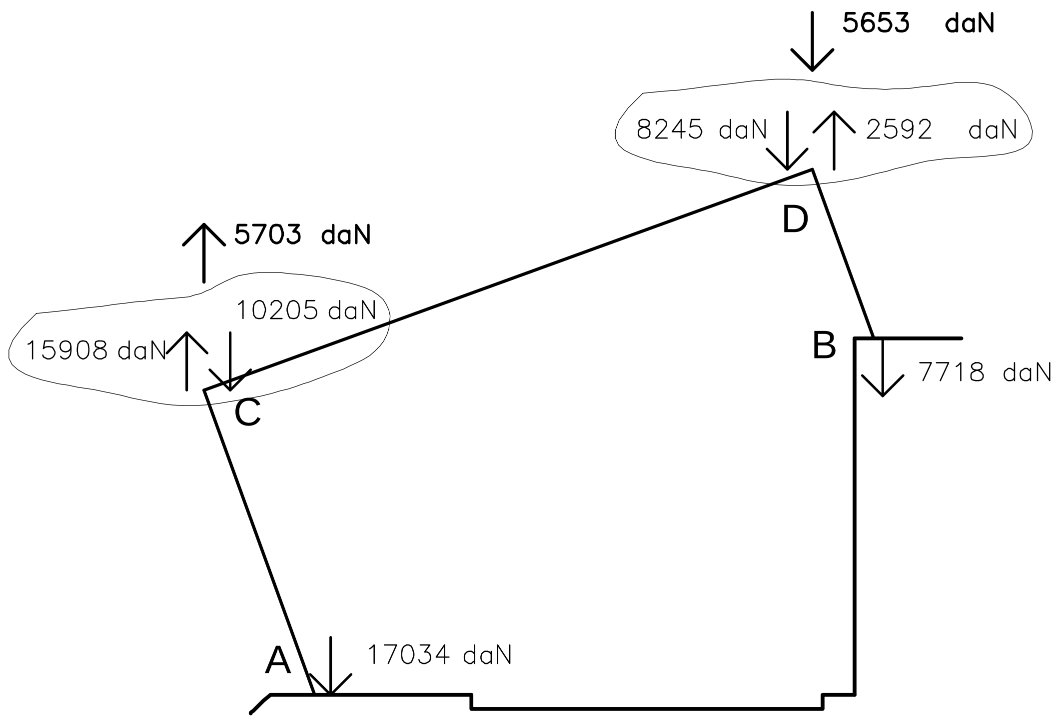
MOMENTOS FINALES:

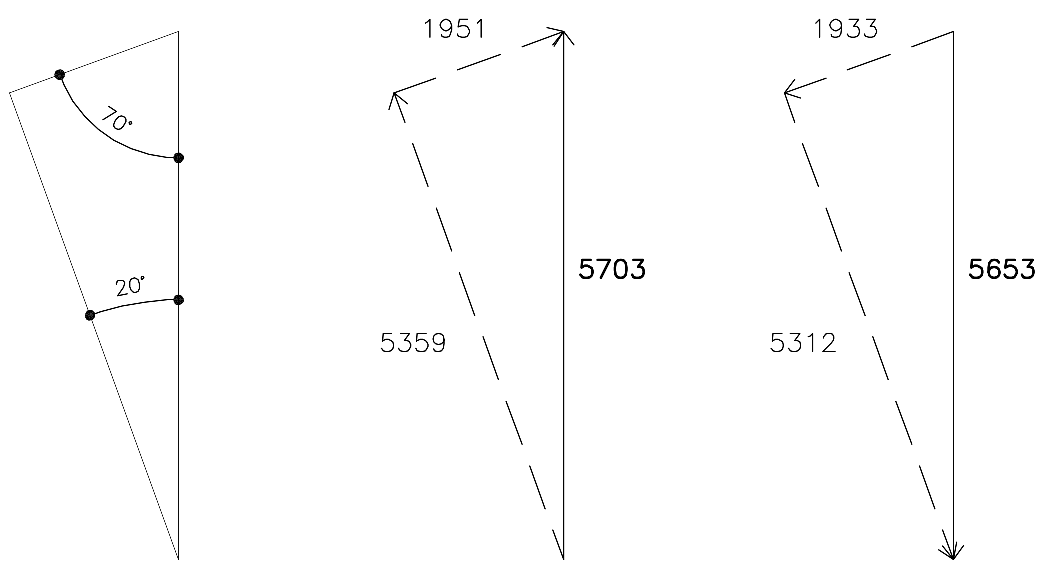
BARRA	Mom.1ªCross	Mom.2ªCross	α.Mom.2ªCross	Momentos Finales
AC	5106	230	6088	11194
CA	9778	166	4394	14172
CD	−9778	−166	−4394	−14172
DC	12129	−236	−6247	5882
DB	−12129	236	6247	−5882
BD	−5514	598	15829	10315

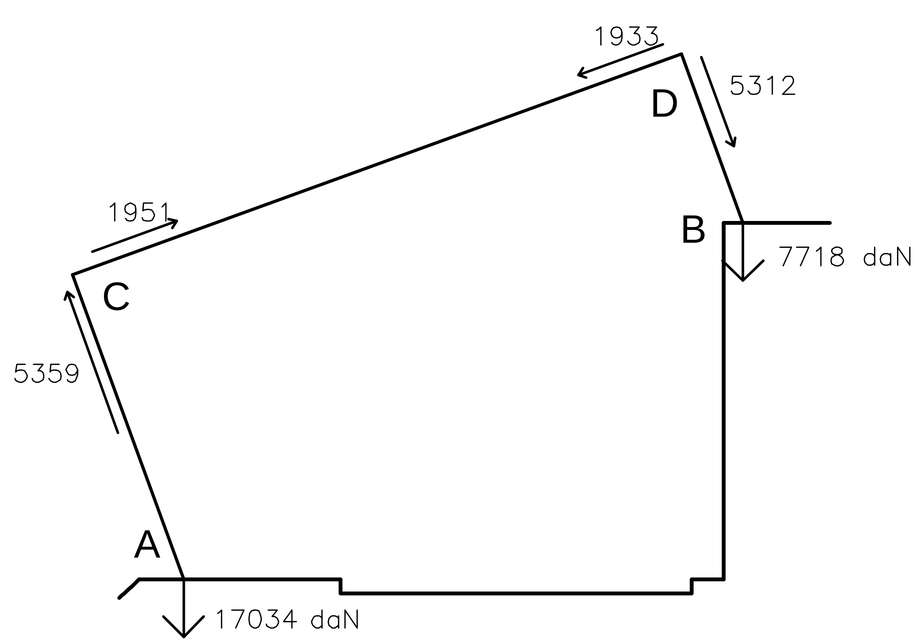
DESCARGAS BARRA POR BARRA:

Aislamos cada barra y hallamos las descargas producidas por las cargas actuantes y momentos finales.



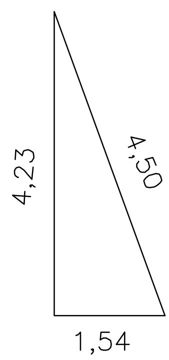






Al armar la estructura vemos que en la barra CD las fuerzas se equilibran.

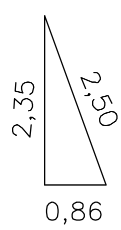
Por triángulos emejantes:



$$\frac{5359}{4{,}5} = \frac{x}{1{,}54} = \frac{y}{4{,}23}$$

x=1834 daN

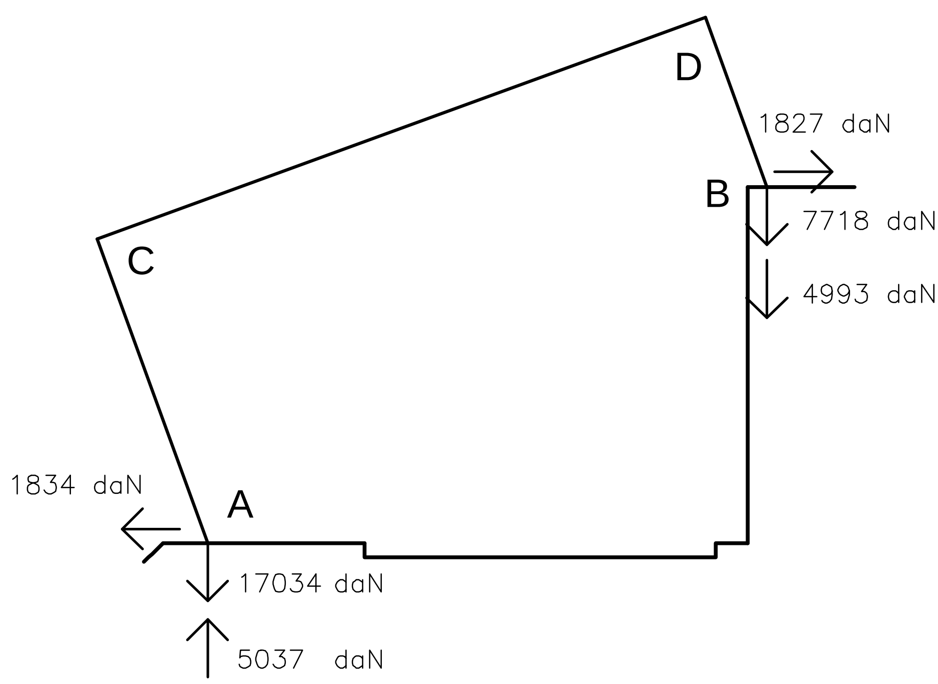
y=5037 daN



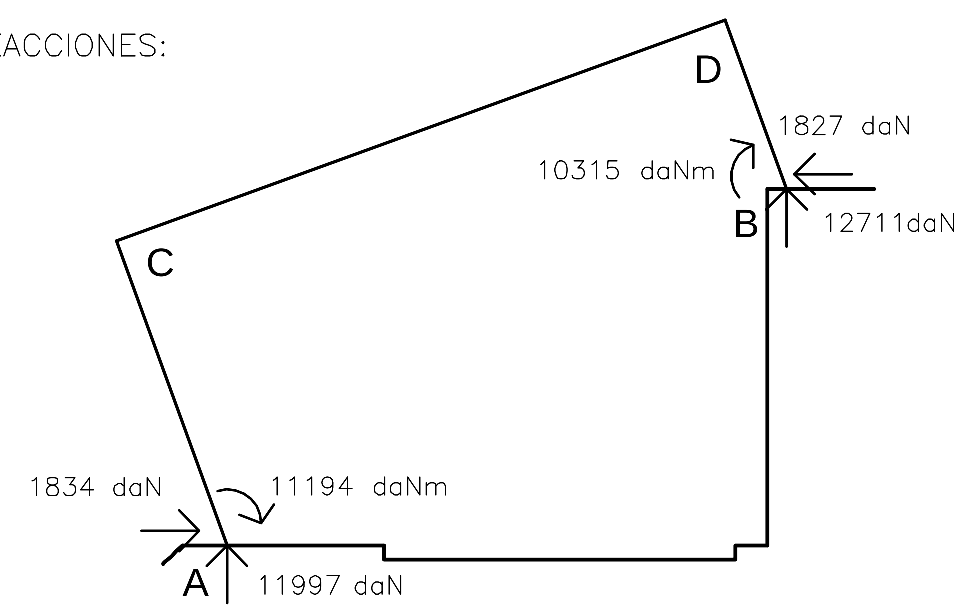
$$\frac{5312}{2{,}5} = \frac{x}{0{,}86} = \frac{y}{2{,}35}$$

x=1827 daN

y=4993 daN



REACCIONES:

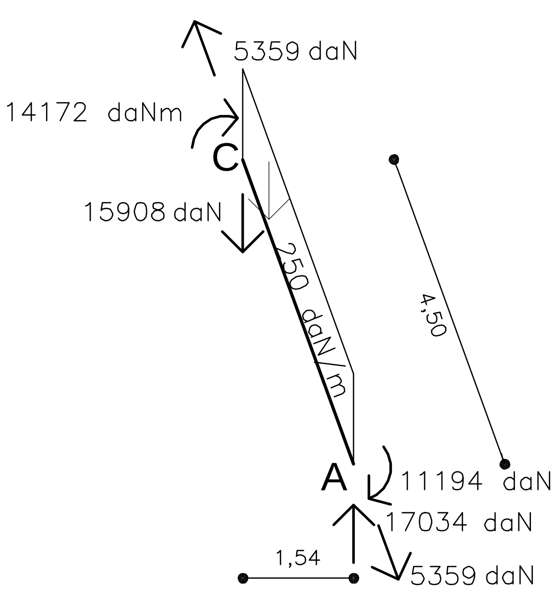


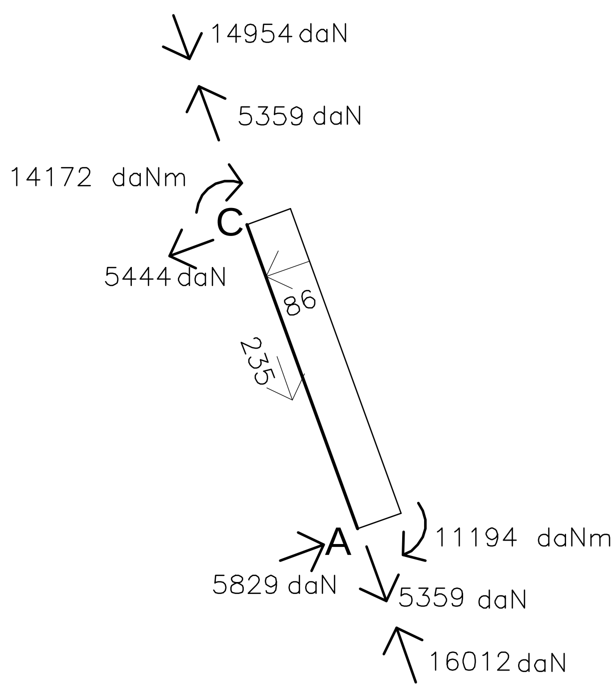
DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES:

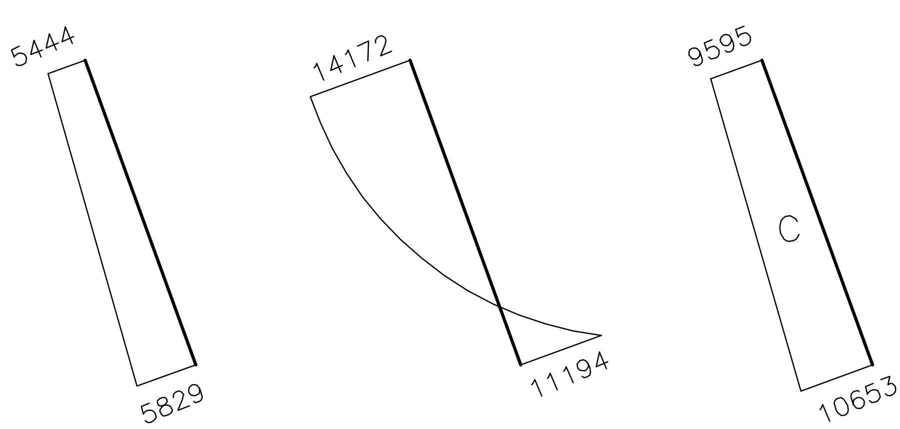
Aislamos cada barra para realizar los diagramas de solicitaciones. En cada barra tenemos: cargas actuantes, momentos finales, reacciones (iguales y contrarias a las descargas) y axiles. Obtenemos los axiles observando la estructura completa y vemos qué barras tienen axiles y de qué valor.

Para realizar diagramas debemos descomponer las fuerzas en las direcciones perpendicular y paralela al eje de cada barra.

BARRA AC:

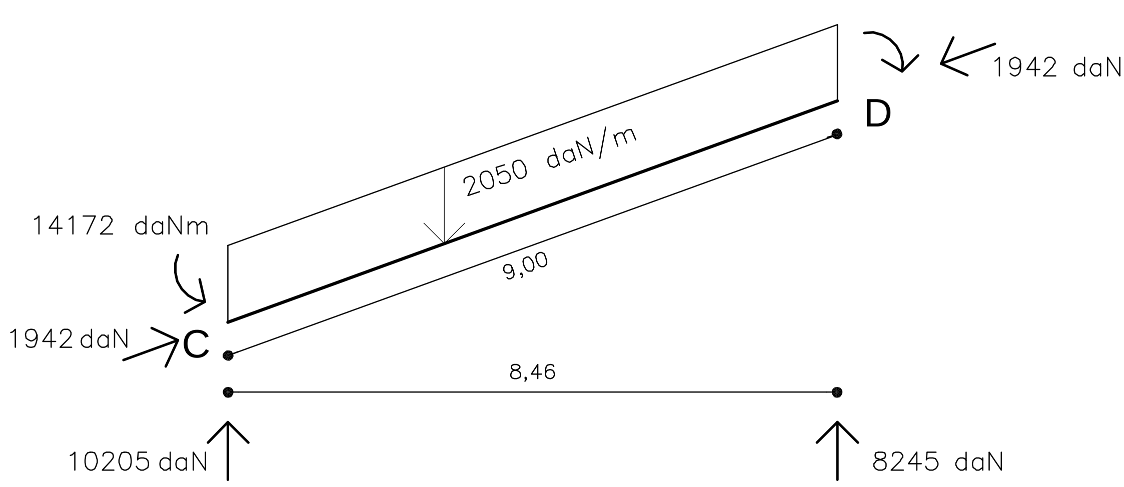


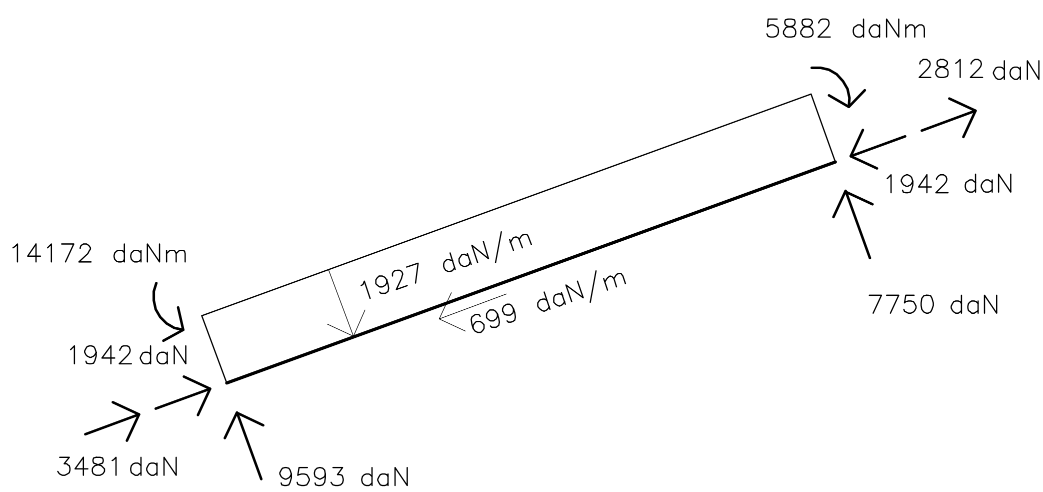


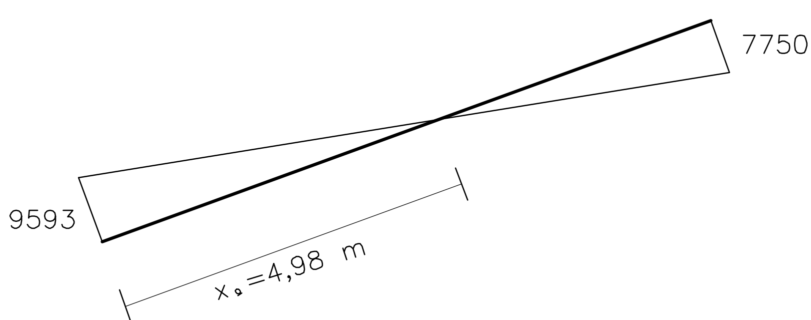


$\mathcal{V}$ (daN) $\mathcal{M}$ (daNm) $\mathcal{N}$ (daN)

BARRA CD:

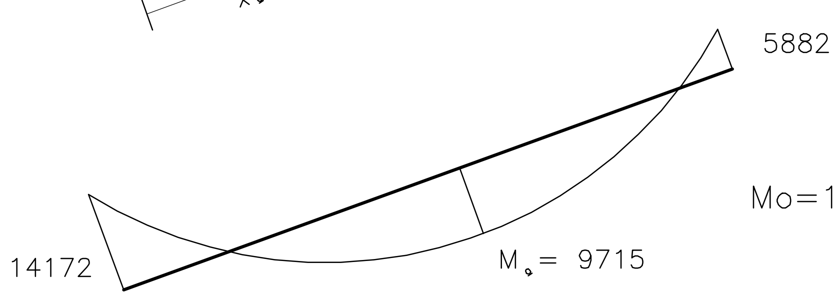






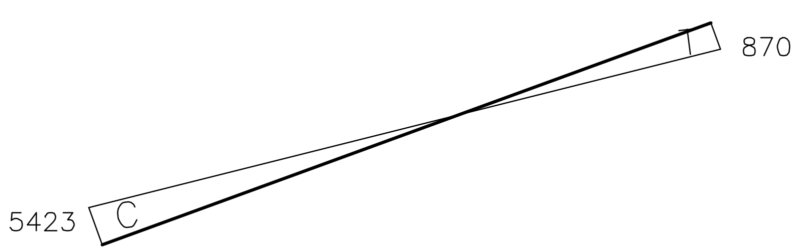
$\mathcal{V}$ (daN)

$$X_o = \frac{9593}{1927} = 4{,}98$$



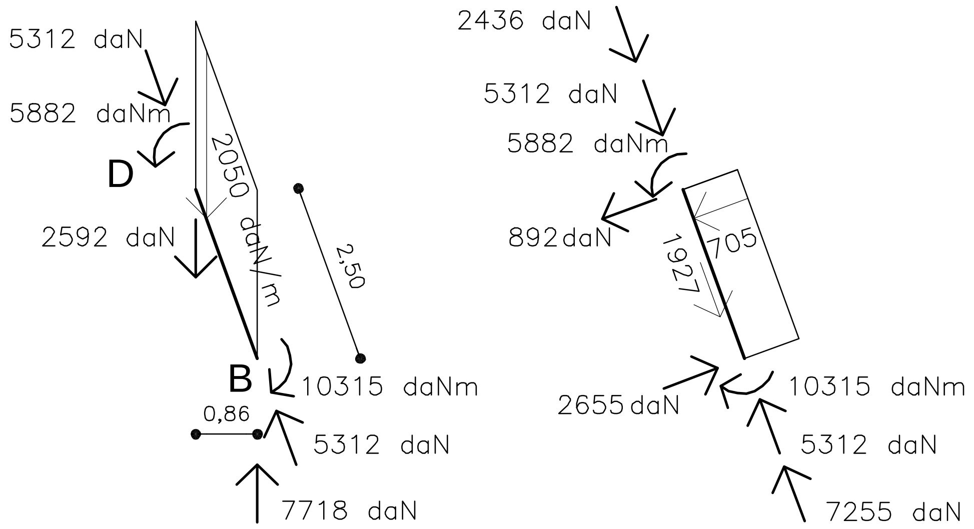
$\mathcal{M}$ (daNm)

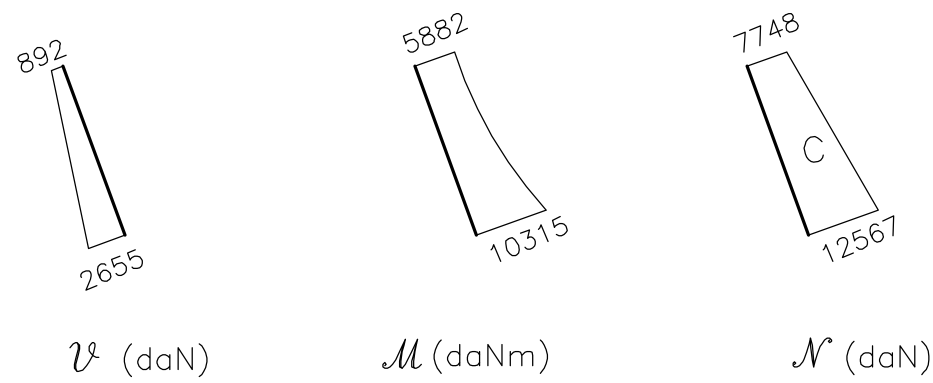
$$M_o = 14172 - \frac{9593 \times 4{,}98}{2} = -9715$$



$\mathcal{N}$ (daN)

BARRA DB:


5312 daN
5882 daNm
D
2050 daN/m
2592 daN
2,50
B
10315 daNm
0,86
5312 daN
7718 daN
2436 daN
5312 daN
5882 daNm
892 daN
705
1927
2655 daN
10315 daNm
5312 daN
7255 daN


892
2655
5882
10315
7748
C
12567
𝒱 (daN)
ℳ (daNm)
𝒩 (daN)